Ryhmät 2026

Harjoitus 7: ratkaisuja

1. Osoita, että $\mathbb{C}^\times/\{-1,1\} \cong \mathbb{C}^\times$.

Ratkaisu. Kuvaus $\phi\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$, $\phi(z) = z^2$, on homomorfismi, koska kompleksilukujen kertolaskun kommutatiivisuutta käyttämällä saadaan

$$\phi(zw) = (zw)^2 = z^2w^2 = \phi(z)\phi(w)\,.$$

Jokainen $z \in \mathbb{C}^\times$ voidaan esittää napakoordinaattien avulla muodossa $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Trigonometristen funktioiden kaksinkertaisen kulman kaavojen avulla saamme[1]

$$\phi\big(\sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\big) = \sqrt{r}^{\,2}\Big(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} + i\,2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\Big) = r(\cos\theta + i\sin\theta) = z\,.$$

Siis ϕ on surjektiivinen. Väite seuraa ensimmäisestä isomorfismilauseesta.

2. Olkoot $q, r \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ lukuja, joiden suurin yhteinen tekijä on 1. Osoita, että

$$\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/qr\mathbb{Z}\,.$$

Ratkaisu. Kuvaus $\Phi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$,

$$\Phi(k) = (k + q\mathbb{Z}, k + r\mathbb{Z})\,,$$

on homomorfismi, koska sen kumpikin komponenttikuvaus on kongruenssin tekijäkuvaus. Jos $a \in \ker\Phi$, niin $a + q\mathbb{Z} = 0 + q\mathbb{Z}$ ja $a + r\mathbb{Z} = 0 + r\mathbb{Z}$, joten $q \mid a$ ja $r \mid a$. Proposition A.4 nojalla $qr \mid a$, joten $a \in qr\mathbb{Z}$. Siis $\ker\Phi \leqslant qr\mathbb{Z}$. Toisaalta

$$\Phi(nqr) = (qnr + q\mathbb{Z}, rqn + r\mathbb{Z}) = (0 + q\mathbb{Z}, 0 + r\mathbb{Z})\,,$$

joten $qr\mathbb{Z} \leqslant \ker\Phi$. Siis $\ker\Phi = qr\mathbb{Z}$.

Ensimmäisen isomorfismilauseen nojalla

$$\mathbb{Z}/qr\mathbb{Z} \cong \Phi(\mathbb{Z}) \leqslant q\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}\,.$$

Koska $\#\mathbb{Z}/qr\mathbb{Z} = qr = \#(q\mathbb{Z}\times r\mathbb{Z})$, päättelemme, että Φ on bijektio, siis se on isomorfismi.

3. Todista Propositio 12.22.

Ratkaisu. Huomataan ensin, että $NT = TN$: Olkoon $nt \in NT$. Koska $N \trianglelefteq G$ ja $T \leqslant G$, pätee $Nt = tN$. Siis on $n' \in N$, jolle $nt = tn' \in TN$, mistä saadaan $NT \subset TN$. Vastaavasti on $n'' \in N$, jolle $tn = n't \in NT$, joten $TN \subset NT$.

Osoitetaan, että NT on ryhmä. Ryhmän G neutraalialkio e on molempien ryhmien N ja T (neutraali)alkio, joten $e \in NT$. Olkoot $n_1, n_2 \in N$ ja $t_1, t_2 \in T$. Koska $N \triangleleft G$ ja $T \leqslant G$, pätee $t_1N = Nt_1$. Erityisesti on $n_3 \in N$ siten, että $t_1n_2 = n_3t_1$.[2] Siis

$$n_1t_1n_2t_2 = n_1n_3t_1t_2 \in NT\,.$$

[1]Muista Harjoitustehtävä 9.12 / Harjoitukset 3.

[2]Alkioksi n_3 voidaan ottaa $t_1n_2t_1^{-1}$, sillä $t_1n_2 = t_1n_2t_1^{-1}t_1$ ja koska N on normaali, pätee $t_1n_2t_1^{-1} \in N$.

Samoin, koska N on normaali on $n_4 \in N$, jolle $t_1^{-1}n_1^{-1} = n_4 t^{-1}$, joten

$$(n_1 t_1)^{-1} = t_1^{-1}n_1^{-1} = n_4 t_1^{-1} \in NT\,.$$

Aliryhmätestin nojalla $NT \leqslant G$.

Proposition 9.12 nojalla

$$N \cup T \subset NT = \{nt : n \in N,\ t \in T\} \subset \langle N \cup T\rangle\,.$$

Määritelmästä seuraa,[3] että $\langle N \cup T\rangle$ on pienin ryhmän G aliryhmä, joka sisältää joukon $N \cup T$. Siis $NT \supset \langle N \cup T\rangle$, joten $NT = \langle N \cup T\rangle$.

4. Osoita, että A_5 on yksinkertainen ryhmä.

Ratkaisu. Olkoon $N \lhd A_5$, $\#N \geqslant 2$. Harjoitustehtävän 12.4 nojalla riittää osoittaa, että aliryhmässä N on 3-sykli.

Harjoitustehtävän 10.14 nojalla aliryhmässä N on 3-sykli, 5-sykli tai kahden erillisen syklin tulo. Jos $(abcde) \in H$, niin Harjoitustehtävän 10.15 kohtien (2) ja (3) nojalla

$$N \ni (acb)(abcde)(abc) = (abdec)$$

ja siten

$$N \ni (abcde)(abdec) = (abcde)(acedb) = (adc)\,.$$

Jos $(ab)(cd) \in N$, niin Harjoitustehtävän 10.15 kohtien (4) ja (5) nojalla

$$N \ni (aeb)(ab)(cd)(abe) = (ae)(cd)$$

ja siten $N \ni (ab)(cd)(ae)(cd) = (aeb)$.

5. Olkoon $n \geqslant 3$ luonnollinen luku. Osoita, että $D_n \leqslant \mathrm{O}(2)$.

Ratkaisu. Määritelmän mukaan

$$D_n = \{A \in \mathrm{O}(2) : AP_n = P_n\}\,.$$

Selvästi $I_2 \in D_n$, joten $D_n \neq \varnothing$. Jos $A, B \in D_n$, niin

$$(AB)(P_n) = A(BP_n) = AP_n = P_n\,,$$

joten $AB \in D_n$. Lisäksi $AP_n = P_n$, jos ja vain jos $A^{-1}P_n = P_n$, koska matriisia A vastaava ortogonaalinen lineaarikuvaus on bijektio. Siis $A^{-1} \in D_n$. Aliryhmätestin nojalla $D_n \leqslant \mathrm{O}\,n$.

6. Osoita, että $D_6 \cong S_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Ratkaisu. Geometriasta näkee, että $D_3 < D_6$. Kertalukujen perusteella näemme, että $[D_6 : D_3] = 2$, joten Proposition 12.3 nojalla $D_3 \lhd D_6$.

Olkoon $H = \langle -\mathrm{id}\rangle < D_6$. Proposition 12.22 nojalla $D_3 H \leqslant D_6$. Koska $-\mathrm{id} \in D_6 - D_3$, Lagrangen lauseen nojalla pätee $D_6 = D_3 H$. Lisäksi $-\mathrm{id} \in Z(\mathrm{O}(2))$, joten D_6 on aliryhmiensä D_3 ja H sisäinen suora tulo. Proposition 9.35, Esimerkin 13.8 ja Proposition 8.19 nojalla

$$D_6 = D_3 \times H \cong S_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\,.$$

[3] Katso luku 9.3

Olkoon $A \in \mathrm{O}(n)$ ja olkoon $b \in \mathbb{R}^n$. Olkoon $E_{A,b}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$E_{A,b}(x) = Ax + b$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Joukko

$$\mathrm{E}(n) = \{E_{A,b} : A \in \mathrm{O}(n),\ b \in \mathbb{R}^n\}$$

varustettuna kuvausten yhdistämisellä on n-ulotteisen avaruuden *Eukleideen ryhmä*. Eukleideen ryhmän aliryhmä

$$\mathrm{T}(n) = \{E_{I_n,b} \in \mathrm{E}(n) : b \in \mathbb{R}^n\}$$

on n-ulotteisen avaruuden *siirtojen ryhmä*.

7. Osoita, että $\mathrm{E}(n)$ on ryhmä.

Ratkaisu. Ortogonaalimatriiseja vastaavat lineaarikuvaukset ovat bijektioita ja siirrot ovat bijektioita. Eukleideen ryhmän alkiot ovat siis bijektioiden yhdistettyinä kuvauksina bijektioita, joten $\mathrm{E}(n) \subset \mathrm{Perm}(\mathbb{R}^n)$. Tämän seikan voi tarkastaa myös laskemalla: Olkoot $A \in \mathrm{O}(n)$ ja $b \in \mathbb{R}^n$. Olkoon $y \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$E_{A,b}(A^{-1}(y-b)) = A(A^{-1}(y-b)) + b = y\,.$$

Siis $E_{A,b}$ on surjektio. Oletetaan sitten, että $E_{A,b}(x) = E_{A,b}(y)$ joillain $x, y \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$Ax + b = Ay + b\,,$$

joten $A(x-y) = 0$. Koska $A \in \mathrm{O}(n)$ on kääntyvä, saadaan $x - y = 0$. Siis $E_{A,b}$ on injektio.

Osoitetaan sitten, että $\mathrm{E}(n) \leqslant \mathrm{Perm}(\mathbb{R}^n)$. Määritelmänsä nojalla $\mathrm{E}(n)$ ei ole tyhjä, sillä esimerkiksi $\mathrm{id} = E_{I_n,0} \in \mathrm{E}(n)$. Olkoot sitten $E_{A,a}, E_{B,b} \in \mathrm{E}(n)$. Tällöin

$$E_{A,a} \circ E_{B,b}(x) = A(Bx + b) + a = ABx + Ab + a = E_{AB,Ab+a}(x)$$

kaikille $x \in \mathbb{R}^n$, joten

$$E_{A,a} \circ E_{B,b} = E_{AB,Ab+a} \in \mathrm{E}(n)\,. \tag{1}$$

Yhtälön (1) avulla huomataan, että

$$E_{A,b} \circ E_{A^{-1},-A^{-1}b} = E_{I_n,0} = \mathrm{id}\,.$$

Proposition 8.4(3) nojalla

$$E_{A,b}^{-1} = E_{A^{-1},A^{-1}b} \in \mathrm{E}(n)\,. \tag{2}$$

Aliryhmätestin nojalla $\mathrm{E}(n) \leqslant \mathrm{Perm}(\mathbb{R}^n)$.

8. Osoita, että $\mathrm{T}(n) \lhd \mathrm{E}(n)$ ja että $\mathrm{E}(n)/\mathrm{T}(n) \cong \mathrm{O}(n)$ ja että $\mathrm{E}(n) = \mathrm{T}(n) \rtimes \mathrm{O}(n)$.

Ratkaisu. Olkoon $P_0\colon \mathrm{E}(n) \to \mathrm{O}(n)$, $P_0(E_{A,b}) = A$. Yhtälön (1) nojalla P_0 on homomorfismi. Jokaiselle $A \in \mathrm{O}(n)$ pätee $P_0(E_{A,0}) = A$, joten P_0 on surjektio. Lisäksi

$$\ker P_0 = \{F \in \mathrm{E}(n) : P_0(F) = I_n\} = \{E_{I_n,b} : b \in b\} = \mathrm{T}(n)\,,$$

joten ryhmien isomorfismilauseen nojalla $\mathrm{E}(n)/\mathrm{T}(n) \cong \mathrm{O}(n)$.

Kuvaus $\phi\colon\ \mathrm{O}(n) \to \mathrm{E}(n)$, $\phi(A) = E_{A,0}$ on homomorfismi yhtälön (1) nojalla. Se on määritelmänsä nojalla injektio, joten ryhmät $\mathrm{O}(n)$ ja $\underline{\mathrm{O}}(n) = \phi(\mathrm{O}(n))$ ovat isomorfisia.

Osoitetaan, että $\mathrm{E}(n)$ on aliryhmiensä $\mathrm{T}(n)$ ja $\underline{\mathrm{O}}(n)$ sisäinen puolisuora tulo. Olkoon $E_{A,b} \in \mathrm{E}(n)$. Tällöin $E_{A,b} = T_b \circ E_{A,0}$, joten $\mathrm{E}(n) = \mathrm{T}(n)\underline{\mathrm{O}}(n)$ Jos $E_{A,b} \in \underline{\mathrm{O}}(n) \cap \mathrm{T}(n)$, niin $b = 0$ ja $A = I_n$, joten $E_{A,b}$ on identtinen kuvaus. Siis $\mathrm{E}(n) = \mathrm{T}(n) \rtimes \underline{\mathrm{O}}(n)$ sisäisenä puolisuorana tulona, joten $\mathrm{E}(n) = \mathrm{T}(n) \rtimes \mathrm{O}(n)$ abstraktina puolisuorana tulona.

Huomaa: Aliryhmän $\mathrm{T}(n)$ normaaliuden voi tarkastaa ilman homomorfismin P_0 käyttöäkin, mutta tällöin ei päästä suoraan kiinni tekijäryhmään: Yhtälöistä (1) ja (2) seuraa, että $\mathrm{T}(n) \leqslant \mathrm{E}(n)$. Tämä on helppo tarkastaa suoraankin.

Olkoot $A \in \mathrm{O}(n)$ ja $T_b \in \mathrm{T}(n)$. Tällöin kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$A \circ T_b \circ A^{-1}(x) = A(A^{-1}(x) + b) = x + Ab = T_{Ab}(x)\,,$$

joten $A \circ T_b \circ A^{-1} = T_{Ab} \in \mathrm{T}(n)$. Siis $\mathrm{T}(n) \lhd \mathrm{E}(n)$.