Ryhmät 2026

Harjoitus 6: ratkaisuja

1. Todista Propositio 9.35

Ratkaisu. Kuvaus $\phi\colon H \times J \to HJ$, $\phi(h,j) = hj$, on homomorfismi: Jos $(h_1, j_1), (h_2, j_2) \in H \times J$, niin oletuksen mukaan $h_2 j_1 = j_1 h_2$, joten

$$\phi((h_1,j_1)(h_2,j_2)) = \phi(h_1h_2, j_1j_2) = h_1h_2j_1j_2 = (h_1j_1)(h_2j_2) = \phi(h_1,j_1)\phi(h_2,j_2)\,.$$

Kuvaus ϕ on selvästi surjektio. Osoitetaan vielä, että se on injektio: Jos $(h,j) \in \ker\phi$, niin $hj = e \in G$. Siis $h = j^{-1}$. Tällöin $h \in H \cap J = \{e\}$, joten $h = e$ ja $j = h^{-1} = e$. Siis $\ker\phi = \{(e,e)\}$. Proposition 9.20 nojalla ϕ on isomorfismi.

2. Minkä kurssilla käsitellyn ryhmän kanssa ryhmä $(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times$ on isomorfinen?

Ratkaisu. Koska

$$\{a \in \mathbb{Z} : 0 \leqslant a \leqslant 29,\ \mathrm{syt}(a,30) = 1\} = \{1,7,11,13,17,19,23,29\}\,,$$

niin

$$\begin{aligned}
&\#(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times \\
&= \{1+30\mathbb{Z}, 7+30\mathbb{Z}, 11+30\mathbb{Z}, 13+30\mathbb{Z}, 17+30\mathbb{Z}, 19+30\mathbb{Z}, 23+30\mathbb{Z}, 29+30\mathbb{Z}\} \\
&= \{1+30\mathbb{Z}, 7+30\mathbb{Z}, 11+30\mathbb{Z}, 13+30\mathbb{Z}, -13+30\mathbb{Z}, -11+30\mathbb{Z}, -7+30\mathbb{Z}, -1+30\mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

ja erityisesti $\#(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times = 8$. Selvästi $\mathrm{ord}(1+30\mathbb{Z}) = 1$ ja $\mathrm{ord}(-1+30\mathbb{Z}) = 2$. Lasku osoittaa, että

$$\begin{aligned}
(7+30\mathbb{Z})^2 &= 49+30\mathbb{Z} = 19+30\mathbb{Z} \\
(7+30\mathbb{Z})^3 &= (7+30\mathbb{Z})(19+30\mathbb{Z}) = 133+30\mathbb{Z} = 13+30\mathbb{Z} \\
(7+30\mathbb{Z})^4 &= (7+30\mathbb{Z})(13+30\mathbb{Z}) = 91+30\mathbb{Z} = 1+30\mathbb{Z}\,,
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
(-7+30\mathbb{Z})^2 &= 49+30\mathbb{Z} = 19+30\mathbb{Z} \\
(-7+30\mathbb{Z})^3 &= (-7+30\mathbb{Z})(19+30\mathbb{Z}) = -133+30\mathbb{Z} = -13+30\mathbb{Z} \\
(-7+30\mathbb{Z})^4 &= (7+30\mathbb{Z})^4 = 1+30\mathbb{Z}\,,
\end{aligned}$$

joten $\langle 7+30\mathbb{Z}\rangle \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \langle -7+30\mathbb{Z}\rangle$. Lisäksi $(11+30\mathbb{Z})^2 = 121+30\mathbb{Z} = 1+30\mathbb{Z}$, joten jokainen alkio sisältyy aliryhmään, jonka kertaluku on 2 tai 4. Siis minkään alkion kertaluku ei ole suurempi kuin 4. Erityisesti kahdeksan alkion ryhmä $(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times$ ei ole syklinen ryhmä.

Valitsemalla $H = \langle 7+30\mathbb{Z}\rangle$ ja $J = \langle -1+30\mathbb{Z}\rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, huomaamme, että $HJ = (\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times$ ja $H \cap J = \{1+30\mathbb{Z}\}$. Koska $(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times$ on kommutatiivinen ryhmä, se on siis aliryhmien H ja J sisäinen suora tulo. Propositioiden 9.35 ja 8.19 nojalla

$$(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^\times \cong H \times J \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,.$$

3. Piirrä ryhmän Q_8 aliryhmäkaavio.

Ratkaisu. Lagrangen lauseen nojalla mahdolliset aliryhmien koot ovat 1, 2, 4 ja 8. Ainoastaan alkion -1 kertaluku on 2, se virittää kertaluvun 2 syklisen ryhmän. Alkioiden $\pm\mathbf{i}$, $\pm\mathbf{j}$ ja $\pm\mathbf{k}$ kertaluku on 4, ne virittävät yhteensä kolme kertaluvun 4 syklistä ryhmää.

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{i} \rangle &= \{\mathbf{i}, -1, -\mathbf{i}, 1\} = \langle -\mathbf{i} \rangle \\
\langle \mathbf{j} \rangle &= \{\mathbf{j}, -1, -\mathbf{j}, 1\} = \langle -\mathbf{j} \rangle \\
\langle \mathbf{k} \rangle &= \{\mathbf{k}, -1, -\mathbf{k}, 1\} = \langle -\mathbf{k} \rangle .
\end{aligned}$$

Lisäksi kaaviossa ovat triviaalit aliryhmät $\{1\}$ ja Q_8.

$$\begin{tikzcd}
 & Q_8 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\langle \mathbf{i} \rangle \arrow[dr, dash] & \langle \mathbf{j} \rangle \arrow[d, dash] & \langle \mathbf{k} \rangle \arrow[dl, dash] \\
 & \langle -1 \rangle \arrow[d, dash] & \\
 & \{1\} &
\end{tikzcd}$$

4. Todista Propositio 12.7(2): Olkoon $\phi\colon G \to G'$ ryhmähomomorfismi. Olkoon $H' \trianglelefteq G'$. Tällöin $\phi^{-1}(H') \trianglelefteq G$.

Ratkaisu. Proposition 9.17(2) nojalla $\phi^{-1}(H') \leqslant G$. Olkoon $g \in G$ ja olkoon $h \in \phi^{-1}(H')$. Tällöin $\phi(h) \in H'$. Proposition 8.17 nojalla $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$, joten

$$\phi(ghg^{-1}) = \phi(g)\phi(h)\phi(g^{-1}) = \phi(g)\phi(h)\phi(g)^{-1} \in H' ,$$

koska $H' \trianglelefteq G'$. Siis $ghg^{-1} \in \phi^{-1}(H')$, joten Proposition 12.5 nojalla $\phi^{-1}(H') \trianglelefteq G$.

5. (a) Osoita, että ryhmän G keskus $Z(G)$ on normaali aliryhmä.
(b) Osoita, että ryhmän Q_8 kaikki aliryhmät ovat normaaleja.

Ratkaisu. (a) Harjoitustehtävässä 9.7 osoitettiin, että $Z(G) \leqslant G$. Olkoon $g \in G$ ja olkoon $h \in Z(G)$. Keskuksen määritelmän nojalla

$$ghg^{-1} = hgg^{-1} = h ,$$

joten Proposition 12.5 nojalla $Z(G) \trianglelefteq G$.
(b) Tehtävässä 3 näimme, että

$$[Q_8 : \langle \mathbf{i} \rangle] = [Q_8 : \langle \mathbf{j} \rangle] = [Q_8 : \langle \mathbf{k} \rangle] = 2 ,$$

joten Proposition 12.3 nojalla $\langle \mathbf{i} \rangle \lhd Q_8$, $\langle \mathbf{j} \rangle \lhd Q_8$ ja $\langle \mathbf{k} \rangle \lhd Q_8$. On helppo tarkastaa, että $\{1, -1\} \leqslant Z(Q_8)$ ja yhtälöt

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj} .$$

osoittavat, että ryhmän muut alkiot eivät ole keskuksessa. Siis (a)-kohdan nojalla $\{1, -1\} \lhd Q_8$. [1]

[1] Tämän tehtävän voi ratkaista myös tarkastelemalla aliryhmien sivuluokkia tai Proposition 12.5. avulla.

6. Osoita, että $Q_8/Z(Q_8) \cong K_4$.

Ratkaisu. Sivuluokat aliryhmän $Z = Z(Q_8) = \{1, -1\}$ suhteen ovat Z, iZ, jZ ja kZ. Laskutaulusta

$\cdot$	Z	iZ	jZ	kZ
Z	Z	iZ	jZ	kZ
iZ	iZ	Z	kZ	jZ
jZ	jZ	kZ	Z	iZ
kZ	kZ	jZ	iZ	Z

tunnistamme, että $Q_8/Z \cong K_4$.

Toinen tapa ratkaista tehtävä on huomata, että ryhmä $Q_8/Z \cong K_4$ on kommutatiivinen neljän alkion ryhmä, jonka nollasta poikkeavat alkiot ovat kertalukua 2. Tällöin mitkä tahansa kaksi eri nollasta poikkeavaa alkiota virittävät ryhmän $Q_8/Z \cong K_4$, joka on näiden alkioiden virittämien syklisten kahden alkion ryhmien sisäinen suora tulo.

7. Olkoon $H \trianglelefteq A_n$ normaali aliryhmä, joka sisältää ainakin yhden 3-syklin. Osoita, että $H = A_n$.

Ratkaisu. Olkoon $(abc) \in H$. Tällöin myös $(acb) = (abc)^2 \in H$, joten molemmat 3-syklit, joissa alkiot a, b ja c esiintyvät ovat aliryhmässä H. Jos $a, b, c, d \in \{1, 2, , \ldots, n\}$ ovat eri alkioita, niin

$$(cd)(abc)(cd) = (abd) \in H,$$

koska H on normaali aliryhmä.[2] Jos $a, b, c, d, e \in \{1, 2, , \ldots, n\}$ ovat eri alkioita, niin

$$(ce)(bd)(abc)(bd)(ce) = (ade) \in H,$$

ja jos $a, b, c, d, e, f \in \{1, 2, , \ldots, n\}$ ovat eri alkioita, niin

$$(cf)(be)(ad)(abc)(ad)(be)(cf) = (def) \in H.$$

Siis kaikki 3-syklit ovat aliryhmässä H. Proposition 10.21 nojalla $H = A_n$.

8. Osoita, että tekijäryhmä $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ on ääretön. Osoita, että ryhmän $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ jokaisen alkion kertaluku on äärellinen ja että ryhmä $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ei ole syklinen.

Ratkaisu. Huomataan ensin, että kuvaus $b\colon [0, 1[\cap \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ on bijektio: Jos $x \neq y$ ja $x - y \in \mathbb{Z}$, niin $|x - y| \geqslant 1$ ja toisaalta, jos $0 \leqslant x < y < 1$, niin $0 < y - x < 1$. Siis $x + \mathbb{Z} \neq y + \mathbb{Z}$, jos $x \neq y$ ja $x, y \in [0, 1[\cap \mathbb{Q}$. Toisaalta, jos $x \in \mathbb{Q}$, niin on $x_0 \in [0, 1[\cap \mathbb{Q}$, jolle $x - x_0 \in \mathbb{Z}$, joten $x + \mathbb{Z} = x_0 + \mathbb{Z}$. Joukko $[0, 1[\cap \mathbb{Q}$ on ääretön, joten $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ on ääretön.

Jos $x = \frac{p}{q}$ joillain $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, niin $qz = p \in \mathbb{Z}$. Siis $q(\frac{p}{q} + \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, joten $\operatorname{ord}(pq + \mathbb{Z}) \leqslant q$.

Jos $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \langle x + \mathbb{Z} \rangle$ jollain $x + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, niin $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ on äärellinen, koska $\operatorname{ord}(x + \mathbb{Z})$ on äärellinen. Siis $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ei ole syklinen ryhmä.

[2] Tässä käytimme sitä, että $(cd)^{-1} = (cd)$.