

# Algebra 1: Ryhmät

Tentti 19.5.2026

Koeaika 3 tuntia

Muista perustella vastauksesi huolellisesti!  
Kaikkia luentomateriaalissa ja harjoituksissa todistettuja tuloksia saa käyttää.

Ryhmiä  $GL_2(\mathbb{R})$ ,  $\text{Perm}(X)$  ja  $Z(G)$  määritelmät on kerrattu sivulla 2.  
Ne ovat tunnetusti ryhmiä.

1. Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow GL_2(\mathbb{R})$ ,

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Olkoon

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (a) Osoita, että  $f$  on homomorfismi.
- (b) Osoita, että  $U < GL_2(\mathbb{R})$ .
- (c) Onko  $U < GL_2(\mathbb{R})$  kommutatiivinen ryhmä?

**Ratkaisu.** (a) Olkoot  $x, y \in \mathbb{R}$ . Tällöin

$$f(x)f(y) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f(x+y),$$

joten  $f$  on homomorfismi.

(b)  $U = f(\mathbb{R})$  on ryhmän  $\mathbb{R}$  kuva homomorfismilla  $f$ , joten se on ryhmän  $GL_2(\mathbb{R})$  aliryhmä. Tämän voi osoittaa myös aliryhmätestillä. Lisäksi  $U$  on aito aliryhmä, koska esimerkiksi  $-I_2 \in GL_2(\mathbb{R})$ , mutta  $-I_2 \notin U$ .

(c) Reaalilukujen yhteenlaskun kommutatiivisuuden nojalla

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y+x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

joten  $U$  on kommutatiivinen. Tämän voi perustella myös sillä, että  $U$  on kommutatiivisen ryhmän kuva homomorfismissa, joten  $U$  on kommutatiivinen ryhmä Proposition 1.9 nojalla.

2. Olkoon  $\tau = (346125)(345718) \in S_8$ .

- (a) Esitä permutaatio  $\tau$  erillisten syklien tulona.
- (b) Määritä permutaation  $\tau$  kertaluku.
- (c) Onko  $\tau$  parillinen vai pariton permutaatio?

**Ratkaisu.** (a)  $\tau = (18436)(257)$ .

(b)  $\tau$  on erillisten 5- ja 3-syklin tulo. Siis  $\text{ord } \tau = \text{pyj}(3, 5) = 3 \cdot 5 = 15$ .

(c) 3-syklit ja 5-syklit ovat parillisia permutaatioita, joten niiden tulo on parillinen. Tämän voi perustella myös suoraan tehtävänannosta:  $\tau$  on kahden 6-syklin tulo. 6-syklit ovat parittomia, joten kahden sellaisen tulo on parillinen.

3. (a) Osoita, että  $(\mathbb{Z}/14\mathbb{Z})^\times$  on syklinen ryhmä.

(b) Kuinka monta alkioita on joukossa  $\{\phi: \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} : \phi \text{ on homomorfismi}\}$ ?

**Ratkaisu.** (a) Ryhmässä

$$(\mathbb{Z}/14\mathbb{Z})^\times = \{a + 14\mathbb{Z} : \text{syt}(a, 14) = 1\} = \{a + 14\mathbb{Z} : a \in \{1, 3, 5, 9, 11, 13\}\}$$

on 6 alkioita. Osoitetaan, että  $3 + 14\mathbb{Z}$  on virittäjä: Ryhmän  $(\mathbb{Z}/14\mathbb{Z})^\times$  alkioiden mahdolliset kertaluvut ovat 1, 2, 3 ja 6. Huomaamme, että  $(3 + 14\mathbb{Z})^2 = 9 + 14\mathbb{Z}$ ,  $(3 + 14\mathbb{Z})^3 = 27 + 14\mathbb{Z} \neq 1 + 14\mathbb{Z}$ , joten  $\text{ord}(3 + 14\mathbb{Z}) > 3$ . Siis  $\text{ord}(3 + 14\mathbb{Z}) > 3$ , joten  $3 + 14\mathbb{Z}$  virittää ryhmän  $(\mathbb{Z}/14\mathbb{Z})^\times$ .

(b) Tehtävän voi ratkaista eri tavoilla. Huomataan ensin, että *nollakuvaus*  $\mathbf{0}: \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ,

$$\mathbf{0}(k + 10\mathbb{Z}) = 0 + 9\mathbb{Z}$$

kaikilla  $k + 10\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ , on homomorfismi:

$$\mathbf{0}((k + 10\mathbb{Z}) + (\ell + 10\mathbb{Z})) = 0 + 9\mathbb{Z} = (0 + 9\mathbb{Z}) + (0 + 9\mathbb{Z}) = \mathbf{0}(k + 10\mathbb{Z}) + \mathbf{0}(\ell + 10\mathbb{Z}).$$

Siis joukossa

$$\mathcal{H} = \{\phi: \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} : \phi \text{ on homomorfismi}\}$$

on ainakin nollakuvaus.

**Tapa 1:** Olkoon  $\phi: \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$  homomorfismi. Lagrangen lauseen nojalla

$$\#\phi(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) \in \{1, 3, 9\}. \quad (1)$$

Lagrangen lauseen nojalla  $\#\ker \phi \in \{1, 2, 5, 10\}$ , joten ensimmäisen isomorfismlauseen nojalla

$$\#\phi(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) = \frac{\#(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})}{\#\ker \phi} \in \{1, 2, 5, 10\}. \quad (2)$$

Havaintojen (??) ja (??) nojalla  $\#\phi(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) = 1$ , joten  $\phi(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) = \{0 + 9\mathbb{Z}\}$  ja  $\phi = \mathbf{0}$ . Siis joukossa  $|H|$  on täsmälleen yksi alkio.

**Tapa 2:** Olkoon  $\phi: \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$  homomorfismi ja olkoon  $\phi(1 + 10\mathbb{Z}) = a + 9\mathbb{Z}$ . Neutraali-alkio kuvautuu neutraali-alkioksi, joten käyttämällä sitä, että  $\phi$  on homomorfismi saamme (monikertamerkintää käyttämällä)

$$\begin{aligned} 0 + 9\mathbb{Z} &= \phi(0 + 10\mathbb{Z}) = \phi(10 + 10\mathbb{Z}) = 10\phi(1 + 10\mathbb{Z}) = 10(a + 9\mathbb{Z}) = a + 9\mathbb{Z} + 9(a + 9\mathbb{Z}) \\ &= a + 9\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Koska  $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$  on syklinen ryhmä, saamme kaikille  $k + 10\mathbb{Z}$

$$\phi(k + 10\mathbb{Z}) = k\phi(1 + 10\mathbb{Z}) = k(0 + 9\mathbb{Z}) = 0 + 9\mathbb{Z}.$$

Siis  $\phi = \mathbf{0}$  ja joukossa  $\mathcal{H}$  on täsmälleen yksi alkio.

Olkoon  $G$  ryhmä. Isomorfismi  $\alpha: G \rightarrow G$  on ryhmän  $G$  *automorfismi*. Olkoon

$$\text{Aut}(G) = \{\alpha: G \rightarrow G : \alpha \text{ on automorfismi}\} \subset \text{Perm}(G).$$

Olkoon  $a \in G$  ja olkoon  $\phi_a: G \rightarrow G$ ,

$$\phi_a(g) = aga^{-1}.$$

Harjoituksissa osoitettiin, että  $\phi_a \in \text{Aut}(G)$ . Olkoon

$$\text{Inn}(G) = \{\phi_a : a \in G\} \subset \text{Aut}(G).$$

4. Olkoon  $G$  ryhmä.

(a) Osoita, että  $\text{Aut}(G) \leq \text{Perm}(G)$ .

(b) Osoita, että kuvaus  $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(G)$ ,  $\rho(a) = \phi_a$ , on homomorfismi.

(c) Osoita, että  $\text{Inn}(G) \cong G/Z(G)$ .

**Ratkaisu.** (a) Käytetään aliryhmätestiä. Identtinen kuvaus  $\text{id}: G \rightarrow G$  on isomorfismi, joten  $\text{Aut}(G) \neq \emptyset$ . Kurssilla on osoitettu, että homomorfismien yhdistetty kuvaus on homomorfismi ja bijektioiden yhdistetty kuvaus on bijektio, joten kahden automorfismin  $\phi, \psi: G \rightarrow G$  yhdistetty kuvaus  $\psi \circ \phi$  on automorfismi. Aliryhmätestin nojalla  $\text{Aut}(G) \leq \text{Perm}(G)$ .

(b) Jos  $a, b \in G$ , niin kaikille  $x \in G$  pätee

$$\rho(ab)(x) = \phi_{ab}(x) = (ab)x(ab)^{-1} = a(bxb^{-1})a^{-1} = \phi_a(\phi_b(x)) = \rho(a) \circ \rho(b)(x).$$

(c) Määritelmän nojalla  $\text{Im}(\rho) = \rho(G) = \text{Inn}(G)$ . Automorfismi  $\rho(g)$  on identtinen automorfismi täsmälleen silloin, kun  $g^{-1}hg = h$  kaikille  $h \in G$ , siis täsmälleen silloin, kun  $g \in Z(G)$ . Kuvaus  $\rho$  on siis surjektiivinen homomorfismi, jonka ydin on  $Z(G)$ . Väite seuraa ryhmien isomorfismilauseesta.

Tehtävien pisteet: 6+6+8+10
-----------------------------

Matriisien kertolaskulla varustettu joukko

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$$

on  $\mathbb{R}$ -kertoiminen *yleinen lineaarinen ryhmä*.

Olkoon  $X$  epätyhjä joukko. Laskutoimituksella varustettu joukko

$$\mathrm{Perm}(X) = (\{f: X \rightarrow X : f \text{ on bijektio}\}, \circ)$$

on joukon  $X$  *permutaatioryhmä*.

Ryhmän  $G$  *keskus* on

$$Z(G) = \{z \in G : zg = gz \text{ kaikilla } g \in G\}.$$