

Renkaat ja kunnat 2026

Harjoitus 3: ratkaisuja

1. Todista Lemma 1.24: Osoita, että kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$ pätee

$$(1) \quad \bar{\bar{z}} = z,$$

$$(2) \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w},$$

$$(3) \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w} \text{ ja}$$

$$(4) \quad \mathbf{n}(\bar{z}) = \mathbf{n}(z).$$

Ratkaisu. Olkoot $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$(1) \quad \bar{\bar{z}} = \overline{(z)} = \overline{a + ib} = a - ib = a + ib = z,$$

$$(2) \quad \overline{z + w} = \overline{a + c + i(b + d)} = a + c - i(b + d) = (a - ib) + (c - id) = \bar{z} + \bar{w},$$

$$(3) \quad \overline{zw} = \overline{(a + ib)(c + id)} = \overline{ac - bd + i(ad + bc)} = ac - bd - i(ad + bc) = (a - ib)(c - id) = \bar{z}\bar{w},$$

$$(4) \quad \mathbf{n}(\bar{z}) = \mathbf{n}(a + (-b)i) = a^2 + b^2 = \mathbf{n}(z) \text{ tai } \mathbf{n}(\bar{z}) = \bar{z}\bar{\bar{z}} = \bar{z}z = z\bar{z} = \mathbf{n}(z).$$

2. Todista Propositio 3.7.

Ratkaisu. Olkoot R ja S renkaita. Olkoon $*$ renkaiden R ja S tulojoukon $R \times S$ yhteen- tai kertolasku. Olkoot $(r_1, s_1), (r_2, s_2), (r_3, s_3) \in R \times S$. Renkaiden R ja S laskutoimitusten assosiatiivisuuden nojalla pätee

$$\begin{aligned} (r_1, s_1) * ((r_2, s_2) * (r_3, s_3)) &= (r_1, s_1) * (r_2 * r_3, s_2 * s_3) = (r_1 * (r_2 * r_3), s_1 * (s_2 * s_3)) \\ &= ((r_1 * r_2) * r_3, (s_1 * s_2) * s_3) = ((r_1, s_1) * (r_2, s_2)) * (r_3, s_3) \\ &= ((r_1, s_1) * (r_2, s_2)) * (r_3, s_3), \end{aligned}$$

joten tulolaskutoimitus on assosiatiivinen.

Renkaiden R ja S yhteenlaskun kommutatiivisuuden nojalla pätee

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2) = (r_2 + r_1, s_2 + s_1) = (r_2, s_2) + (r_1, s_1),$$

joten tulolaskutoimitus on kommutatiivinen.

Laskut osoittavat helposti, että kaikille $(r, s) \in R \times S$ pätee

$$(0_R, 0_S) + (r, s) = (0_R + r, 0_S + s) = (r, s)$$

joten $(0_R, 0_S)$ on yhteenlaskun neutraali-alkio. Lisäksi

$$(-r, -s) + (r, s) = (-r + r, -s + s) = (0_R, 0_S),$$

joten $(R \times S, +)$ on kommutatiivinen ryhmä.

Vastaavasti

$$(1_R, 1_S)(r, s) = (1_R r, 1_S s) = (r, s) = (r 1_R, s 1_S) = (r, s)(1_R, 1_S)$$

joten $(1_R, 1_S)$ on kertolaskun neutraali-alkio.

Tarkastamme vielä distributiivisuuden molemmilta puolilta:

$$\begin{aligned}(r_1, s_1)((r_2, s_2) + (r_3, s_3)) &= (r_1, s_1)(r_2 + r_3, s_2 + s_3) = (r_1(r_2 + r_3), s_1(s_2 + s_3)) \\ &= (r_1r_2 + r_1r_3, s_1s_2 + s_1s_3) = (r_1r_2, s_1s_2) + (r_1r_3, s_1s_3) \\ &= (r_1, s_1)(r_2, s_2) + (r_1, s_1)(r_3, s_3)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}((r_2, s_2) + (r_3, s_3))(r_1, s_1) &= (r_2 + r_3, s_2 + s_3)(r_1, s_1) = ((r_2 + r_3)r_1, (s_2 + s_3)s_1) \\ &= (r_2r_1 + r_3r_1, s_2s_1 + s_3s_1) = (r_2r_1, s_2s_1) + (r_3r_1, s_3s_1) \\ &= (r_2, s_2)(r_1, s_1) + (r_3, s_3)(r_1, s_1).\end{aligned}$$

Siis $R \times S$ on rengas.

3. Todista Propositio 3.16.

Ratkaisu. Olkoon R rengas ja olkoon $S \subset R$ alirengas. Tällöin S on laskutoimituksella varustettujen joukkojen $(S, +)$ ja $(S, \cdot)$ vakaa osajoukko. Siis (1) pätee. Koska jokaisella $s \in (S, +)$ on vasta-alkio, erityisesti tämä pätee alkiolle $1_R = 1_S \in S$. On siis alkio $x \in S \subset R$, jolle pätee $x + 1_R = 0_S = 0_R$. Vasta-alkion yksikäsitteisyyden nojalla $x = -1_R$. Siis ehto (2) pätee.

Oletetaan, että $S \subset R$ on osajoukko, jolle pätee ehdot (1) ja (2). Ehdon (1) nojalla S on laskutoimituksella varustettujen joukkojen $(S, +)$ ja $(S, \cdot)$ vakaa osajoukko. Siis $+$ ja $\cdot$ indusoivat laskutoimitukset joukkoon S . Molemmat laskutoimitukset ovat assosiatiivisia, koska ne ovat assosiatiivisia renkaassa R , jonka osajoukko S on. Samasta syystä $+$ on kommutatiivinen ja $\cdot$ on distributiivinen yhteenlaskun suhteen.

Oletusten (1) ja (2) ja Proposition 3.10(2) nojalla $1_R = (-1_R)(-1_R) \in R$. Siis laskutoimituksella varustetussa joukossa $(S, \cdot)$ on neutraalialkio. Lisäksi $0_R = 1_R - 1_R \in S$.

Olkoon $s \in S$. Oletusten (1) ja (2) nojalla $(-1_R)s \in S$ ja pätee $s + (-1_R)s = 0_R = 0_S$, joten alkiolla $s \in (S, +)$ on vasta-alkio $-s = (-1_R)s \in S$. Koska huomasimme jo, että $0_R \in S$, niin $(S, +)$ on kommutatiivinen ryhmä. Siis S on rengas, jolle pätee $1_S = 1_R$.

4. Osoita, että Esimerkin 3.17 rengas C on isomorfinen kompleksilukujen renkaan $\mathbb{C}$ kanssa. Mikä renkaan C kuvaus vastaa kompleksikonjugointia?

Ratkaisu. Olkoon $f: \mathbb{C} \rightarrow C$,

$$f(z) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & \operatorname{Im} z \\ -\operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}f(z+w) &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z+w) & \operatorname{Im}(z+w) \\ -\operatorname{Im}(z+w) & \operatorname{Re}(z+w) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & \operatorname{Im} z \\ -\operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{Re} w & \operatorname{Im} w \\ -\operatorname{Im} w & \operatorname{Re} w \end{pmatrix} = f(z) + f(w)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}f(zw) &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(zw) & \operatorname{Im}(zw) \\ -\operatorname{Im}(zw) & \operatorname{Re}(zw) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z \operatorname{Re} w - \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w & \operatorname{Re} z \operatorname{Im} w + \operatorname{Im} z \operatorname{Re} w \\ -(\operatorname{Re} z \operatorname{Im} w + \operatorname{Im} z \operatorname{Re} w) & \operatorname{Re} z \operatorname{Re} w - \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & \operatorname{Im} z \\ -\operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} w & \operatorname{Im} w \\ -\operatorname{Im} w & \operatorname{Re} w \end{pmatrix} = f(z)f(w).\end{aligned}$$

Lisäksi $f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_C$, joten f on rengashomomorfismi.

Homomorfismin f ydin on $\{0_C\}$, joten f on injektio. Se on surjektio, koska

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = f(x + iy)$$

kaikille $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \in C$.

Lasku osoittaa, että

$$f(\bar{z}) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & -\operatorname{Im} z \\ \operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix} = {}^T f(z).$$

Siis transpoosin muodostaminen vastaa kompleksikonjugointia.

5. Todista Propositio 3.27(2).

Ratkaisu. Olkoot $x, y \in \phi^{-1}(S')$. Tällöin $\phi(x), \phi(y) \in S'$. Siis

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) \in S' \quad \text{ja} \quad \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \in S',$$

koska ϕ on rengasisomorfismi ja S' on renkaan R' alirengas. Siis $x + y, xy \in \phi^{-1}(S')$.

Lemman 3.19 nojalla $\phi(-1_R) = -1_{R'}$. Koska S' on renkaan R' alirengas, pätee $-1_{R'} \in S'$. Siis $-1_R \in \phi^{-1}(S')$. Alirengastestin¹ nojalla $\phi^{-1}(S')$ on renkaan S alirengas.

6. Olkoot $m, n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Osoita, että kuvaus $\Phi: \mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$,

$$\Phi(k) = (k + m\mathbb{Z}, k + n\mathbb{Z}),$$

on rengashomomorfismi.

Ratkaisu. Olkoot $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Tällöin

$$\begin{aligned} \Phi(k + \ell) &= ((k + \ell) + m\mathbb{Z}, (k + \ell) + n\mathbb{Z}) = ((k + m\mathbb{Z}) + (\ell + m\mathbb{Z}), (k + n\mathbb{Z}) + (\ell + n\mathbb{Z})) \\ &= (k + m\mathbb{Z}, k + n\mathbb{Z}) + (\ell + m\mathbb{Z}, \ell + n\mathbb{Z}) = \Phi(k) + \Phi(\ell), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(k\ell) &= (k\ell + m\mathbb{Z}, k\ell + n\mathbb{Z}) = ((k + m\mathbb{Z})(\ell + m\mathbb{Z}), (k + n\mathbb{Z})(\ell + n\mathbb{Z})) \\ &= (k + m\mathbb{Z}, k + n\mathbb{Z})(\ell + m\mathbb{Z}, \ell + n\mathbb{Z}) = \Phi(k)\Phi(\ell) \end{aligned}$$

ja $\Phi(1) = (1 + m\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z})$ on tulorenkaan neutraalialkio. Siis Φ on rengasisomorfismi.

7. Osoita, että renkaalla $\mathbb{Z}$ ei ole muita alirenkaita kuin $\mathbb{Z}$.

Ratkaisu. Olkoon S renkaan $\mathbb{Z}$ alirengas. Määritelmän mukaan $1 \in S$, Lemman 3.15 nojalla $0 \in S$ ja esimerkiksi alirengastestin nojalla $-1 \in S$. Alirenkaana S on vakaa yhteenlaskun suhteen, joten kaikki lukujen 1 ja -1 monikerrat kuuluvat alirenkaaseen S . Siis $\mathbb{Z} \subset S$, joten $S = \mathbb{Z}$.

8. Olkoon $q \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Osoita, että ei ole rengashomomorfismia jäännösluokkarenkaalta $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ renkaaseen $\mathbb{Z}$.

¹Propositio 3.16

Ratkaisu. Jos olisi rengashomomorfismi $\phi: \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, niin Proposition 3.27(1) nojalla $\phi(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ olisi renkaan $\mathbb{Z}$ alirengas. Tehtävän 7 nojalla siis $\phi(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ mutta tämä on mahdotonta, koska $\phi(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ on äärellinen joukko.

Ratkaisu (Toinen tapa). Oletetaan, että $\phi: \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ on rengashomomorfismi. Tällöin $\phi(1 + q\mathbb{Z}) = 1$ ja Lemman 3.19 nojalla $\phi(0 + q\mathbb{Z}) = 0$. Siis

$$\begin{aligned} 0 = \phi(0 + q\mathbb{Z}) &= \phi(q(1 + q\mathbb{Z})) = \phi((1 + q\mathbb{Z}) + (1 + q\mathbb{Z}) + \cdots + (1 + q\mathbb{Z})) \\ &= \phi(1 + q\mathbb{Z}) + \phi(1 + q\mathbb{Z}) + \cdots + \phi(1 + q\mathbb{Z}) = 1 + 1 + \cdots + 1 = q, \end{aligned}$$

mikä on ristiriita.