

Renkaat ja kunnat 2026

Harjoitus 1: ratkaisuja

1. Olkoon

$$\Gamma = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det A = 1\}.$$

Osoita, että matriisien kertolasku indusoi laskutoimituksen joukossa Γ . Miten matriisien yhteenlasku käyttäytyy?

Ratkaisu. Olkoot $A, B \in \Gamma$. Lineaarialgebrasta muistamme, että

$$\det(AB) = \det A \det B = 1 \cdot 1 = 1,$$

joten $AB \in \Gamma$. Siis Γ on vakaa, joten kertolasku indusoi siihen laskutoimituksen.

Toisaalta $I_2 \in \Gamma$, mutta $\det(I_2 + I_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 \neq 1$, joten Γ ei ole vakaa yhteenlaskun suhteen.

2. Olkoot $f: (A, *) \rightarrow (B, \otimes)$ ja $g: (B, \otimes) \rightarrow (C, \cdot)$ laskutoimituksella varustettujen joukkojen homomorfismeja. Osoita, että $g \circ f$ on homomorfismi.

Ratkaisu. Olkoot $a_1, a_2 \in A$. Tällöin yhdistetyn kuvauksen määritelmän, kuvauksen f homomorfisuuden, kuvauksen g homomorfisuuden ja yhdistetyn kuvauksen määritelmän nojalla

$$g \circ f(a_1 * a_2) = g(f(a_1 * a_2)) = g(f(a_1) \otimes f(a_2)) = g(f(a_1)) \cdot g(f(a_2)) = g \circ f(a_1) \cdot g \circ f(a_2).$$

Siis $g \circ f$ on homomorfismi.

3. Ovatko laskutoimituksella varustetut joukot $(\mathcal{P}(\{0, 1\}), \cap)$ ja $(\mathcal{P}(\{0, 1\}), \cup)$ isomorfisia?

Ratkaisu. Olkoon $F: (\mathcal{P}(\{0, 1\}), \cap) \rightarrow (\mathcal{P}(\{0, 1\}), \cup)$, $F(A) = \{0, 1\} - A$. Kuvaus F on bijektio, koska $A = B$, jos ja vain jos $\{0, 1\} - A = \{0, 1\} - B$. De Morganin lain nojalla

$$F(A \cap B) = \{0, 1\} - (A \cap B) = (\{0, 1\} - A) \cup (\{0, 1\} - B) = F(A) \cup F(B).$$

joten F on homomorfismi. Siis F on isomorfismi.

Saman voi havaita järjestelemällä luentojen Esimerkin 1.4 oikeanpuoleisen laskutaulun alkiot samaan järjestykseen, jossa niiden alkukuvat ovat vasemmanpuoleisessa laskutaulussa:

$\cap$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0, 1\}$		$\cup$	$\{0, 1\}$	$\{1\}$	$\{0\}$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	ja	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$
$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$		$\{1\}$	$\{0, 1\}$	$\{1\}$	$\{0, 1\}$	$\{1\}$
$\{1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{1\}$		$\{0\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{0, 1\}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0, 1\}$		$\emptyset$	$\{0, 1\}$	$\{1\}$	$\{0\}$	$\emptyset$

Huomaamme, että laskutoimituksien tulokset oikeanpuoleisessa taulukossa ovat vastavalla paikalla vasemmanpuoleisessa taulukossa olevien alkuiden kuvat.

4. Olkoon X joukko, jossa on ainakin 2 alkia. Onko joukon $\mathcal{P}(X)$ laskutoimitus $-$ assosiatiivinen?

Ratkaisu. Olkoot $a, b \in X$, $a \neq b$. Tällöin

$$(\{a\} - \{b\}) - \{a\} = \{a\} - \{a\} = \emptyset \neq \{a\} = \{a\} - \{b\} = \{a\} - (\{b\} - \{a\}),$$

joten laskutoimitus ei ole assosiatiivinen.

5. Olkoon $*$ kahden alkion joukon $X = \{a, b\}$ laskutoimitus, jonka laskutaulu on

$$\begin{array}{c|cc} * & a & b \\ \hline a & b & b \\ b & a & a \end{array}.$$

Onko laskutoimitus $*$ kommutatiivinen? Onko se assosiatiivinen?

Ratkaisu. Laskutaulusta näemme, että $a * b = b \neq a = b * a$, joten laskutoimitus ei ole kommutatiivinen. Lisäksi $a * (a * a) = a * b = b \neq a = b * a = (a * a) * a$, joten laskutoimitus ei ole myöskään assosiatiivinen.

6. Todista Propositio 1.9(2): Olkoon $h: (E, *) \rightarrow (E', \otimes)$ surjektiivinen homomorfismi. Jos $*$ on assosiatiivinen, niin $\otimes$ on assosiatiivinen.

Ratkaisu. Olkoot $a', b', c' \in E'$. Koska f on surjektio, on $a, b, c \in E$, joille $f(a) = a'$, $f(b) = b'$ ja $f(c) = c'$. Käyttämällä kahdesti kuvauksen f homomorfisuutta, sitten laskutoimituksen $*$ assosiatiivisuutta ja taas kahdesti kuvauksen f homomorfisuutta saamme yhtälöketjun

$$\begin{aligned} (a' \otimes b') \otimes c' &= (f(a) \otimes f(b)) \otimes f(c) = f(a * b) \otimes f(c) = f((a * b) * c) = f(a * (b * c)) \\ &= f(a) \otimes f(b * c) = f(a) \otimes (f(b) \otimes f(c)) = a' \otimes (b' \otimes c'). \end{aligned}$$

Siis laskutoimitus $\otimes$ on assosiatiivinen.

7. Olkoon $*$ positiivisten reaalilukujen joukon $\mathbb{R}_+$ laskutoimitus, joka määritellään asettamalla

$$a * b = \sqrt{ab}.$$

Onko laskutoimitus $*$ assosiatiivinen? Onko laskutoimituksella $*$ neutraalialkio?

Ratkaisu. Laskutoimitus $*$ ei ole assosiatiivinen: Esimerkiksi

$$(1 * 1) * 16 = \sqrt{\sqrt{1} \cdot 1 \cdot 16} = 4 \neq 2 = \sqrt{1 \sqrt{1} \cdot 16} = 1 * (1 * 16).$$

Laskutoimituksella $*$ ei ole neutraalialkioita: Jos $n \in \mathbb{R}$ on neutraalialkio ja $a \in \mathbb{R}_+$, niin $a = n * a = \sqrt{na}$, joten $n = \sqrt{a}$, mutta tämä ei voi päteä kaikille $a \in \mathbb{R}_+$.

8. Todista Propositio 1.18: Olkoon $X \neq \emptyset$ ja olkoon $*$ joukon X assosiatiivinen laskutoimitus. Jos alkioilla $g \in X$ on käänteisalkio, se on yksikäsitteinen.

Ratkaisu. Olkoon $g \in (X, *)$ alkio, jolla on käänteisalkio. Tällöin laskutoimituksella $*$ on neutraalialkio $e \in (X, *)$. Jos $a, a' \in X$ ovat alkion g käänteisalkioita, niin $a * g = e = g * a'$. Tällöin assosiatiivisuuden nojalla

$$a = a * e = a * (g * a') = (a * g) * a' = e * a' = a'.$$