

# Ryhmät 2026

## Harjoitus 2: ratkaisuja

1. Määritä kertolaskun laskutaulu kongruenssiluokilla modulo 8.

**Ratkaisu.** Merkitään kongruenssiluokkaa  $a + 8\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  edustajalla  $r \equiv a \pmod{8}$ , jolle pätee  $0 \leq r \leq 7$ .

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

2. Minkä kurssilla käsitellyn ryhmän kanssa ryhmä  $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$  on isomorfinen?

**Ratkaisu.** Määritelmän ja Seurauksen 8.22 nojalla

$$(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times = \{1 + 12\mathbb{Z}, 5 + 12\mathbb{Z}, 7 + 12\mathbb{Z}, 11 + 12\mathbb{Z}\}.$$

Ryhmän  $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$  laskutaulu on

$\cdot$	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

(1)

kun merkitsemme kongruenssiluokkaa  $k + 12\mathbb{Z}$  edustajallaan  $k \in \{1, 5, 7, 11\}$ .

Vertaamalla laskutaulua (1) ja ryhmän  $K_4$  laskutaulua (8.1), huomaamme, että

$$(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times \cong K_4.$$

3. Osoita, että  $H_3$  on ryhmä.

**Ratkaisu.** Reaalikertoimiset kääntyvät  $3 \times 3$ -matriisit muodostavat Proposition 9.11 nojalla ryhmän  $GL_3(\mathbb{R})$ . Tämä tulos käydään vasta harjoitusten päivänä luennolla, mutta sitä voi käyttää. Ilman tätä tulosta pitää alla olevien laskelmien lisäksi todeta, että  $3 \times 3$ -matriisien kertolasku indusoi laskutoimituksen joukkoon  $H_3$ , koska  $H_3$  on vakaa, katso (2). Indusoitu laskutoimitus on assosiatiiivinen. Lisäksi käänteisalkion toimivuus pitää tarkastaa molemmilta puolilta.

Käytämme aliryhmätestiä Propositio 9.4(2). Kaikkien joukon  $H_3$  matriisien determinantti on 1, joten  $H_3 \subset SL_2(\mathbb{R}) \leq GL_3(\mathbb{R})$ . Matriisien kertolaskun neutraalialkio

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  on joukossa  $H_3$ , joten  $H_3$  ei ole tyhjä joukko.

Osoitetaan, että  $H_3$  on vakaa matriisien kertolaskulle: Olkoot  $a, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}$ . Tällöin

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x' & z' \\ 0 & 1 & y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+x' & z+z'+xy' \\ 0 & 1 & y+y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3, \quad (2)$$

joten  $H_3$  on vakaa ja matriisien kertolasku indusoi assosiattiivisen laskutoimituksen joukkoon  $H_3$ .

Lisäksi yhtälöstä (2) näemme, että kaikille  $x, y, z \in \mathbb{R}$  pätee

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & -z+xy \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3,$$

joten aliryhmätestin nojalla  $H_3 \leq \text{SL}_2(\mathbb{R})$ .

4. Osoita, että ryhmä  $H_3$  ei ole isomorfinen ryhmän  $(\mathbb{R}^3, +)$  kanssa.

**Ratkaisu.** Jos ryhmät olisivat isomorfisia, niin  $H_3$  olisi kommutatiivinen Proposition 8.16(4) nojalla, koska  $\mathbb{R}^3$  on kommutatiivinen esimerkiksi Proposition 8.10/Esimerkin 8.11 nojalla. Kuitenkin pätee esimerkiksi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

joten  $H_3$  ei ole kommutatiivinen. Tämän voi todeta monella muullakin esimerkillä.

Ryhmän  $G$  keskus on

$$Z(G) = \{z \in G : zg = gz \text{ kaikilla } g \in G\}.$$

5. Olkoon  $G$  ryhmä. Osoita, että  $Z(G) \leq G$ .

**Ratkaisu.** Neutraalialkio on keskuksessa, joten  $Z(G)$  ei ole tyhjä. Olkoot  $z, w \in Z(G)$ . Tällöin assosiattiivisuuden ja keskuksen määritelmän nojalla kaikille  $g \in G$  pätee

$$(zw)g = z(wg) = z(gw) = (zg)w = (gz)w = g(zw),$$

joten  $zw \in Z(G)$ . Lisäksi Proposition 8.3(4) ja oletuksen  $z \in Z(G)$  nojalla saadaan

$$z^{-1}g = (g^{-1}z)^{-1} = (zg^{-1})^{-1} = gz^{-1}, \quad (3)$$

joten  $z^{-1} \in Z(G)$ . Aliryhmätestin nojalla  $Z(G) \leq G$ .

Sen, että  $z^{-1} \in Z(G)$  kaikille  $z \in Z(G)$  voi osoittaa yhtälökettjun (3) sijaan myös esimerkiksi näin:

$$z^{-1}g = z^{-1}gzz^{-1} = z^{-1}zgz^{-1} = gz^{-1}.$$

6. Olkoon  $X$  joukko ja olkoon  $x_0 \in X$ . Olkoon

$$F = \{f \in \text{Perm}(X) : f(x_0) = x_0\}$$

Osoita, että  $F \leq \text{Perm}(X)$ .

**Ratkaisu.** Identtiselle kuvaukselle  $\text{id}_X: X \rightarrow X$ ,  $\text{id}_X(x) = x$ , pätee  $\text{id}_X(x_0) = x_0$ . Siis  $\text{id}_X \in F$ , joten  $F \neq \emptyset$ . Jos  $f, g \in F$ , niin  $f \circ g(x_0) = f(g(x_0)) = f(x_0) = x_0$ , joten  $f \circ g \in F$ . Jos  $f \in F$ , niin  $x_0 = f^{-1} \circ f(x_0) = f^{-1}(x_0)$ , joten  $f^{-1} \in F$ . Väite seuraa aliryhmäteestistä.

7. Todista Propositio 9.17(2).

**Ratkaisu.** Olkoot  $e \in G$  ja  $e' \in G'$  ryhmien  $G$  ja  $G'$  neutraalialkiot. Olkoon  $H' \leq G'$ . Tällöin  $e' \in H'$  ja  $\phi(e) = e'$ , joten  $e \in \phi^{-1}(H')$ . Olkoot  $g, h \in \phi^{-1}(H')$ . Tällöin siis  $\phi(g), \phi(h) \in H'$ . Proposition 8.17 nojalla

$$\phi(gh^{-1}) = \phi(g)\phi(h^{-1}) = \phi(g)\phi(h)^{-1} \in H',$$

koska  $H' \leq G'$ . Aliryhmäteestin nojalla  $\phi^{-1}(H') \leq G$ .

8. Olkoot  $X$  ja  $Y$  epätyhjiä joukkoja ja olkoon  $f: X \rightarrow Y$  bijektio. Osoita, että permutaatioryhmät  $\text{Perm}(X)$  ja  $\text{Perm}(Y)$  ovat isomorfisia.

**Ratkaisu.** Jos  $b \in \text{Perm}(X)$ , niin  $f \circ b \circ f^{-1}: Y \rightarrow Y$  on bijektioiden yhdistettynä kuvauksena bijektio, joten se on ryhmän  $\text{Perm}(Y)$  alkio. Kuvaus  $\Phi: \text{Perm}(X) \rightarrow \text{Perm}(Y)$ ,  $\Phi(b) = f \circ b \circ f^{-1}$  on homomorfismi, sillä kaikille  $b_1, b_2 \in \text{Perm}(X)$  pätee

$$\Phi(b_1 \circ b_2) = f \circ b_1 \circ b_2 \circ f^{-1} = f \circ b_1 \circ f^{-1} \circ f \circ b_2 \circ f^{-1} = \Phi(b_1) \circ \Phi(b_2).$$

Olkoon  $\tilde{b} \in \text{Perm}(Y)$ . Tällöin  $f^{-1} \circ \tilde{b} \circ f \in \text{Perm}(X)$  ja

$$\Phi(f^{-1} \circ \tilde{b} \circ f) = f \circ f^{-1} \circ \tilde{b} \circ f \circ f^{-1} = \tilde{b},$$

joten  $\Phi$  on surjektio. Jos  $\Phi(b) = \text{id}_Y$ , niin  $f \circ b \circ f^{-1} = \text{id}_Y$ , joten

$$f \circ b = f \circ b \circ f^{-1} \circ f = \text{id}_Y \circ f = f.$$

Siis

$$b = f^{-1} \circ f \circ b = f^{-1} \circ f = \text{id}_X,$$

joten  $\ker \Phi = \{\text{id}_X\}$ . Proposition 9.20 nojalla  $\Phi$  on injektio. Siis  $\Phi$  on bijektio, joten se on isomorfismi.

Toinen tapa osoittaa, että  $\phi$  on bijektio, on näyttää, että kuvaus  $\Psi: \text{Perm}(Y) \rightarrow \text{Perm}(X)$ ,  $\Psi(c) = f^{-1} \circ c \circ f$  on kuvauksen  $\Phi$  käänteiskuvaus: Jokaiselle  $b \in \text{Perm}(X)$  ja jokaiselle  $c \in \text{Perm}(Y)$  pätee

$$\Psi \circ \Phi(b) = f^{-1} \circ f \circ b \circ f^{-1} \circ f = b$$

ja

$$\Phi \circ \Psi(c) = f \circ f^{-1} \circ c \circ f \circ f^{-1} = c,$$

joten  $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{\text{Perm}(X)}$  ja  $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{\text{Perm}(Y)}$ . Siis  $\Psi = \Phi^{-1}$ .