

Ryhmät 2026

Harjoitus 3: ratkaisuja

Hamiltonin kvaterniot on joukko

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\} \subset M_2(\mathbb{C})$$

varustettuna renkaasta $M_2(\mathbb{C})$ indusoiduilla laskutoimituksilla.

Hamiltonin kvaternioiden multiplikatiivinen ryhmä on

$$\mathbb{H}^\times = \left(\mathbb{H} - \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \cdot \right),$$

laskutoimituksena matriisien kertolasku.^a

^aKatso luku 4.4.

1. Osoita, että \mathbb{H}^\times on ryhmä.

Ratkaisu. Kompleksisten 2×2 -matriisien osajoukko \mathbb{H} on vakaa matriisien kertolaskun suhteen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -\bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - b\bar{d} & ad + b\bar{c} \\ -\bar{b}c - \bar{a}d & -\bar{b}d + \bar{a}c \end{pmatrix} \in \mathbb{H} \quad (1)$$

joten matriisien kertolasku indusoi assosiatiivisen laskutoimituksen joukkoon \mathbb{H} . Huomaamme, että

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = |a|^2 + |b|^2 = 0 \quad (2)$$

vain, jos $a = 0 = b$. Siis joukon $\mathbb{H} - \{0\}$ alkiot ovat kääntyviä matriiseja. Kahden kääntyvän matriisin tulo on kääntyvä, joten joukon $\mathbb{H} - \{0\}$ alkioiden tulo ei voi olla nollamatriisi. Siis $\mathbb{H} - \{0\}$ on vakaa, joten matriisien kertolasku on assosiatiivinen laskutoimitus.

Yksikkömatriisi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on joukossa $\mathbb{H} - \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, joten laskutoimituksella on neutraalialkio.

Edellä huomasimme, että jokainen joukon $\mathbb{H} - \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ alkio on kääntyvä ja lineaarialgebrasta muistamme, että¹

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix} \in \mathbb{H} - \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (3)$$

Siis \mathbb{H}^\times on ryhmä.

Tapa 2: Yhtälöstä (2) seuraa, että joukon $\mathbb{H} - \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ alkiot ovat kääntyviä matriiseja. Siis $\mathbb{H} \subset GL_2(\mathbb{C})$. Voimme soveltaa aliryhmätestiä, koska esimerkiksi $I_2 \in \mathbb{H}$. Tarvittavat laskut ovat samat kuin edellä.

2. Osoita, että

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{\cos(t) + i \sin(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

on ryhmän \mathbb{C}^\times aliryhmä.

¹Tämä on helppo tarkastaa laskemalla.

Ratkaisu. Joukko \mathbb{S}^1 ei ole tyhjä, sillä esimerkiksi $1 \in \mathbb{S}^1$. Olkoot $z, w \in \mathbb{S}^1$. Proposition 1.26(3) nojalla $|zw| = |z||w| = 1$, joten $zw \in \mathbb{S}^1$. Lisäksi $z\bar{z} = \mathbf{n}(z) = |z|^2 = |\bar{z}| = 1$, joten $\bar{z} = z^{-1} \in \mathbb{S}^1$. Aliryhmätestin nojalla $\mathbb{S}^1 < \mathbb{C}^\times$.

Yhtälö $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{\cos(t) + i \sin(t) : t \in \mathbb{R}\}$ on tunnettu aiemmilta kursseilta, esimerkiksi napakoordinaattien yhteydestä. Tällöinhän t on ympyrän kulmaparametri, kun kulmaa mitataan vastapäivään alkaen tason pisteestä $(1, 0) = 1 + 0i$.

3. Anna esimerkki surjektiivisesta homomorfismista $f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{S}^1, \cdot)$.

Ratkaisu. Kuvaus $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 < \mathbb{C}^\times$, $\phi(t) = \cos(t) + i \sin(t)$, on surjektio Harjoitustehtävän 2 nojalla. Lisäksi kaikille $s, t \in \mathbb{R}$ pätee trigonometristen funktioiden tunnettujen yhteenlaskusääntöjen nojalla

$$\phi(s+t) = \cos(s+t) + i \sin(s+t) = \cos(s) \cos(t) - \sin(s) \sin(t) + i(\cos(s) \sin(t) + \sin(s) \cos(t)).$$

Toisaalta kompleksilukujen laskusääntöjen nojalla

$$\begin{aligned} \phi(s)\phi(t) &= (\cos(s) + i \sin(s))(\cos(t) + i \sin(t)) \\ &= \cos(s) \cos(t) - \sin(s) \sin(t) + i(\cos(s) \sin(t) + \sin(s) \cos(t)), \end{aligned}$$

joten väite on todistettu.

Huomaa: Edellä käytetty ϕ ei ole ainoa oikea valinta surjektiiviseksi homomorfismiksi $f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{S}^1, \cdot)$. Samalla laskulla kuin edellä on helppo tarkastaa, että kuvaus $\phi_a: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{S}^1, \cdot)$, $\phi_a(t) = \cos(at) + i \sin(at)$, on surjektiivinen homomorfismi kaikilla $a \in \mathbb{R}^\times$. Erityisen luonteva valinta olisi $a = 2\pi$.

Kvaternioita käsitellessä on tapana käyttää esimerkiksi merkintöjä

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Tällöin

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1} \tag{4}$$

ja

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}. \tag{5}$$

Ryhmä

$$Q_8 = \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\} \leq \mathbb{H}^\times$$

on kvaternioryhmä Q_8 .

4. Osoita, että $Q_8 < \mathbb{H}^\times$.

Ratkaisu. Koska $Q_8 \subset \mathbb{H}^\times$ on määritelty luettelemalla 8 alkioita, se ei ole tyhjä joukko ja selvästi Q_8 ei ole koko \mathbb{H}^\times . On helppo tarkastaa, että

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1} \tag{6}$$

ja

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}. \tag{7}$$

Esimerkiksi

$$\mathbf{ij} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{k}$$

ja

$$\mathbf{j}\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = -\mathbf{k}.$$

Siis kaikille $x, y \in Q_8$ pätee $xy \in Q_8$. Lisäksi yhtälöistä (6) seuraa

$$\mathbf{i}(-\mathbf{i}) = (-\mathbf{i})\mathbf{i} = \mathbf{j}(-\mathbf{j}) = (-\mathbf{j})\mathbf{j} = \mathbf{k}(-\mathbf{k}) = (-\mathbf{k})\mathbf{k} = 1, \quad (8)$$

joten $x^{-1} \in Q_8$ jokaiselle $x \in Q_8$. Aliryhmätestin nojalla $Q_8 < \mathbb{H}^\times$.

5. Todista Propositio 9.14.

Ratkaisu. Lemman 9.3 nojalla ryhmän G neutraalialkio on aliryhmässä H_i jokaisella $i \in I$, joten $\bigcap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$. Olkoot $g, h \in \bigcap_{i \in I} H_i$. Tällöin $g, h \in H_i$ kaikilla $i \in I$. Koska H_i on ryhmä, pätee $gh^{-1} \in H_i$ kaikilla $i \in I$. Siis $gh^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i$. Väite seuraa aliryhmätestistä.

6. Olkoon $T: \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $T(B) = {}^T B$, kuvaus, joka liittää matriisiin B sen transpoosin. Olkoon $\mathrm{inv}: \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ kuvaus $\mathrm{inv}(B) = B^{-1}$. Mitkä kuvauksista T , inv , $T \circ \mathrm{inv}$ ja $\mathrm{inv} \circ T$ ovat homomorfismeja?²

Ratkaisu. Olkoot $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Tällöin

$$T(AB) = {}^T(AB) = {}^T B {}^T A$$

ja

$$\mathrm{inv}(AB) = \mathrm{inv} B \mathrm{inv} A,$$

joten T ja inv eivät ole homomorfismeja. Toisaalta

$$T \circ \mathrm{inv}(AB) = T(\mathrm{inv} B \mathrm{inv} A) = T(\mathrm{inv} A) T(\mathrm{inv} B) = T \circ \mathrm{inv}(A) T \circ \mathrm{inv}(B)$$

ja

$$\mathrm{inv} \circ T(AB) = \mathrm{inv}(T(B) T(A)) = \mathrm{inv}(T(A)) \mathrm{inv}(T(B)) = \mathrm{inv} \circ T(A) \mathrm{inv} \circ T(B),$$

joten $T \circ \mathrm{inv}$ ja $\mathrm{inv} \circ T$ ovat homomorfismeja.

7. Olkoon

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \right\}.$$

Olkoon $\phi: B \rightarrow \mathbb{C}^\times$,

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}\right) = a^2.$$

Osoita, että $B \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ja että kuvaus ϕ on homomorfismi. Määritä homomorfismin ϕ ydin ja kuvajoukko.

Ratkaisu. Huomaamme, että $\det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = 1$, joten $B \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Lisäksi $I_2 \in B$, joten voimme soveltaa aliryhmätestiä. Jos $a, a', b, b' \in \mathbb{C}$, $a \neq 0 \neq a'$, niin

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & \frac{1}{a'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + \frac{b}{a'} \\ 0 & \frac{1}{aa'} \end{pmatrix} \in B$$

²Kertaa lineaarialgebraa!

ja

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in B,$$

joten $B \leq \text{SL}_2(\mathbb{C})$.

Kuvaus ϕ on homomorfismi, koska

$$\begin{aligned} \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & \frac{1}{a'} \end{pmatrix}\right) &= \phi\left(\begin{pmatrix} aa' & ab' + \frac{b}{a'} \\ 0 & \frac{1}{aa'} \end{pmatrix}\right) \\ &= (aa')^2 = a^2(a')^2 = \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}\right)\phi\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & \frac{1}{a'} \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Sen ydin on

$$\ker \phi = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \in B : a^2 = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \in B : a = \pm 1 \right\}$$

ja kuvajoukko on

$$\phi(B) = \{a^2 : a \in \mathbb{C} - \{0\}\} = \mathbb{C}^\times. \quad (9)$$

Yhtälöketjun (9) viimeinen yhtäsuuruus voidaan perustella esimerkiksi näin: Jokaiselle $z \in \mathbb{C}^\times$ on $r > 0$ ja $t \in \mathbb{R}$ siten, että $z = r(\cos t + i \sin t)$. Tehtävässä 3 tehtyjen laskujen perusteella pätee $z = (\sqrt{r}(\cos \frac{t}{2} + i \sin \frac{t}{2}))^2$.

8. Olkoon G äärellinen ryhmä, jonka kertaluku on parillinen. Osoita, että ryhmässä G on alkio, jonka kertaluku on 2.

Ratkaisu. Olkoon $P = \{g \in G : g^{-1} \neq g\}$. Jos $g \in P$, niin $g^{-1} \in G$ ja $g \neq g^{-1}$. Siis $\#P$ on parillinen. Jokaiselle $h \in G - P$ pätee $h^{-1} = h$, joten $\text{ord } h \in \{1, 2\}$. Ryhmän G neutraalialkio ei ole joukossa P , koska $ee = e$, ja se on ryhmän G ainoa alkio, jonka kertaluku on 1. Koska $G - P \neq \emptyset$ ja $\#(G - P)$ on parillinen, niin on $h \in (G - (P \cup \{e\}))$. Tälle alkioille pätee $\text{ord } h = 2$.