

# Ryhmät 2026

## Harjoitus 1: ratkaisuja

1. Olkoon  $*$  kolmen alkion joukon  $X = \{a, b, c\}$  laskutoimitus, jonka laskutaulu on

$*$	$a$	$b$	$c$	
$a$	$a$	$b$	$c$	
$b$	$b$	$a$	$a$	.
$c$	$c$	$a$	$a$	

Onko laskutoimitus  $*$  kommutatiivinen? Onko laskutoimituksella  $*$  neutraalialkio? Onko laskutoimituksella varustetun joukon  $(X, *)$  jokaisella alkioilla käänteisalkio? Onko käänteisalkio yksikäsitteinen? Onko laskutoimitus  $*$  assosiatiivinen?

**Ratkaisu.** Laskutoimitus  $*$  on kommutatiivinen, koska sen laskutaulu on symmetrinen. Se ei ole assosiatiivinen, sillä

$$(b * b) * c = a * c = c \neq b = b * a = b * (b * c).$$

Laskutaulusta näkee, että  $a$  on neutraalialkio. Lisäksi  $b * b = a$ ,  $b * c = a = c * b$  ja  $c * c = a$ , joten alkioilla  $b$  ja  $c$  on kummallakin kaksi käänteisalkiota  $b$  ja  $c$ . Se, että  $*$  ei ole assosiatiivinen seuraa myös tästä havainnosta Proposition 1.18 nojalla.

2. Olkoon  $*$  rationaalilukujen laskutoimitus, joka määritellään asettamalla

$$a * b = \frac{a + b}{2}.$$

Onko laskutoimitus  $*$  assosiatiivinen? Onko laskutoimituksella  $*$  neutraalialkio?

**Ratkaisu.** Laskutoimitus  $*$  ei ole assosiatiivinen: Esimerkiksi

$$(0 * 0) * 1 = \frac{\frac{0+0}{2} + 1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = \frac{0 + \frac{0+1}{2}}{2} = 0 * (0 * 1).$$

Laskutoimituksella  $*$  ei ole neutraalialkiota: Jos  $n \in \mathbb{Q}$  on neutraalialkio ja  $a \in \mathbb{Q}$ , niin  $a = n * a = \frac{n+a}{2}$ , joten  $n = a$ , mutta tämä ei voi päteä kaikille  $a \in \mathbb{Q}$ .

3. Osoita, että matriisien kertolaskulla varustetun joukon  $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$  osajoukko

$$\text{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\} \subset \text{Mat}_2(\mathbb{R})$$

on vakaa. Osoita, että  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  varustettuna indusoidulla laskutoimituksella on ryhmä. Onko se kommutatiivinen ryhmä?

**Ratkaisu.** Jos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

niin niiden tulon

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

kaikki kertoimet ovat kokonaislukuja. Lisäksi huomataan, että

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Lineaarialgebrasta muistamme, että

$$\det(AB) = \det A \det B = 1 \cdot 1 = 1.$$

Siis  $SL_2(\mathbb{Z})$  on vakaa. Matrisien kertolasku on assosiatii-  
visen laskutoimituksen joukkoon  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

Matriisien kertolaskun neutraalialkio on joukossa  $SL_2(\mathbb{Z})$ , koska  $\det I_2 = 1$ . Koska  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = 1$ , niin lineaarialgebrasta tiedämme, että

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Siis  $SL_2(\mathbb{Z})$  on ryhmä.

Ryhmä  $SL_2(\mathbb{Z})$  ei ole kommutatiivinen, sillä

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

ja

$$UL = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = LU.$$

**4.** Olkoon  $G$  ryhmä ja olkoon  $e \in G$  neutraalialkio. Oletetaan, että jokaiselle  $g \in G$  pätee  $g^2 = e$ . Osoita, että  $G$  on kommutatiivinen ryhmä.

**Ratkaisu.** Olkoot  $x, y \in G$ . Oletuksen mukaan kaikille  $x, y \in G$  pätee

$$x^2 = y^2 = (xy)^2 = e,$$

joten

$$xy = x(xy)^2y = x^2yxy^2 = yx.$$

**5.** Monellako eri tavalla voit täydentää taulukon

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a		
b	b		

niin, että tuloksena on ryhmän laskutaulu? Mitä voit päätellä tästä havainnosta?

**Ratkaisu.** On vain yksi tapa täydentää laskutaulu siten, että kaikki alkiot esiintyvät jokaisella rivillä ja jokaisella sarakkeella:

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Jos nimittäin valitsisimme  $a * a = e$ , pitäisi olla  $a * b = b$  ja tällöin  $b$  olisi viimeisessä sarakkeessa kahdesti. Laskutaulun mukaan  $e$  on neutraalialkio ja  $ab = ba = e$ , joten jokaisella alkiolla on käänteisalkio. Koska alkioita on vain kolme, on helppo tarkastaa, että saadun laskutaulun kuvaama laskutoimitus on assosiatiiivinen.

Päätelmän voi tehdä loppuun toisellakin tavalla. Päättelimme juuri, että on korkeintaan yksi ryhmä, jossa on kolme alkioita  $e$ ,  $a$  ja  $b$ . Toisaalta tiedämme, että  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$  on ryhmä. Sen laskutaulu on

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Laskutaulussa käytetään kongruenssiluokan  $k + 3\mathbb{Z}$  merkintänä edustajaa  $k \in \mathbb{Z}$ .

Määritellään kuvaus  $f: \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \{e, a, b\}$  asettamalla  $f(0 + 3\mathbb{Z}) = e$ ,  $f(1 + 3\mathbb{Z}) = a$  ja  $f(2 + 3\mathbb{Z}) = b$ . Laskutauluja vertaamalla näemme, että  $f: (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\{e, a, b\}, *)$  on isomorfismi, joten  $(\{e, a, b\}, *)$  on ryhmä.

Tehdystä havainnosta seuraa, että kaikki ryhmät, joissa on täsmälleen kolme alkioita, ovat keskenään isomorfisia.

**6.** Olkoon  $G$  ryhmä ja olkoon  $(A, *)$  laskutoimituksella varustettu joukko. Olkoon  $\phi: G \rightarrow (A, *)$  homomorfismi. Osoita, että  $\phi(G)$  on laskutoimituksella varustetun joukon  $(A, *)$  vakaa osajoukko, joka on ryhmä indusoidulla laskutoimituksella.

**Ratkaisu.** Olkoot  $a, b \in \phi(G)$ . Tällöin on  $a_0, b_0 \in G$ , joille  $\phi(a_0) = a$  ja  $\phi(b_0) = b$ . Koska  $a_0 b_0 \in G$  ja  $\phi$  on homomorfismi, saamme  $ab = \phi(a_0)\phi(b_0) = \phi(a_0 b_0) \in \phi(G)$ . Siis  $\phi(G)$  on vakaa. Proposition 1.7(2) nojalla joukon  $\phi(G)$  laskutoimitus on assosiatiiivinen.

Olkoon  $e \in G$  neutraalialkio. Jokaiselle  $a = \phi(a_0) \in \phi(G)$  pätee

$$\phi(e)a = \phi(e)\phi(a_0) = \phi(ea_0) = \phi(a_0) = a$$

ja

$$a\phi(e) = \phi(a_0)\phi(e) = \phi(a_0e) = \phi(a_0) = a,$$

joten  $\phi(e)$  on neutraalialkio.

Jos  $a = \phi(a_0) \in \phi(G)$ , niin alkiolla  $a_0$  on käänteisalkio ryhmässä  $G$ . Tällöin

$$\phi(a_0^{-1})a = \phi(a_0^{-1})\phi(a_0) = \phi(a_0^{-1}a_0) = \phi(e)$$

ja

$$a\phi(a_0^{-1}) = \phi(a_0)\phi(a_0^{-1}) = \phi(a_0a_0^{-1}) = \phi(e),$$

joten alkion  $a$  käänteisalkio on  $\phi(a_0^{-1})$ . Siis  $\phi(G)$  on ryhmä.

**7.** Määritellään reaalilukujen joukossa  $\mathbb{R}$  laskutoimitus  $*$  asettamalla

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

Osoita, että  $(\mathbb{R}, *)$  on ryhmä, joka on isomorfinen ryhmän  $(\mathbb{R}, +)$  kanssa.

**Ratkaisu.** Olkoot  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Tällöin

$$a * (b * c) = \sqrt[3]{a^3 + \sqrt[3]{b^3 + c^3}^3} = \sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3}$$

ja

$$(a * b) * c = \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^3 + b^3} + c^3} = \sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3},$$

joten  $*$  on assosiatiivinen laskutoimitus. Lisäksi kaikille  $a \in \mathbb{R}$  pätee

$$0 * a = \sqrt[3]{0^3 + a^3} = a = \sqrt[3]{a^3 + 0^3} = a * 0,$$

joten 0 on neutraalialkio. Jokaiselle  $a \in \mathbb{R}$  pätee

$$a * (-a) = \sqrt[3]{a^3 + (-a)^3} = 0 = \sqrt[3]{(-a)^3 + a^3} = (-a) * a,$$

joten jokaisella  $a \in (\mathbb{R}, *)$  on käänteisalkio.

Määritellään kuvaus  $h: (\mathbb{R}, *) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ ,  $h(x) = x^3$ . Kuvaus  $h$  on selvästi bijektio, joten riittää osoittaa, että se on homomorfismi. Olkoot  $x, y \in (\mathbb{R}, *)$ . Tällöin

$$h(x * y) = x^3 + y^3 = h(x) + h(y),$$

joten  $h$  on homomorfismi.

8. Olkoon  $G$  ryhmä ja olkoon  $a \in G$ . Olkoon  $\phi_a: G \rightarrow G$ ,

$$\phi_a(g) = aga^{-1}.$$

Osoita, että  $\phi_a$  on ryhmän  $G$  automorfismi.

**Ratkaisu.** Olkoot  $g, h \in G$ . Tällöin  $\phi_a(gh) = agha^{-1} = aga^{-1}aha^{-1} = \phi_a(g)\phi_a(h)$ . Siis  $\phi_a$  on homomorfismi. Huomataan, että

$$\phi_{a^{-1}} \circ \phi_a(g) = a^{-1}aga^{-1}a = g$$

ja

$$\phi_a \circ \phi_{a^{-1}}(g) = aag^{-1}aa^{-1} = g$$

kaikilla  $g \in G$ , joten  $\phi_{a^{-1}} = \phi_a^{-1}$ . Siis  $\phi_a$  on automorfismi.