

## 7. NORMAALI ALIRYHMÄ JA TEKIJÄRYHMÄ

Tarkastelemme luvun aluksi ryhmän ja sen aliryhmien suhdetta. Olkoon  $G$  ryhmä ja olkoon  $H < G$  aito aliryhmä. Alkion  $g \in G$  vasen sivuluokka (aliryhmän  $H$  suhteen) on

$$gH = \{gh : h \in H\}$$

ja sen oikea sivuluokka (aliryhmän  $H$  suhteen) on

$$Hg = \{hg : h \in H\}.$$

**Propositio 7.1.** *Olkoon  $G$  ryhmä, ja olkoon  $H$  sen aito aliryhmä. Tällöin*

- (1)  $gH = H$ , jos ja vain jos  $g \in H$ .
- (2)  $Hg = H$ , jos ja vain jos  $g \in H$ .
- (3) Vasemmat sivuluokat muodostavat ryhmän  $G$  osituksen.
- (4) Oikeat sivuluokat muodostavat ryhmän  $G$  osituksen.
- (5) Joukot  $H$ ,  $gH$  ja  $Hg$  ovat yhtä mahtavia.

*Todistus.* (1) ja (2) Harjoitustehtävä 66.

(3) Vasempien sivuluokkien yhdiste on koko  $G$  sillä  $x \in xH$  kaikille  $x \in G$ . Osoitetaan, että vasemmat sivuluokat leikkaavat vain, jos ne ovat sama sivuluokka. Jos  $xH \cap yH \neq \emptyset$ , on  $h, h' \in H$ , joille  $xh = yh'$ . Mutta tällöin, jos  $g \in xH$ , niin  $g = xh'' = yh'h^{-1}h'' \in yH$ . Vastaava päättely antaa inklusion toiseen suuntaan. Kohdan (4) todistus on samanlainen.

(5) Vasemman sivuluokan määritelmän nojalla kuvaus  $\ell_x: H \rightarrow xH$ ,  $\ell_x h = xh$ , on surjektio. Supistussäännöstä (Propositio 4.4) seuraa, että  $\ell_x$  on injektio. Vastaavasti kuvaus  $r_x: H \rightarrow Hx$ ,  $r_x h = hx$ , antaa bijektion joukkojen  $H$  ja  $Hx$  välille.  $\square$

Propositioiden 7.1 ja 3.5 mukaan vasemmat sivuluokat määräävät ekvivalenssirelaation, jonka ekvivalenssiluokat ovat vasemmat sivuluokat ja vastaavasti oikeat sivuluokat määräävät ekvivalenssirelaation, jonka ekvivalenssiluokat ovat oikeat sivuluokat. Vasempien sivuluokkien kokoelmalle käytetään merkintää  $G/H$  ja oikeiden sivuluokkien kokoelmalle käytetään merkintää  $H \setminus G$ . Jälkimmäistä merkintää ei pidä sekoittaa joukkojen erotukseen.

**Propositio 7.2.** *Olkoon  $G$  ryhmä ja olkoon  $H \leq G$ . Joukot  $G/H$  ja  $H \setminus G$  ovat yhtä mahtavia.*

*Todistus.* Harjoitustehtävä 67  $\square$

Yleisessä tapauksessa alkion  $x$  vasen ja oikea sivuluokka eroavat toisistaan.

**Esimerkki 7.3.** Olkoon  $H = \langle (12) \rangle < S_3$ . Aliryhmän  $H$  vasemmat sivuluokat ovat

$$\begin{aligned} H &= (12)H = \{\text{id}, (12)\}, \\ (123)H &= (13)H = \{(123), (13)\} \quad \text{ja} \\ (132)H &= (23)H = \{(132), (23)\} \end{aligned}$$

Sen oikeat sivuluokat ovat

$$\begin{aligned} H &= H(12) = \{\text{id}, (12)\}, \\ H(123) &= H(23) = \{(123), (23)\} \quad \text{ja} \\ H(132) &= H(13) = \{(132), (13)\}. \end{aligned}$$

Osoittautuu siis, että vasen sivuluokka  $(123)H$  esiinny lainkaan oikeiden sivuluokkien kokoelmassa. Siis vasemmat ja oikeat sivuluokat määräävät kaksi erilaista ryhmän  $G$  ositusta ja niitä vastaavat ekvivalenssirelaatiot ovat siis kaksi eri relaatiota.

Usein, jos ryhmä  $G$  ei ole kommutatiivinen, sillä on aliryhmiä, joiden vasemmat ja oikeat sivuluokat eroavat toisistaan. Harjoitustehtävissä 69–71 tarkastellaan esimerkkiä ryhmästä, joka ei ole kommutatiivinen vaikka sen kaikkien aliryhmien vasemmat ja oikeat sivuluokat ovat samoja joukkoja. Kommutatiivisten ryhmien tilanne on yksinkertaisempi:

**Lemma 7.4.** *Olkoon  $G$  kommutatiivinen ryhmä. Tällöin jokaiselle  $x \in G$  ja jokaiselle  $H \leq G$  pätee  $xH = Hx$ .*  $\square$

**Esimerkki 7.5.** Kongruenssi modulo  $q$  on aliryhmän  $q\mathbb{Z}$  määräämä ekvivalenssirelaatio. Koska  $(\mathbb{Z}, +)$  on kommutatiivinen, aliryhmän  $q\mathbb{Z}$  vasemmat ja oikeat sivuluokat ovat samoja ja kongruenssin modulo  $q$  ekvivalenssiluokat eli kongruenssiluokat ovat joukot

$$[n] = \{n + kq : k \in \mathbb{Z}\} = n + q\mathbb{Z} = \{kq + n : k \in \mathbb{Z}\} = q\mathbb{Z} + n,$$

koska laskutoimitukselle käytetään additiivista merkintää. Kongruenssiluokkien joukolle Esimerkissä 3.9 käyttöön otettu merkintä  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  on yllä käyttöönotetun yleisemmän merkintätavan mukainen. Kongruenssiluokkien laskutoimitukset voidaan siis kirjoittaa myös näin

$$(n + q\mathbb{Z}) + (m + q\mathbb{Z}) = (n + m) + q\mathbb{Z}$$

ja

$$(n + q\mathbb{Z})(m + q\mathbb{Z}) = nm + q\mathbb{Z}.$$

Ryhmän ja sen aliryhmän suhdetta kuvaava indeksi voidaan määritellä kumman tahansa aliryhmään  $H$  liittyvän ekvivalenssirelaation avulla Proposition 7.2 nojalla:

**Määritelmä 7.6.** Aliryhmän  $H < G$  indeksi on

$$[G : H] = \#(G/H) = \#(H \backslash G).$$

**Esimerkki 7.7.** (a) Aliryhmän  $C_2 \times \{e\}$  indeksi ryhmässä  $C_2 \times C_2$  on

$$[C_2 \times C_2 : C_2 \times \{e\}] = 2.$$

(b)  $[\mathbb{R}^2 : \mathbb{R} \times \{0\}] = \infty$ , sillä sivuluokat ovat  $\mathbb{R} \times \{a\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$

**Lause 7.8** (Lagrange'n lause). *Olkoon  $G$  äärellinen ryhmä, ja olkoon  $H < G$ . Tällöin*

$$[G : H] = \frac{\#G}{\#H}.$$

*Todistus.* Proposition 7.1 nojalla kaikki sivuluokat ovat yhtä mahtavia ja sivuluokat osittavat ryhmän  $G$ .  $\square$

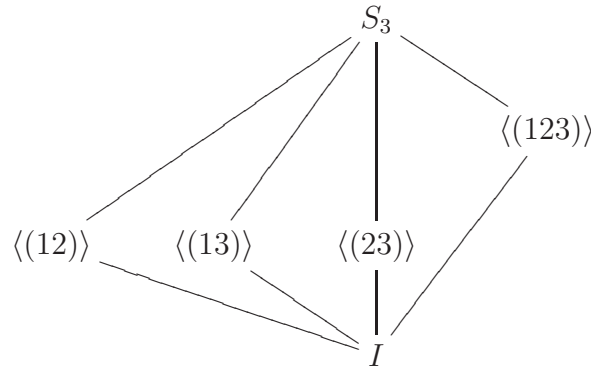
**Propositio 7.9.** *Olkoon  $G$  äärellinen ryhmä. Tällöin  $g^{\#G} = e$  jokaiselle  $g \in G$ .*

*Todistus.* Olkoon  $H = \langle g \rangle$ . Tällöin  $\#H = \text{ord } g$ . Koska Lagrange'n lauseen mukaan  $\#G = k\#H$  jollain  $k \in \mathbb{N}$ , pätee potenssisääntöjen ja Lemman 6.2 nojalla

$$g^{\#G} = g^{k \text{ord } g} = (g^{\text{ord } g})^k = e^k = e. \quad \square$$

Koska ryhmän kertaluku ja aliryhmän indeksi ovat luonnollisia lukuja, Lagrange'n lause antaa äärellisen ryhmän  $G$  aliryhmien mahdolliset indeksit ja kertaluvut.

**Esimerkki 7.10.** Ryhmän  $S_3$  kertaluku on 6, joten sen aliryhmien mahdolliset kertaluvut (ja indeksit) ovat 1, 2, 3 ja 6. Kolmen alkion permutaatioiden ryhmän aliryhmärakenne on yksinkertainen ja sitä voi havainnollistaa *aliryhmäkaaviolla*:



Aliryhmäkaaviossa tarkasteltavan ryhmän aliryhmät asetellaan päällekkäisille tasoille kertaluvun mukaan siten, että kertaluvultaan suuremmat ryhmät ovat ylemmillä tasoilla. Aliryhmä  $H$  yhdistetään janalla ylemmällä tasolla olevan aliryhmän  $K$  kanssa, jos  $H < K$  eikä ole aliryhmää  $L$ , jolle pätee  $H < L < K$ . Ylläolevassa kaaviossa  $I = \{\text{id}\}$ .

Esimerkissä 7.10 permutaatioryhmällä  $S_3$  on jokaista Lagrangen lauseen sallimaa kokoa olevia aliryhmiä. Aina ei kuitenkaan ole näin, Esimerkissä 7.27 osoitetaan, että ryhmällä  $A_4$  ei ole kuuden alkion aliryhmää vaikka  $\#A_4 = 12 = 2 \times 6$ .

**Määritelmä 7.11.** Ryhmän  $G$  aliryhmä  $H$  on *normaali*, jos  $gH = Hg$  kaikille  $g \in G$ . Jos  $H$  on ryhmän  $G$  normaali aliryhmä, merkitään  $H \trianglelefteq G$ , aitoa normaalia aliryhmää merkitään  $H \triangleleft G$ .

Koska ryhmän  $G$  normaalin aliryhmän  $H$  vasemmat ja oikeat sivuluokat määräävät saman osituksen ryhmälle  $G$ , ne määräävät saman ekvivalenssirelaation. ovat samat. Tämä on oleellisen tärkeää tarkasteltaessa ryhmän  $G$  laskutoimituksen yhteensopivuutta sivuluokkien määräämän ekvivalenssirelaation kanssa Lauseessa 7.20.

**Esimerkki 7.12.** (a) Ryhmä itse ja neutraali-alkion muodostama aliryhmä ovat normaaleja.

(b) Lemman 7.4 mukaan  $n\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$  ja  $\mathbb{R} \times \{0\} \triangleleft \mathbb{R}^2$ , mutta Esimerkin 7.3 aliryhmä  $\langle(12)\rangle < S_3$  ei ole normaali.

Joissain tilanteissa normaalius on helppo tarkastaa:

**Lemma 7.13.** Jos aliryhmän  $H < G$  indeksi on kaksi, se on normaali.

*Todistus.* Vasemmat sivuluokat ovat  $H$  ja  $G \setminus H$ , samoin oikeat sivuluokat. □

**Lemma 7.14.** Olkoon  $K \trianglelefteq G$  ja  $K < H < G$ . Tällöin  $K \trianglelefteq H$ . □

**Esimerkki 7.15.**  $A_n \triangleleft S_n$ , sillä  $\#S_n = n! = 2 \#A_n$ , joten  $[S_n : A_n]$  kaikilla  $n \geq 3$ . Erityisesti  $C_3 \cong \langle(123)\rangle = A_3 \triangleleft S_3$ .

Usein on kätevä käyttää seuraavaa normaalin aliryhmän karakterisointia:

**Propositio 7.16.** Ryhmän  $G$  aliryhmä  $H$  on normaali, jos ja vain jos  $ghg^{-1} \in H$  kaikilla  $h \in H$  ja kaikilla  $g \in G$

*Todistus.* Jos  $H$  on normaali, niin  $gH = Hg$  kaikille  $g \in G$ . Siis jokaiselle  $g \in G$  ja  $h \in H$  pätee  $gh = h'g$  jollain  $h' \in H$ , joten  $ghg^{-1} = h' \in H$ .

Jos taas kaikille  $g \in G$  ja  $h \in H$  pätee  $ghg^{-1} \in H$ , niin jokaiselle  $g \in G$  ja  $h \in H$  on  $h' \in H$ , jolle  $ghg^{-1} = h'$ . Siis  $gh = h'g \in Hg$ , joten  $gH \subset Hg$  kaikille  $g \in G$ .

Samoin saadaan  $hg^{-1} \in g^{-1}H$ , joten  $g^{-1}H \subset Hg^{-1}$  kaikille  $g \in G$ . Koska jokainen ryhmän  $G$  alkio on jonkin alkion käänteisalkio, väite on todistettu.  $\square$

Sovellamme Propositiota 7.16, kun osoitamme, että normaalit aliryhmät sopivat hyvin yhteen homomorfismien kanssa.

**Propositio 7.17.** *Olkoon  $\phi: G \rightarrow G'$  ryhmähomomorfismi.*

(1) *Olkoon  $H \trianglelefteq G$ . Tällöin  $\phi(H) \trianglelefteq \text{Im } \phi$ .*

(2) *Olkoon  $H' \trianglelefteq G'$ . Tällöin  $\phi^{-1}(H') \trianglelefteq G$ .*

*Todistus.* (1) Proposition 5.6 nojalla  $\phi(H) \leq \phi(G)$ . Olkoot  $a' \in \phi(H)$  ja  $g' \in \phi(G)$ . Tällöin on  $a \in H$  ja  $g \in G$ , joille  $a' = \phi(a)$  ja  $g' = \phi(g)$ . Nyt

$$g'a'(g')^{-1} = \phi(g)\phi(a)\phi(g)^{-1} = \phi(gag^{-1}) \in \phi(H),$$

koska  $gag^{-1} \in H$ . Väite seuraa Proposition 7.16 nojalla.

(2) Harjoitustehtävä 74.  $\square$

Propositiosta 7.17 saadaan tärkeänä erikoistapauksena

**Seuraus 7.18.** *Ryhmähomomorfismin ydin on normaali aliryhmä.*  $\square$

**Esimerkki 7.19.** (a)  $A_n = \ker \epsilon \triangleleft S_n$ .

(b)  $\text{SL}_n(\mathbb{R}) = \ker \det \triangleleft \text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

**Lause 7.20.** *Olkoon  $G$  ryhmä ja olkoon  $H < G$  aliryhmä. Tällöin vasempien tai oikeiden sivuluokkien määräämä ekvivalenssirelaatio on yhteensopiva ryhmän  $G$  laskutoimituksen kanssa, jos ja vain jos  $H$  on ryhmän  $G$  normaali aliryhmä.*

*Todistus.* (1) Oletetaan, että  $H$  on normaali. Olkoot  $x' \in xH$  ja  $y' \in yH$ . Tällöin on  $h_1, h_2, h_3 \in H$ , joille  $x' = xh_1$ ,  $y' = yh_2$  ja  $h_1y = yh_3$ , joten

$$x'y' = xh_1yh_2 = xyh_3h_2 \in xyH.$$

Siis  $x'y'H$  ja  $xyH$  Proposition 7.1 nojalla ja laskutoimitus on yhteensopiva sivuluokkien määräämän ekvivalenssirelaation kanssa.

(2) Jos laskutoimitus on yhteensopiva vasempien sivuluokkien määräämän relaation kanssa, niin  $G/H$  varustettuna tekijälaskutoimituksella on ryhmä: Tekijälaskutoimituksen assosiatiivisuus osoitettiin Propositiossa 3.8. Koska luonnollinen homomorfismi on surjektiivinen, se kuvaa ryhmän  $G$  neutraalialkion tekijälaskutoimituksen neutraalialkioksi Proposition 1.14 nojalla, pätee  $gHH = gH' = HgH$  ja  $(gH)(g^{-1}H) = H$  kaikilla  $g \in G$ .

Luonnollinen homomorfismi on siis ryhmähomomorfismi  $G \rightarrow G/H$  ja sen ydin on  $H$ . Proposition 7.17 nojalla  $H$  on normaali.  $\square$

**Seuraus 7.21.** *Jos  $H \trianglelefteq G$ , niin tekijäjoukko  $G/H$  varustettuna tekijälaskutoimituksella on ryhmä. Tekijäryhmän  $G/H$  neutraalialkio on  $H$ .*  $\square$

Ryhmää  $G/H$  kutsutaan normaalien aliryhmän  $H$  määräämäksi ryhmän  $G$  tekijäryhmäksi. Esimerkiksi ryhmä  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , jota tarkasteltiin esimerkin 4.2 kohdassa (a), on kongruenssia  $a \equiv b \pmod{q}$  vastaava kokonaislukujen ryhmän tekijäryhmä. Additiivisen ryhmän alkion  $x$  sivuluokalle käytetään merkintää  $x + H$  ja tekijäryhmän laskutoimitus on siis

$$(x + H) + (y + H) = (x + y) + H.$$

Sykliset ryhmät käyttäytyvät hyvin tekijäryhmienkin suhteen

**Propositio 7.22.** *Jokainen syklisen ryhmän tekijäryhmä on syklinen.*

*Todistus.* Harjoitustehtävä 76. □

Todistamme seuraavaksi tärkeimmän tekijäryhmiä koskevan tuloksen. Todistus on Lauseen 5.18(1) todistuksen yleistys.

**Lause 7.23** (Ryhmiä (ensimmäinen) isomorfismilause). *Olkoon  $\phi: G \rightarrow G'$  ryhmähomomorfismi. Tällöin*

$$\text{Im } \phi \cong G / \ker \phi.$$

*Todistus.* Jos  $x \ker \phi = y \ker \phi$ , niin jollain  $h \in \ker \phi$  pätee  $y = xh$ , joten

$$\phi(y) = \phi(xh) = \phi(x)\phi(h) = \phi(x).$$

Tähän havaintoon perustuen määritellään kuvaus  $\psi: G / \ker \phi \rightarrow \text{Im } \phi$ ,

$$\psi(x \ker \phi) = \phi(x),$$

joka on homomorfismi: Olkoot  $x, y \in G$ . Tällöin

$$\psi(x \ker \phi)\psi(y \ker \phi) = \phi(x)\phi(y) = \phi(xy) = \psi(xy \ker \phi) = \psi(x \ker \phi y \ker \phi).$$

Määritelmän mukaan  $\text{Im } \psi \subset \text{Im } \phi$  ja jokaiselle  $x \in G$  pätee  $\psi(x \ker \phi) = \phi(x)$ , joten  $\phi(x) \in \text{Im } \psi$  ja  $\psi$  on siis surjektio. Injektiivisyyden toteamiseksi osoitamme, että kuvauksen  $\psi$  ydin koostuu ainoastaan tekijäryhmän  $G / \ker \phi$  neutraalialkiosta  $\ker \phi$ . Jos  $\psi(x \ker \phi) = e'$ , niin  $\phi(x) = e'$ , joten  $x \in \ker \phi$ , mistä Proposition 7.1(1) nojalla seuraa  $x \ker \phi = \ker \phi$ . □

**Seuraus 7.24.** *Jos  $\phi: G \rightarrow G'$  on surjektiivinen ryhmähomomorfismi ja  $N = \ker \phi$ , niin  $[G : N] = \#G'$ .* □

**Lause 7.25.** *Olkoon  $\phi: G \rightarrow G'$  surjektiivinen ryhmähomomorfismi, ja olkoon  $H' \trianglelefteq G'$ . Tällöin  $G / \phi^{-1}(H') \cong G' / H'$ .*

*Todistus.* Proposition 7.17(2) mukaan  $H = \phi^{-1}(H') \trianglelefteq G$ . Olkoon  $\pi: G' \rightarrow G' / H'$  luonnollinen homomorfismi. Tällöin  $\tilde{\psi} = \pi \circ \phi: G \rightarrow G' / H'$  on surjektiivinen homomorfismi, jonka ydin on  $H$ . Lauseen 7.23 mukaan  $G / H \cong G' / H'$ . □

**Esimerkki 7.26.** (a)  $[\mathbb{Z}^2 : (2\mathbb{Z})^2] = 4$  sillä luonnollinen homomorfismi

$$\mathbb{Z}^2 \ni (k_1, k_2) \mapsto (k_1 + 2\mathbb{Z}, k_2 + 2\mathbb{Z}) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$$

on surjektio, jonka ydin on  $(2\mathbb{Z})^2$ .

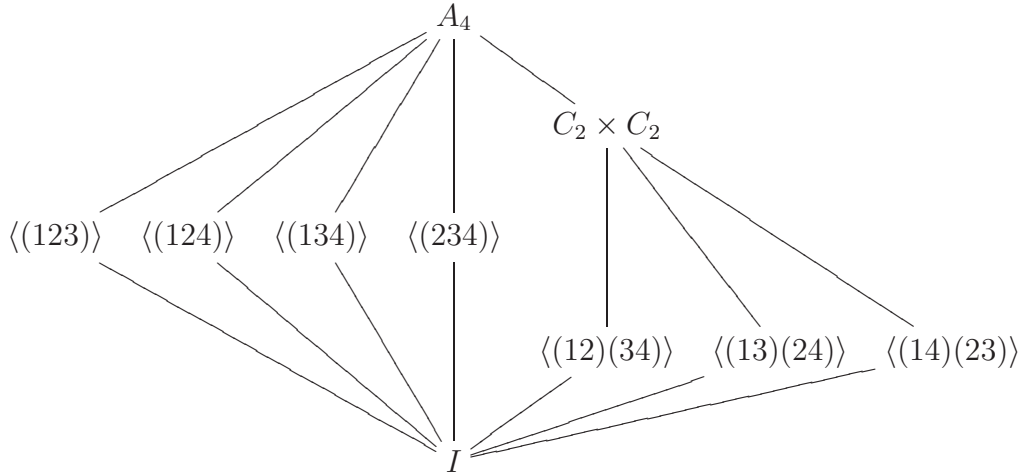
(b)  $\text{GL}_n(\mathbb{R}) / \text{SL}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times$  koska  $\det \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\times$  on surjektiivinen homomorfismi.

Ryhmiä isomorfismilause antaa vastaavuuden surjektiivisten homomorfismien ja normaali aliryhmien välille: Jos  $N \trianglelefteq G$ , niin luonnollinen homomorfismi on surjektiivinen homomorfismi  $G \rightarrow G/N$ . Toisaalta jokaisen ryhmähomomorfismin ydin on määrittelyryhmänsä normaali aliryhmä. Tämä vastaavuus ei kuitenkaan ole bijektiiivinen sillä esimerkiksi homomorfismeilla  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  ja  $k \circ \exp$ , missä  $k$  on kompleksikonjugointi, on sama ydin  $\ker \exp = \{k 2\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Esimerkki 7.27.** Osoitamme esimerkin avulla, että Lagrangen lauseen 7.8 käänteinen väite ei päde: Alternoivan ryhmän  $A_4$  kertaluku on  $\#A_4 = 4!/2 = 12$ . Jos  $H < A_4$  on aliryhmä, jonka kertaluku on 6, niin Lagrangen lauseen nojalla  $[A_4 : H] = 2$ . Lemman 7.13 nojalla  $H \triangleleft A_4$ , joten ensimmäisen isomorfismilauseen nojalla  $A_4/H \cong C_2$ . Siis kaikille  $g \in G$  pätee  $g^2H = gHgH = H$ , joten Proposition 7.1(1) nojalla  $g^2 \in H$  kaikille  $g \in G$ .

Kaikki 3-syklit ovat parillisia permutaatioita, joten ne kuuluvat ryhmään  $A_4$ . Jos  $g \in A_4$  on 3-sykli, niin  $g = g^4 = (g^2)^2 \in H$ . Kuitenkin ryhmässä  $A_4$  on 8 3-sykliä, joiden siis pitäisi sisältyä kuuden alkion ryhmään. Siis ryhmällä  $A_4$  ei ole kuuden alkion aliryhmää vaikka  $\#A_4 = 12 = 6 \times 2$ .

Ryhmän  $A_4$  aliryhmärakenne on seuraavan kaavion mukainen:



Mitkä tahansa kaksi ryhmän  $A_4$  kertaluvun 2 alkioista  $(12)(34)$ ,  $(13)(24)$  ja  $(14)(23)$  virittävät kaaviossa esiintyvä Kleinin neliryhmän  $C_2 \times C_2$ .

Esimerkin 6.9 tarkastelun yleistys kolmeen ulottuvuuteen osoittaa, että ryhmä  $A_4$  on isomorfinen säännöllisen tetraedrin symmetriaryhmän kanssa.

**Esimerkki 7.28.** (a) Harjoitustehtävässä 33 osoitettiin, että ryhmän  $G$  automorfismit muodostavat ryhmän  $\text{Aut}(G)$ . Olkoon  $a \in G$ . Kuvaus  $\phi_a: G \rightarrow G$ ,  $\phi_a(g) = aga^{-1}$  on ryhmän  $G$  automorfismi: Se on homomorfismi:

$$\begin{aligned} \phi_a(g)\phi_a(g') &= (aga^{-1})(ag'a^{-1}) = (ag)(a^{-1}a)(g'a^{-1}) = (ag)e(g'a^{-1}) \\ &= (ag)(g'a^{-1}) = a(gg')a^{-1} = \phi_a(gg'). \end{aligned}$$

Se on myös bijektio, koska sillä on käänteiskuvaus  $\phi_a^{-1}: G \rightarrow G$ :  $\phi_a^{-1}(g) = a^{-1}ga$ . Kuvaus  $\phi_a$  on ryhmän  $G$  sisäinen automorfismi.

Ryhmän  $G$  sisäiset automorfismit muodostavat sisäisten automorfismien ryhmän

$$\text{Inn}(G) = \{\phi_a : a \in G\} < \text{Aut}(G).$$

Harjoitustehtävässä 77 osoitetaan, että sisäisten automorfismien ryhmä on automorfismiryhmän normaali aliryhmä. Tekijäryhmä

$$\text{Out}(G) = \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$$

on ryhmän  $G$  ulkoisten automorfismien ryhmä.

(b) Automorfismi  $\phi_a$  on identtinen kuvaus täsmälleen silloin, kun  $aga^{-1} = g$  kaikilla  $g \in G$ . Tämän ehdon toteuttavat alkiot muodostavat ryhmän  $G$  keskuksen

$$Z(G) = \{z \in G : zg = gz \text{ kaikilla } g \in G\}.$$

Harjoitustehtävässä 78 osoitetaan, että  $Z(G)$  on ryhmän  $G$  normaali aliryhmä.

(c) Kuvaus  $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(G)$ ,  $\rho(a) = \phi_a$ , on surjektiivinen homomorfismi. Surjektiivisuus on selvää määritelmien nojalla ja homomorfisuus on suoraviivainen tarkastaa kuten Proposition 6.10 todistuksessa: Jos  $a, b \in G$ , niin kaikille  $x \in G$  pätee

$$\rho(ab)(x) = \phi_{ab}(x) = (ab)x(ab)^{-1} = a(bxb^{-1})a^{-1} = \phi_a(\phi_b(x)) = \rho(a) \circ \rho(b)(x).$$

Ryhmien isomorfismlauseen nojalla pätee siis

$$\text{Inn}(G) \cong G/Z(G).$$

(d) Matriisi  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  määrää ryhmän  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  sisäisen automorfismi  $\phi_A$ ,

$$\phi_A(B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = {}^t(B^{-1}).$$

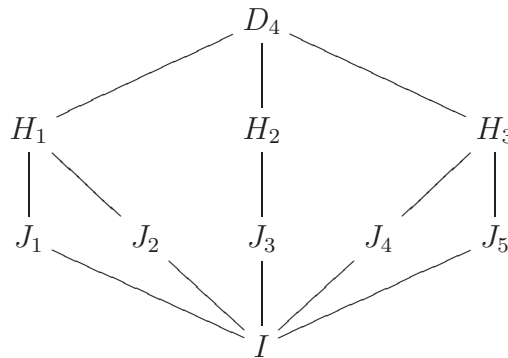
Harjoitustehtävässä 32 osoitettiin, että kuvaukset  $B \mapsto B^{-1}$  ja  $C \mapsto {}^tC$  eivät ole ryhmän  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  automorfismeja. Kuitenkin niiden yhdistetty kuvaus on automorfismi!

### Harjoitustehtäviä.

**Tehtävä 66.** Olkoon  $G$  ryhmä, ja olkoon  $H$  sen aito aliryhmä. Osoita, että  $gH = H$ , jos ja vain jos  $g \in H$

**Tehtävä 67.** Olkoon  $G$  ryhmä, ja olkoon  $H < G$ . Osoita, että tekijäjoukkojen välinen kuvaus  $b : G/H \rightarrow H \backslash G$ ,  $b(aH) = Ha^{-1}$  on bijektio.

**Tehtävä 68.** Täydennä diedriryhmän  $D_4$  aliryhmäkaavio



Kaaviossa esiintyvien aliryhmien indeksit ovat  $[D_4 : J_i] = 4$  ja  $[D_4 : H_j] = 2$  kaikilla  $1 \leq i \leq 5$  ja  $1 \leq j \leq 3$ .

Olko

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

ja

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}).$$

Olkoon  $H = \langle A, B \rangle < \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  matriisien  $A$  ja  $B$  virittämä aliryhmä.

**Tehtävä 69.** Osoita, että ryhmä  $H$  ei ole kommutatiivinen ja että  $\#H = 8$ .

**Tehtävä 70.** Osoita, että ryhmällä  $H$  on aliryhmien  $H$  ja  $\{I\}$  lisäksi neljä aliryhmää, jotka ovat kaikki normaaleja.

**Tehtävä 71.** Piirrä ryhmän  $H$  aliryhmäkaavio.

<sup>68</sup>Vihje: Kaikki ryhmät  $H_j$ ,  $1 \leq j \leq 3$  eivät ole isomorfisia.

<sup>69</sup>Vihje: Tarkasta ensin, että  $BA = -AB$  ja käytä tätä tietoa ja Propositiota 5.11

**Tehtävä 72.** Olkoon  $G$  äärellinen ryhmä. Olkoot  $K < H < G$ . Osoita Lagrangen lauseen avulla, että indekseille pätee:

$$[G : K] = [G : H][H : K].$$

**Tehtävä 73.** Olkoon  $G$  ryhmä. Olkoot  $K < H < G$  siten, että  $[G : H] < \infty$  ja  $[H : K] < \infty$ . Osoita, että indekseille pätee:

$$[G : K] = [G : H][H : K].$$

**Tehtävä 74.** Olkoon  $\phi: G \rightarrow G'$  ryhmähomomorfismi. Olkoon  $H' \trianglelefteq G'$ . Osoita, että

$$\phi^{-1}(H') \trianglelefteq G.$$

**Tehtävä 75.** Olkoon  ${}^tA$  neliömatriisin  $A$  transpoosi, ja olkoon  $I_n$  identtinen  $n \times n$ -matriisi. Olkoon

$$O(n) = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) : A {}^tA = I_n\}.$$

Osoita, että  $O(n) < \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Onko  $O(n) \triangleleft \text{GL}_n(\mathbb{R})$ ?

**Tehtävä 76.** Olkoon  $C$  syklinen ryhmä. Osoita, että kaikki ryhmän  $C$  tekijäryhmät ovat syklisiä.

**Tehtävä 77.** Olkoon  $G$  ryhmä. Osoita, että ryhmän  $G$  sisäiset automorfismit muodostavat ryhmän  $\text{Aut}(G)$  normaalin aliryhmän.

**Tehtävä 78.** Osoita, että ryhmän  $G$  keskus  $Z(G)$  on kommutatiivinen normaali aliryhmä.

**Tehtävä 79.** Määritä ryhmien  $S_3$ ,  $D_3$  ja  $C_2 \times C_2$  keskukset.

**Tehtävä 80.** Määritä ryhmien  $S_3$ ,  $D_3$  ja  $C_2 \times C_2$  sisäiset automorfismiryhmät.

---

<sup>73</sup>Vihje: Oletetaan, että  $G = \bigsqcup_{i=1}^m a_i H$  ja  $H = \bigsqcup_{j=1}^n b_j K$ . Osoita, että  $G = \bigsqcup_{i=1}^m \bigsqcup_{j=1}^n a_i b_j K$ .