# Ryhmät 2026

## Harjoitus 5: ratkaisuja

**1.** Olkoot $\alpha_n = (123 \cdots n)$ ja $\beta = (123)$. Määritä permutaatiot

$$\sigma_1 = \alpha_n (12x) \alpha_n^{-1} \quad \text{ja} \quad \sigma_2 = \beta^{-1} \alpha_n (12x) \alpha_n^{-1} \beta$$

jokaiselle $3 \leqslant x < n$.

**Ratkaisu.** Jos $y \in \{1, 2, \ldots, n\} - \{2, 3, x+1\}$, niin $\alpha_n^{-1}(y) \notin \{1, 2, x\}$ ja selvästi $\sigma_1(y) = y$. Jäljelle jäävät alkiot muodostavat 3-syklin ja $\sigma_1 = (2\,3\,x+1)$. Siis

$$\sigma_2 = (321)\sigma_1(123) = (321)(2\,3\,x+1)(123) = (1\,2\,x+1)\,.$$

**2.** Määritä permutaatiot

- $(1y2)(12x)(12y)$ kaikille $x, y \geqslant 3$, $x \neq y$ ja
- $(1xt)(1yz)(1tx)$ kaikille $x, y, t, z > 1$, kun $\#\{x, y, t, z\} = 4$. [1]

**Ratkaisu.** $(1y2)(12x)(12y) = (1\,x\,y)$ ja $(1xt)(1yz)(1tx) = (x\,y\,z)$.

**3.** Osoita, että jokaiselle parittomalle $n \geqslant 5$ pätee $A_n = \langle (123), (123 \cdots n) \rangle$.

**Ratkaisu.** 3-syklit ovat parillisia ja koska $n$ on pariton, myös $n$-sykli $(123 \cdots n)$ on parillinen. Siis $\langle (123), (123 \cdots n) \rangle \leqslant A_n$. Tehtävän 1 nojalla $(12x) \in \langle (123), (123 \cdots n) \rangle$ kaikilla $3 \leqslant x \leqslant n$. Tehtävän 2 nojalla kaikki muutkin 3-syklit ovat aliryhmässä $\langle (123), (123 \cdots n) \rangle$, joten Proposition 10.21 nojalla $\langle (123), (123 \cdots n) \rangle = A_n$.

**4.** Olkoon $\sigma \in A_5 - \{\mathrm{id}\}$. Osoita, että $\sigma$ on 3-sykli, 5-sykli tai kahden erillisen vaihdon tulo.

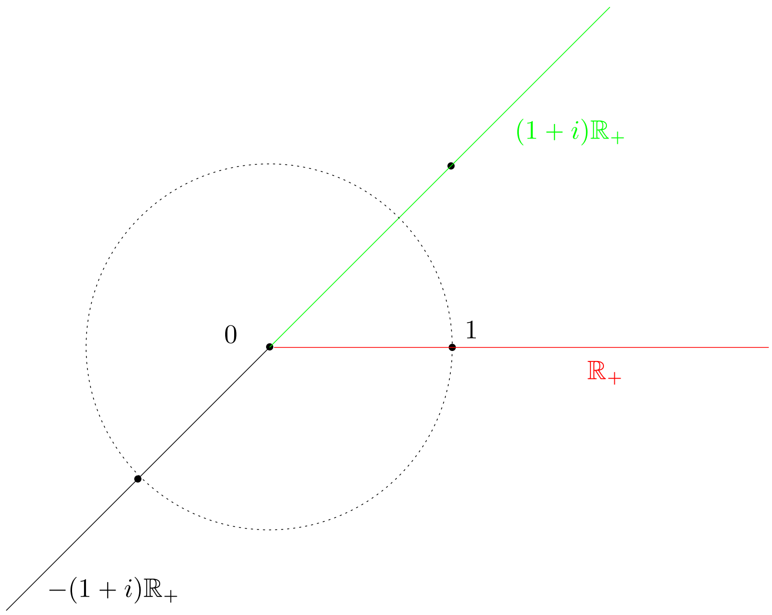
**Ratkaisu.** Jokainen permutaatio on erillisten syklien tulo. Viiden alkion joukossa mahdollisuuksia ovat siis identtinen kuvaus, vaihto, kahden erillisen vaihdon tulo, 3-sykli, vaihdon ja sen kanssa erillisen 3-syklin tulo, 4-sykli ja 5-sykli. Näistä vaihdot ja 4-syklit ovat parittomia.

**5.** Osoita, että $\mathbb{R}_+ < \mathbb{C}^\times$ ja määritä aliryhmän $\mathbb{R}_+$ sivuluokat ryhmässä $\mathbb{C}^\times$. Piirrä kuva, joka havainnollistaa sivuluokkien määräämää ositusta.

**Ratkaisu.** Positiivisten reaalilukujen tulo on positiivinen reaaliluku ja positiivisen reaaliluvun käänteisluku on positiivinen reaaliluku. Aliryhmätestin nojalla siis $\mathbb{R}_+ < \mathbb{C}^\times$.

Kompleksiluvun $a \in \mathbb{C}^\times$ sivuluokka $a\mathbb{R}_+ = \{at : t \in \mathbb{R}_+\}$ on luvun $a$ kautta kulkeva puolisuora. Proposition 11.4 mukaan $a\mathbb{R}_+ = b\mathbb{R}_+$, jos ja vain jos $\frac{a}{b} \in \mathbb{R}_+$, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että on $t_0 \in \mathbb{R}_+$, jolle $a = bt_0$.

[1] Ehto $\#\{x, y, t, z\} = 4$ tarkoittaa, että mitkään kaksi alkioista $x, y, t, z$ eivät ole samoja.




**6.** Todista Propositio 11.4.

**Ratkaisu.** (1) Olkoot $x, y \in G$. Oletetaan, että $xH = yH$. Tällöin jokaisella $h \in H$ pätee $xh \in yH$, joten samaan tapaan on $k \in H$ siten, että $xh = yk$. Siis $y^{-1}x = kh^{-1} \in H$.

Oletetaan sitten, että $y^{-1}x \in H$. Olkoon $h \in H$. Tällöin

$$xh = x(x^{-1}yy^{-1}x)h = (xx^{-1})y(y^{-1}x)h = y(y^{-1}xh) \in yH\,,$$

joten $xH \subset yH$. Toisaalta myös $x^{-1}y = (y^{-1}x)^{-1} \in H$, joten

$$yh = y(y^{-1}xx^{-1}y)h = x(x^{-1}yh) \in xH\,.$$

Siis $xH = yH$.

Kohta (2) todistetaan samaan tapaan.

**7.** Olkoon $G$ ryhmä ja olkoon $H < G$. Osoita, että kuvaus $b : G/H \to H\backslash G$, $b(aH) = Ha^{-1}$ on bijektio.

**Ratkaisu.** Proposition 11.4 kohdan (1) nojalla $xH = yH$, jos ja vain jos $y^{-1}x \in H$ ja kohdan (2) nojalla $Hx^{-1} = Hy^{-1}$, jos ja vain jos $y^{-1}x \in H$. Siis

$$b(yH) = Hy^{-1} = Hx^{-1} = b(xH)\,, \tag{1}$$

jos ja vain jos $y^{-1}x \in H$. Siis kuvaus $b$ on hyvin määritelty.

Edellä tehty lasku (1) osoittaa myös, että $b$ on injektio: Jos $b(yH) = b(xH)$, niin $y^{-1}x \in H$, joten $xH = yH$. Olkoon $Ha \in H\backslash G$. Tällöin $b(a^{-1}H) = Ha$, joten $b$ on surjektio. Siis $b$ on bijektio.

**8.** Määritä kaikki ryhmän $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +)$ aliryhmät.

**Ratkaisu.** Ryhmän $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +)$ kertaluku on 15, joten Lagrangen lauseen nojalla sen aliryhmien mahdolliset kertaluvut ovat 1, 3, 5 ja 15. Ainoa kertaluvun 1 aliryhmä on $\{0 + 15\mathbb{Z}\}$ ja ainoa kertaluvun 15 aliryhmä on $\mathbb{Z}/15$.

Kaikille $a \in \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ pätee $\mathrm{syt}(a, 15) = 1$, joten $\mathrm{pyj}(a, 15) = 15a$. Siis $\mathrm{ord}(a + 15\mathbb{Z}) = 15$ ja $\langle a + 15\mathbb{Z}\rangle = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$, kun $a \in \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$. Vastaavasti, jos

$a \in \{3, 6, 9, 14\}$ pätee $\mathrm{syt}(a, 15) = 3$ ja $\mathrm{pyj}(a, 15) = 5a$. Jokainen näistä alkioista virittää saman viiden alkion syklisen aliryhmän

$$\langle 3 + 15\mathbb{Z} \rangle = \langle 6 + 15\mathbb{Z} \rangle = \langle 9 + 15\mathbb{Z} \rangle = \langle 12 + 15\mathbb{Z} \rangle .$$

Jäljellä olevat alkiot $5 + 15\mathbb{Z}$ ja $10 + 15\mathbb{Z}$ virittävät saman kolmen alkion aliryhmän

$$\langle 5 + 15\mathbb{Z} \rangle = \langle 10 + 15\mathbb{Z} \rangle .$$