

Renkaat ja kunnat 2026

Harjoitus 2: ratkaisuja

1. Olkoon $f: (A, *) \rightarrow (C, \otimes)$ homomorfismi. Osoita:

(a) Jos $B \subset A$ on vakaa, niin $f(B) \subset C$ on vakaa.

(b) Jos $B \subset C$ on vakaa ja $f^{-1}(B)$ ei ole tyhjä joukko, niin $f^{-1}(B) \subset A$ on vakaa.

Ratkaisu. (a) Olkoot $c_1, c_2 \in f(B)$. Tällöin on $b_1, b_2 \in B$, joille $f(b_1) = c_1$ ja $f(b_2) = c_2$. Koska B on vakaa, pätee $b_1 * b_2 \in B$. Siis $f(b_1) \otimes f(b_2) = f(b_1 * b_2) \in f(B)$, koska f on homomorfismi.

(b) Olkoot $a_1, a_2 \in f^{-1}(B)$. Tällöin $f(a_1), f(a_2) \in B$. Koska f on homomorfismi ja B on vakaa, pätee $f(a_1 * a_2) = f(a_1) \otimes f(a_2) \in B$. Siis $a_1 * a_2 \in f^{-1}(B)$, joten $f^{-1}(B)$ on vakaa.

2. Todista Lemma 1.21(1): Kompleksilukujen yhteen- ja kertolasku ovat assosiatiivisia ja kommutatiivisia. Yhteenlaskun neutraalialkio on $0 = (0, 0)$ ja kertolaskun neutraalialkio on $1 = (1, 0)$. Kertolasku on distributiivinen yhteenlaskun suhteen

Ratkaisu. Kompleksilukujen yhteenlasku on sama kuin tason $\mathbb{R}^2$ vektoreiden komponentittainen yhteenlasku. Sen assosiatiivisuus ja kommutatiivisuus nähdään helposti: Olkoot $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{C}$. Tällöin määritelmän, reaalityyppisten yhteenlaskun assosiatiivisuuden ja määritelmän nojalla

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) \\ &= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) \\ &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)), \end{aligned}$$

joten yhteen lasku on assosiatiivinen. Se on myös kommutatiivinen, sillä

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1).$$

Selvästi $0 = (0, 0) \in \mathbb{C}$ on yhteenlaskun neutraalialkio ja $(x, y) + (-x, -y) = 0$ kaikille $(x, y) \in \mathbb{C}$.

Laskemalla

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1)(x_2, y_2))(x_3, y_3) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)(x_3, y_3) \\ &= (x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3, x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} (x_1, y_1)((x_2, y_2)(x_3, y_3)) &= (x_1, y_1)(x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + y_2x_3) \\ &= (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3 - y_1y_2x_3, x_1x_2y_3 + x_1y_2y_3 + y_1x_2x_3 - y_1y_2y_3) \end{aligned}$$

havaitsemme, että kertolasku on assosiatiivinen. Lisäksi

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) = ((x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1 + y_2x_1) = (x_2, y_2)(x_1, y_1),$$

joten kertolasku on kommutatiivinen ja

$$(1, 0)(x, y) = (1 \cdot x - 0 \cdot y, 1 \cdot y + 0 \cdot x) = (x, y),$$

joten $(1, 0)$ on kertolaskun neutraalialkio.

Osoitimme, että kertolasku on kommutatiivinen, joten distributiivisuus riittää tarkastaa toiselta puolelta:

$$\begin{aligned}
 (x_1, y_1)((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) &= (x_1, y_1)(x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\
 &= (x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3), x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)) \\
 &= ((x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3), (x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1y_3 + y_1x_3)) \\
 &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3) \\
 &= (x_1, y_1)(x_2, y_2) + (x_1, y_1)(x_3, y_3).
 \end{aligned}$$

3. Todista Lemma 1.21(2): Olkoot $z, w \in \mathbb{C}$. Tällöin $zw = 0$, jos ja vain jos $z = 0$ tai $w = 0$.

Ratkaisu. Kertolaskun määritelmän nojalla $(0, 0)(x, y) = (0, 0) = (x, y)(0, 0)$.

Olkoot $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}$. Tällöin $zw = (ac - bd) + i(ad + bc) = 0$, jos ja vain jos

$$\begin{cases} ac - bd = 0 \\ ad + bc = 0 \end{cases}. \quad (1)$$

Kerrotaan ensimmäinen yhtälö luvulla c ja toinen luvulla d . Laskemalla näin saatavat yhtälöt yhteen saadaan $a(c^2 + d^2) = 0$. Jos $c^2 + d^2 = 0$, niin $w = c + id = 0$. Muutoin täytyy olla $a = 0$. Tällöin yhtälöpari (1) on

$$\begin{cases} bd = 0 \\ bc = 0 \end{cases}. \quad (2)$$

Siis $b = 0$ tai $c = d = 0$. Jos $b = 0$, niin $z = a + ib = 0$. Muuten yhtälöparin (2) molemmat yhtälöt voidaan jakaa luvulla b ja saadaan $c = 0 = d$. Tällöin $w = c + id = 0$.

4. Osoita, että kokonaislukujen kertolasku on yhteensopiva kongruenssin kanssa.

Ratkaisu. Olkoon $q \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Olkoot $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$ siten, että $a \equiv a' \pmod{q}$ ja $b \equiv b' \pmod{q}$. Tällöin $a' = a + kq$ jollain $k \in \mathbb{Z}$ ja $b' = b + nq$ jollain $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin

$$a'b' - ab = a'b' - a'b + a'b - ab = a'(b' - b) + (a' - a)b = a'nq + kqb = (a'n + kb)q,$$

joten $a'b' \equiv ab \pmod{q}$.

5. Muodosta yhteen- ja kertolaskun laskutaulut kongruenssiluokilla modulo 2 ja modulo 6.

Ratkaisu. Renkaan $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ laskutaulut ovat

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

ja renkaan $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ laskutaulut ovat

+	0	1	2	3	4	5	·	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5	0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	5	0	1	0	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	0	1	2	0	2	4	0	2	4
3	3	4	5	0	1	2	3	0	3	0	3	0	3
4	4	5	0	1	2	3	4	0	4	2	0	4	2
5	4	0	1	2	3	4	5	0	5	4	3	2	1

6. Olkoon R rengas. Osoita, että

$$(1) \quad x(-y) = (-x)y = -(xy) \text{ kaikilla } x, y \in R,$$

$$(2) \quad x(y - z) = xy - xz \text{ ja } (y - z)x = yx - zx \text{ kaikilla } x, y, z \in R.$$

Ratkaisu. (1) Olkoot $x, y \in R$. Distributiivisuuden ja Proposition 3.10(1) nojalla

$$xy + x(-y) = x(y - y) = x0 = 0.$$

Koska yhteenlasku on kommutatiivinen, tästä seuraa $x(-y) = -(xy)$. Samalla tavalla nähdään, että

$$xy + (-x)y = (x - x)y = 0y = 0,$$

joten $(-x)y = -(xy)$.

(2) Olkoot $x, y, z \in R$. Distributiivisuuden ja kohdan (1) nojalla

$$x(y - z) = xy + x(-z) = xy - xz$$

ja

$$(y - z)x = yx + (-z)x = yx - zx.$$

7. Todista Propositio 3.12(2).

Ratkaisu. Jos $r \in R$ on alkio, jolle pätee $r0 = 1$, niin Proposition 3.10(1) nojalla

$$0 = r0 = 1.$$

Tämä on mahdotonta Proposition 3.12(1) nojalla.

8. Olkoon $(R, \oplus, \cdot)$ kahdella laskutoimituksella varustettu joukko siten, että $\oplus$ ja $\cdot$ ovat assosiatiivisia ja

$$(1) \quad (R, \oplus) \text{ on ryhmä,}$$

$$(2) \quad \text{kertolasku on distributiivinen yhteenlaskun suhteen ja}$$

$$(3) \quad \text{kertolaskulla on neutraalialkio } 1 = 1_R \in R.$$

Osoita, että $(R, \oplus, \cdot)$ on rengas.

Ratkaisu. Olkoot $x, y \in R$. Tällöin distributiivisuuden ja assosiatiivisuuden nojalla¹

$$(1 \oplus 1)(x \oplus y) = (1 \oplus 1)x \oplus (1 \oplus 1)y = (1x \oplus 1x) \oplus (1y \oplus 1y) = x \oplus ((x \oplus y) \oplus y)$$

¹Assosiatiivisuuden nojalla $(a + b) + (c + d) = a + (b + (c + d)) = a + ((b + c) + d)$

ja toisaalta

$$(1 \oplus 1)(x \oplus y) = 1(x \oplus y) \oplus 1(x \oplus y) = x \oplus ((y \oplus x) \oplus y).$$

Yhtälöstä

$$x \oplus ((x \oplus y) \oplus y) = x \oplus ((y \oplus x) \oplus y)$$

saadaan käyttämällä kahdesti supistussääntöä $x \oplus y = y \oplus x$. Siis yhteenlasku on kommutatiivinen, joten R on rengas.