Renkaat ja kunnat 2026

Harjoitus 4: ratkaisuja

1. Todista Lemma 3.32.

Ratkaisu. Olkoon $x \in R$. Tällöin kertolaskun neutraalialkion määritelmän, monikerran määritelmän, distributiivisuuden ja assosiatiivisuuden, monikerran määritelmän, karakteristikan määritelmän ja Proposition 3.10(1) nojalla

$$qx = q\,(1_R x) = 1_R x + 1_R x + \cdots + 1_R x = (1_R + 1_R + \cdots + 1_R)x = (q1_R)x = 0_R x = 0_R\,.$$

Hyperboliset luvut on joukko

$$\mathbb{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

varustettuna matriisirenkaasta $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ indusoiduilla laskutoimituksilla.

2. Osoita, että $\mathbb{S}$ on renkaan $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ alirengas. Onko $\mathbb{S}$ kunta?

Ratkaisu. Käytämme alirengastestiä: Lasku osoittaa, että

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}$$

ja

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1b_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \\ b_1a_2 + a_1b_2 & b_1b_2 + a_1a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}\,.$$

Lisäksi $-1_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}$. Siis $\mathbb{S}$ on renkaan $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ alirengas.

Matriisi $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}$ ei ole kääntyvä, joten $\mathbb{S}$ ei ole kunta.

3. Osoita, että ei ole kuntahomomorfismia $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$.

Ratkaisu. Proposition 4.7 nojalla kuntahomomorfismi $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ olisi injektio. Tällöin kuvajoukko $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Q}$ olisi numeroituvan joukon ylinumeroituva osajoukko, mikä on mahdotonta.

Ratkaisu (Toinen ratkaisu)**.** Tunnetusti luvulla 2 ei ole rationaalista neliöjuurta. Jos $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ olisi kuntahomomorfismi, niin koska ϕ on homomorfismi ja $\sqrt{2}^2 = 2$,

$$\phi(\sqrt{2})^2 = \phi(2) = \phi(1+1) = 1 + 1 = 2\,.$$

Siis luvulla 2 olisikin rationaalinen neliöjuuri.

4. Osoita, että ei ole kuntahomomorfismia $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.[1]

[1] Minne imaginaariyksikkö kuvautuisi?

Ratkaisu. Kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee tunnetusti $x^2 \geqslant 0$. Jos $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ olisi kuntahomomorfismi, niin koska ϕ on homomorfismi ja $i^2 = -1$, ja Lemman 3.19 nojalla

$$\phi(i)^2 = \phi(i^2) = \phi(-1) = -1 < 0\,,$$

mikä on ristiriita.

5. Osoita, että $\mathbb{Q}(i)$ on kompleksilukujen kunnan alikunta.

Ratkaisu. Käytetään alikuntatestiä. Joukko $\mathbb{Q}(i)$ on määritelty niin, että se on kunnan $\mathbb{C}$ osajoukko. Selvästi $0, 1 \in \mathbb{Q}(i)$, joten $\#\mathbb{Q}(i) \geqslant 2$. Olkoot $a + ib, c + id \in \mathbb{Q}(i)$. Luvulla $c + id \in \mathbb{C}$ on vastaluku $-(c + id) = -c - id \in \mathbb{C}$. Lasku osoittaa, että

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d) \in \mathbb{Q}(i)\,.$$

Jos $c + id \neq 0$, niin sillä on käänteisalkio kunnassa $\mathbb{C}$, $(c + id)^{-1} = \frac{c-id}{c^2+d^2}$. Lasku osoittaa, että

$$(a + ib)(c + id)^{-1} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{-ad + bc}{c^2 + d^2} \in \mathbb{Q}(i)\,.$$

6. Olkoon d luonnollinen luku, joka ei ole neliö. Osoita, että $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ on reaalilukujen renkaan alirengas.

Ratkaisu. Käytetään alirengastestiä. Joukko $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ on määritelty niin, että se on renkaan $\mathbb{R}$ osajoukko. Olkoot $a + b\sqrt{d}, a' + b'\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Lasku osoittaa, että

$$(a + b\sqrt{d}) + (a' + b'\sqrt{d}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$$

ja

$$(a + b\sqrt{d})(a' + b'\sqrt{d}) = (aa' + bb'd) + (ab' + ba')\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]\,.$$

Lisäksi $-1 = -1 + 0\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

7. Osoita, että $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]^\times$ on ääretön.

Ratkaisu. Huomataan, että $8 \pm 3\sqrt{7} \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ ja

$$(8 + 3\sqrt{7})(8 - 3\sqrt{7}) = 1\,,$$

joten $8 \pm 3\sqrt{7} \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]^\times$. Proposition 4.1 nojalla $(8+3\sqrt{7})^k$ on yksikkö kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Jono $\big((8 + 3\sqrt{7})^k\big)_{k=1}^{\infty}$ on aidosti kasvava, koska $8 + 3\sqrt{7}10$, joten $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]^\times$ sisältää äärettömän joukon $\big\{\pm(8 \pm 3\sqrt{7})^k : k \in \mathbb{N}\big\}$.

8. Todista Propositio 5.5.

Ratkaisu. Olkoon K kokonaisalue. Olkoot $a, b, c \in K$ siten, että $a \neq 0$ ja $ab = ac$. Distributiivisuuden nojalla $a(b - c) = 0$. Koska kokonaisalueessa K ei ole nollan jakajia, pätee $b - c = 0$, joten $b = c$.

Oletetaan sitten, että kommutatiivisessa renkaassa K pätee renkaan supistussääntö. Olkoot $a, b \in K$ siten, että $ab = 0$. Jos $a \neq 0$, niin $ab = a\,0$, joten supistussäännön nojalla $b = 0$. Siis kommutatiivisessa renkaassa K ei ole nollan jakajia, joten se on kokonaisalue.