Ryhmät 2026

Harjoitus 4: ratkaisuja

1. Osoita, että ryhmät $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ovat isomorfisia. [1]

Ratkaisu. Seurauksen 8.12 nojalla ryhmän $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ neutraalialkio on $(0+2\mathbb{Z}, 0+3\mathbb{Z})$. Huomaamme, että

$$\begin{aligned}
2(1+2\mathbb{Z}, 1+3\mathbb{Z}) &= (0+2\mathbb{Z}, 2+3\mathbb{Z}) \neq (0+2\mathbb{Z}, 0+3\mathbb{Z}) \\
3(1+2\mathbb{Z}, 1+3\mathbb{Z}) &= (1+2\mathbb{Z}, 0+3\mathbb{Z}) \neq (0+2\mathbb{Z}, 0+3\mathbb{Z}) \\
4(1+2\mathbb{Z}, 1+3\mathbb{Z}) &= (0+2\mathbb{Z}, 1+3\mathbb{Z}) \neq (0+2\mathbb{Z}, 0+3\mathbb{Z}) \\
5(1+2\mathbb{Z}, 1+3\mathbb{Z}) &= (1+2\mathbb{Z}, 2+3\mathbb{Z}) \neq (0+2\mathbb{Z}, 0+3\mathbb{Z}) \\
6(1+2\mathbb{Z}, 1+3\mathbb{Z}) &= (0+2\mathbb{Z}, 0+3\mathbb{Z}),
\end{aligned}$$

joten

$$\#\langle(1+2\mathbb{Z}, 1+3\mathbb{Z})\rangle = \operatorname{ord}(1+2\mathbb{Z}, 1+3\mathbb{Z}) = 6 = \#\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\,.$$

Siis $\langle(1+2\mathbb{Z}, 1+3\mathbb{Z})\rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, joten $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ on kuuden alkion syklinen ryhmä. Lauseen 9.29(1) nojalla se on isomorfinen ryhmän $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ kanssa.

2. Osoita, että rationaalilukujen additiivinen ryhmä ei ole syklinen.

Ratkaisu. Olkoon $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Tällöin $\langle \frac{a}{b} \rangle = \left\{\frac{ka}{b} : k \in \mathbb{Z}\right\}$. Jos $\langle \frac{a}{b} \rangle = \mathbb{Q}$, niin $\frac{1}{2b} = \frac{ka}{b}$ jollain $k \in \mathbb{Z}$, mutta tästä seuraa $1 = 2ab$, mikä on ristiriita, koska $2 \notin \mathbb{Z}^\times$.

3. Todista Lause 9.29(2).

Ratkaisu. Olkoon $\phi\colon \langle a\rangle \to G$ ryhmähomomorfismi. Jos $g \in \phi(\langle a\rangle)$, niin

$$g = \phi(a^k) = \phi(a)^k$$

jollain $k \in \mathbb{Z}$. Siis $\phi(\langle a\rangle) = \langle\phi(a)\rangle$.

4. Monellako eri tavalla voit täydentää taulukon

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a			
b	b			
c	c			

niin, että tuloksena on ryhmän laskutaulu? Mitä voit päätellä tästä havainnosta?

Ratkaisu. Harjoitustehtävän 9.28 nojalla neljän alkion ryhmässä on alkio, jonka kertaluku on 2. Voimme olettaa, että tämä alkio on b.

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a			
b	b		e	
c	c			

[1] Osoita, että $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ on syklinen ryhmä.

Lemman 8.6 nojalla $a * b = c$,$b * a = c$, $b * c = a$ ja $c * b = a$.

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a		c	
b	b	c	e	a
c	c		a	

Muihin paikkoihin on vaihtoehtoja. Esimerkiksi $a * a = e$ tai $a * a = b$ ovat kaikki vaihtoehdot tälle tulolle. Jos $a * a = b$, niin Lemman 8.6 nojalla

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

Tämä on neljän alkion syklisen ryhmän laskutaulu. Jos $a*a = e$, niin Lemman 8.6 nojalla

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Tämä on Kleinin 4-ryhmön K_4 laskutaulu.

Valitsemalla alussa a tai c kertaluvun 2 alkioksi saadaan erilaiset laskutaulut sykliselle ryhmälle, mutta ne eivät ole oleellisesti eri tapoja, koska vastaavat ryhmät ovat isomorfisia.

5. Määritä permutaatio $\tau = (13428)(2648735)$ erillisten syklien tulona ja määritä sen kertaluku.

Ratkaisu. Olkoot $\tau_1 = (2648735)$ ja $\tau_2 = (13428)$. Seuraamalla alkion 1 rataa kuten Proposition 10.8 todistuksessa saamme

$$\begin{aligned}
\tau(1) &= \tau_2(\tau_1(1)) = \tau_2(1) = 3\,,\\
\tau(3) &= \tau_2(\tau_1(3)) = \tau_2(5) = 5\,,\\
\tau(5) &= \tau_2(\tau_1(5)) = \tau_2(2) = 8\,,\\
\tau(8) &= \tau_2(\tau_1(8)) = \tau_2(7) = 7\,,\\
\tau(7) &= \tau_2(\tau_1(7)) = \tau_2(3) = 4\,,\\
\tau(4) &= \tau_2(\tau_1(4)) = \tau_2(8) = 1\,,
\end{aligned}$$

joten halutussa esityksessä on 6-sykli (135874). Tarkastellaan jäljellä olevia alkioita:

$$\begin{aligned}
\tau(2) &= \tau_2(\tau_1(2)) = \tau_2(6) = 6\,,\\
\tau(6) &= \tau_2(\tau_1(6)) = \tau_2(4) = 2\,.
\end{aligned}$$

Siis $\tau = (135874)(26)$. Permutaatio τ on siis erillisten 2- ja 6-syklin tulo, joten Lemman 10.5(2) nojalla $\operatorname{ord}\tau = \operatorname{pyj}(2, 6) = 6$.

6. Täydennä Proposition 10.6 todistus induktiotodistukseksi.

Ratkaisu. Sykli, jonka pituus on 2 on vaihto. Oletetaan, että kaikki syklit, joiden pituus on korkeintaan $m-1$ ovat vaihtojen tuloja. Olkoon $(a_1a_2\cdots a_m)$ sykli, jonka pituus on m. Tällöin on vaihdot $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ siten, että $(a_1a_2\cdots a_{m-1}) = \tau_1\tau_2\cdots\tau_n$. Proposition 10.6. todistusideassa olleen vihjeen perusteella huomaamme, että

$$(a_1a_2\cdots a_m) = (a_1a_m)(a_1a_2\cdots a_{m-1}) = (a_1a_m)\tau_1\tau_2\cdots\tau_n\,,$$

joten $(a_1a_2\cdots a_m)$ on vaihtojen tulo. Väite seuraa induktioperiaatteesta.

7. Olkoot $a, b, c, d, e \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ siten, että $\{a, b, c, d, e\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Määritä permutaatiot

(1) $(ab)(cd)(abc)(cd)(ab)$,

(2) $(acb)(abcde)(abc)$,

(3) $(abcde)(abdec)^{-1}$,

(4) $(aeb)(ab)(cd)(abe)$ ja

(5) $(ab)(cd)(ae)(cd)$.

Ratkaisu. (1) $(ab)(cd)(abc)(cd)(ab) = (adb)$,

(2) $(acb)(abcde)(abc) = (abdec)$,

(3) $(abcde)(abdec) = (abcde)(acedb) = (adc)$,

(4) $(aeb)(ab)(cd)(abe) = (ae)(cd)$,

(5) $(ab)(cd)(ae)(cd) = (aeb)$.

8. Olkoon $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, 8\} \to \{1, 2, \ldots, 8\}$ permutaatio, jolle pätee

$$\sigma(1) = 3,\quad \sigma(2) = 6,\quad \sigma(3) = 7,\quad \sigma(4) = 8,\quad \sigma(5) = 2,\quad \sigma(6) = 5,\quad \sigma(7) = 4,\quad \sigma(8) = 1\,.$$

Kirjoita permutaatio σ erillisten syklien tulona.

Ratkaisu. Samalla tavalla kuin tehtävässä 5 saadaan (13748)(265).