Kompleksiluvut $\mathbb{C}$ saadaan varustamalla taso $\mathbb{R}^2$ komponenteittaisella yhteenlaskulla (joka on reaalilukujen yhteenlaskun tulo itsensä kanssa, katso Luku 1) ja kertolaskulla, joka määritellään asettamalla

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Huomaa, että

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$$

ja

$$(a, 0)(c, 0) = (ac, 0),$$

joten voimme ajatella kompleksilukuja $(a, 0)$ ja $(c, 0)$ reaalilukuina a ja c. Erityisesti otamme käyttöön merkinnät $(1, 0) = 1 \in \mathbb{C}$ ja $(0, 0) = 0 \in \mathbb{C}$.

Kompleksilukua $i = (0, 1)$ kutsutaan *imaginaariyksiköksi*. Jokainen kompleksiluku voidaan esittää yksikäsitteisesti summana

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + i\,b,$$

jossa käytetään edellä tehtyä sopimusta, jonka mukaan kompleksiluku $(a, 0)$ samastetaan reaaliluvun a kanssa. Näillä merkinnöillä kompleksilukujen laskutoimitukset ovat

$$\begin{aligned}(a + i\,b) + (c + i\,d) &= (a + c) + i(b + d),\\ (a + i\,b)(c + i\,d) &= (ac - bd) + i(ad + bc).\end{aligned}$$

Esimerkki 2.1. (a) $i^2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1$.
(b) $(1 + i)^2 = (1 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + i(1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = 2\,i$.
(c) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = i^4 = 1$.

Kompleksiluvun $z = a + i\,b$

- *reaaliosa* on $\mathrm{Re}(z) = a$,
- *imaginaariosa* on $\mathrm{Im}(z) = b$.
- *(kompleksi)konjugaatti* eli *liittoluku* on $\bar{z} = a - i\,b$
- *moduli* (eli itseisarvo) on

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \|(a, b)\|.$$

Propositio 2.2. *(1) Kompleksilukujen yhteen- ja kertolasku ovat assosiatiivisia ja kommutatiivisia laskutoimituksia.*

(2) Yhteenlaskun neutraalialkio on 0 *ja kertolaskun neutraalialkio on* 1.

(3) Kompleksilukujen kertolasku on distributiivinen yhteenlaskun suhteen.

(4) Jokaisella kompleksiluvulla z *on vastaluku* $-z$ *ja jokaisella nollasta poikkeavalla kompleksiluvulla* z *on käänteisluku*

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

(5) Kuvaus $j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $j(x) = x$ *on injektiivinen homomorfismi yhteenlaskun ja kertolaskun suhteen.*

Todistus. Kohdat (1)–(4) jätetään harjoitustehtäviksi.
(5) Määritelmän mukaan kaikille reaaliluvuille x pätee $j(x) = x + 0\,i$. Siispä

$$j(x + y) = x + y + 0\,i = (x + 0\,i) + (y + 0\,i) = j(x) + j(y)$$

ja

$$j(x)j(y) = (x + 0\,i)(y + 0\,i) = (xy - 0) + i(x\,0 + 0\,y) = xy + 0\,i = j(xy).$$

□

Koska kompleksilukujen kertolasku on kommutatiivinen, niin kaikille $w \in \mathbb{C}$ pätee $w\,i = i\,w$. Erityisesti siis, jos $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, voidaan kompleksilukua $x\,i$ merkitä haluttaessa myös $i\,x$. Jos x on "konkreettinen reaaliluku", käytetään yleensä järjestystä xi kuten Esimerkissä 2.1.

Kannattaa huomata myös se, että kompleksilukujen kertolaskut voidaan laskea "tavallisilla laskusäännöillä" huomioimalla, että $i^2 = -1$

$$\begin{aligned}(a + i\,b)(c + i\,d) &= a\,c + a\,i\,d + i\,b\,c + i\,b\,i\,d = ac + i\,ad + i\,bc + i^2\,bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc).\end{aligned}$$

Lemma 2.3. *Kompleksikonjugoinnille ja modulille pätee kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$*

(1) $\bar{\bar{z}} = z$,
(2) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$,
(3) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ *ja*
(4) $|\bar{z}| = |z|$
(5) $|zw| = |z||w|$.

Lisäksi moduli toteuttaa kolmioepäyhtälön:

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$, ja jos $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, niin sen moduli kompleksilukuna on sama kuin sen itseisarvo reaalilukuna.

Todistus. Kohdat (1)-(5) Harjoitustehtävässä 11.

Kolmioepäyhtälö on todistettu kurssilla Lineaarinen algebra ja geometria 1: Kompleksiluvun $z = x + i\,y$ moduli on vastaavan tason $\mathbb{R}^2$ pisteen (x, y) normi.

Viimeinen väite on selvä: Jos $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, niin $|x| = |x + 0\,i|$. □

Lemman 2.3 kohtien (1)–(3) avulla nähdään helposti

Propositio 2.4. *Kompleksikonjugointi on isomorfismi kompleksilukujen yhteenlaskun ja kertolaskun suhteen.*

Todistus. Ajatellaan ensin kompleksikonjugointia kuvauksena $k\colon (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}, +)$, $k(z) = \bar{z}$. Tällöin Lemman 2.3 kohdan (2) nojalla saadaan suoraan

$$k(z + w) = \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} = k(z) + k(w),$$

joten k on homomorfismi. Lisäksi Lemman 2.3 kohdan (1) nojalla jokaiselle $z \in \mathbb{C}$ pätee $z = k(k(z))$, joten k on bijektio, ja ensimmäinen väite on todistettu.

Toinen väite todistetaan samalla tavalla Lemman 2.3 kohdan (3) avulla. □

Napakoordinaattikuvaus $N\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$N(r, \phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi),$$

kuvaa määrittelyjoukkonsa (oikean puolitason) joukoksi $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Napakoordinaattien avulla voimme siis esittää jokaisen kompleksiluvun $z \neq 0$ muodossa

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Itse asiassa Lemman 2.3(5) nojalla

$$|z| = |r(\cos\phi + i\sin\phi)| = r|(\cos\phi + i\sin\phi)| = r\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = r,$$

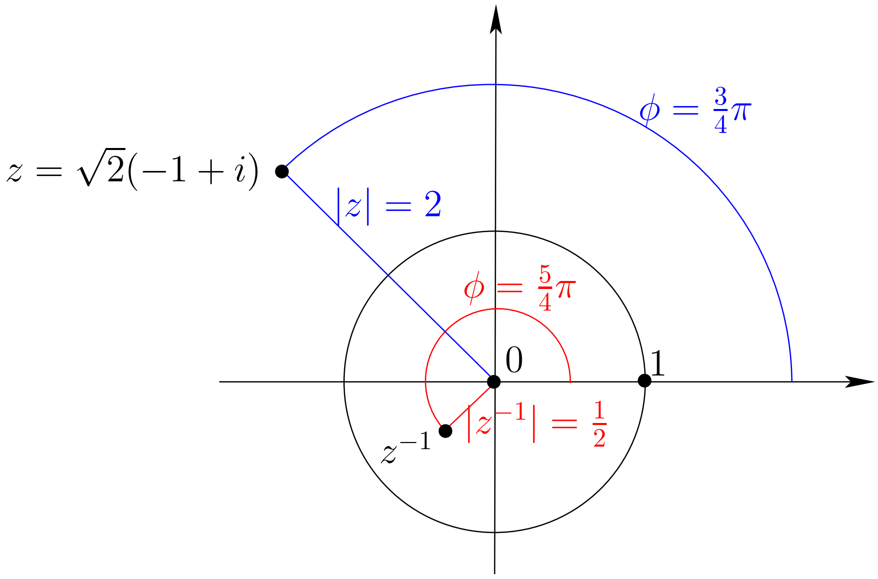
joten

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi),$$

missä $\phi \in \mathbb{R}$ on tason $\mathbb{R}^2$ vektorien $(1,0)$ ja $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ välinen kulma "positiiviseen kiertosuuntaan". Kulma ϕ on kompleksiluvun z *argumentti*. Se on tarkalleen ottaen määritelty täyden kulman 2π monikertaa vaille trigonometristen funktioiden jaksollisuuden nojalla:

$$\cos(\phi + k\,2\pi) + i\sin(\phi + k\,2\pi) = \cos\phi + i\sin\phi$$

kaikilla $k \in \mathbb{Z}$.



Kuva 1. Kompleksiluvun $\sqrt{2}(-1+i)$ ja sen käänteisluvun esitykset napakoordinaattien avulla.

Trigonometristen funktioiden kulman yhteenlaskukaavojen avulla saamme seuraavan tuloksen, jonka mukaan kompleksilukujen kertolasku sopii hyvin yhteen napakoordinaattiesityksen kanssa:

Propositio 2.5. *(1) Olkoot $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, ja $w = s(\cos\theta + i\sin\theta)$. Tällöin*

$$zw = rs(\cos(\phi+\theta) + i\sin(\phi+\theta)).$$

(2) Olkoot $z_k = r_k(\cos\phi_k + i\sin\phi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Tällöin

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = z_1 z_2 \cdots z_n = (\prod_{k=1}^{n} r_k)(\cos(\sum_{k=1}^{n}\phi_k) + i\sin(\sum_{k=1}^{n}\phi_k)).$$

Todistus. Harjoitustehtävä 12. □

Sovellamme napakoordinaattiesitystä ja Propositiota 2.5 kompleksilukujen juurten tarkasteluun: Kompleksiluku z, jolle pätee $z^k = w$ on kompleksiluvun w *k:s juuri*. Erityisen tärkeitä ovat *ykkösen juuret*, jotka ovat ne kompleksiluvut $z \in \mathbb{C}$, joille pätee $z^k = 1$ jollain $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Lemma 2.6. *Luvulla $1 \in \mathbb{C}$ on m kappaletta m. juuria. Jos*

$$\zeta_m = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}, \tag{1}$$

niin ykkösen m. juuret ovat $\zeta_m, \zeta_m^2, \ldots, \zeta_m^{m-1}$ ja 1.

Todistus. Proposition 2.5 nojalla

$$\zeta_m^m = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1.$$

Jos $n \in \{1, 2 \ldots, m\}$, niin Proposition 2.5 nojalla

$$\zeta_m^n = \cos \frac{2\pi n}{m} + i \sin \frac{2\pi n}{m},$$

joten

$$(\zeta_m^n)^m = \cos \frac{2\pi nm}{m} + i \sin \frac{2\pi nm}{m} = 1.$$

Siis kaikki luvut ζ_m^n ovat ykkösen juuria.

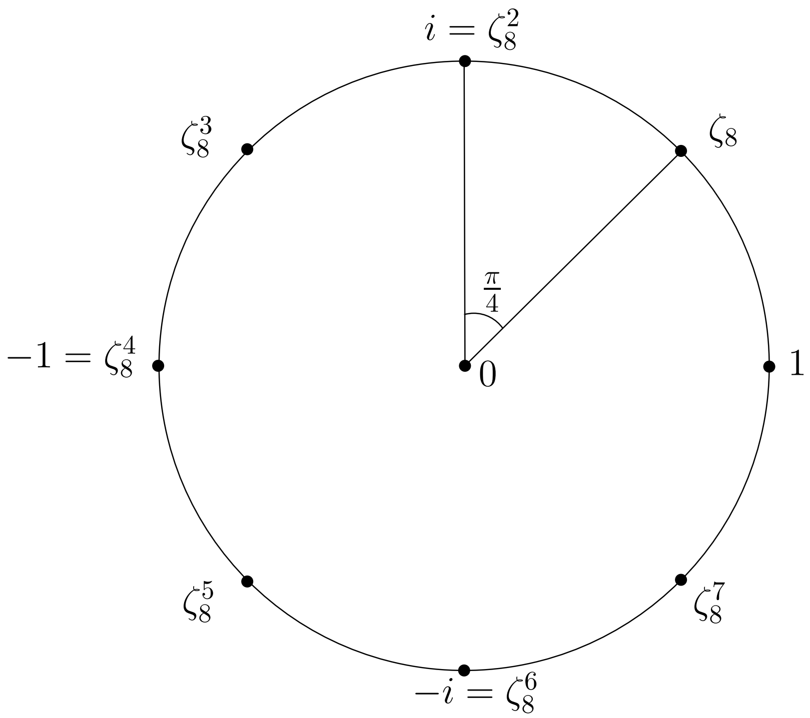
Toisaalta, jos $\zeta = r(\cos\phi + i \sin\phi)$ ja $\zeta^m = 1$, niin Proposition 2.5 nojalla $r^m = 1$ ja $m\phi = k\,2\pi$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$. Siis $r = 1$ ja

$$\phi = \frac{k\,2\pi}{m} = D\,2\pi + \frac{R\,2\pi}{m}$$

joillekin $D, R \in \mathbb{Z}$, $0 \leq R \leq m-1$, sillä $k = Dm + R$ joillekin tällaisille kokonaisluvuille D ja R. Siis

$$\zeta = \cos \frac{R\,2\pi}{m} + i \sin \frac{R\,2\pi}{m} = \zeta_m^R,$$

joten kaikki ykkösen juuret sisältyvät joukkoon $\{1, \zeta_m, \zeta_m^2, \ldots, \zeta_m^{m-1}\}$. □



Kuva 2. Ykkösen kahdeksannet juuret.

Propositio 2.7. *Jokaisella kompleksiluvulla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ on m kappaletta m. juuria. Jos*

$$z = r(\cos\phi + i \sin\phi),$$

niin juuret ovat

$$w_1, w_1\zeta_m, \ldots, w_1\zeta_m^{m-1},$$

missä

$$w_1 = \sqrt[m]{r}(\cos\frac{\phi}{m} + i \sin\frac{\phi}{m})$$

ja

$$\zeta_m = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}.$$

Todistus. Harjoitustehtävä 14. □

Esimerkki 2.8. Luvun $2 \in \mathbb{C}$ kolmannet juuret ovat $\sqrt[3]{2}$,

$$\sqrt[3]{2}\big(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\big) = \sqrt[3]{2}\big(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\big)$$

ja

$$\sqrt[3]{2}\big(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\big) = -\sqrt[3]{2}\big(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\big)\,.$$

Proposition 2.7 avulla voimme myös ratkaista toisen, kolmannen ja neljännen asteen polynomiyhtälöt.

Propositio 2.9. *Olkoot $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$. Olkoon $\sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$ toinen kompleksiluvun $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0$ neliöjuurista. Luvut*

$$z_1 = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0} \quad ja \quad z_2 = -\frac{a_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$$

ovat yhtälön

$$z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

ratkaisuja.

Todistus. Havaitsemme, että

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

mistä väite seuraa. □

Kaikki toisen asteen kompleksikertoimiset polynomiyhtälöt voidaan ratkaista Proposition 2.9 avulla. Kaikki kolmannen asteen kompleksikertoimiset yhtälöt saadaan muuttujanvaihdolla muotoon $z^3 + pz + q = 0$. Jos $u_0, v_0 \in \mathbb{C}$ siten, että

$$\begin{aligned}
u_0^3 &= -\frac{q}{2} + \sqrt{\big(\frac{q}{2}\big)^2 + \big(\frac{p}{3}\big)^3},\\
v_0^3 &= -\frac{q}{2} - \sqrt{\big(\frac{q}{2}\big)^2 + \big(\frac{p}{3}\big)^3}, \text{ ja}\\
u_0 v_0 &= -\frac{p}{3},
\end{aligned}$$

ja $\zeta_3 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ on kaavan (1) antama ykkösen kolmas juuri, niin luvut $z_1 = u_0 + v_0$, $z_2 = \zeta_3 u_0 + \zeta_3^2 v_0$ ja $z_3 = \zeta_3^2 u_0 + \zeta_3 v_0$ ovat yhtälön $z^3 + pz + q = 0$ ratkaisuja. Alkuperäisen yhtälön juuret saadaan näistä tekemällä muuttujanvaihto toiseen suuntaan.

Neljännen asteen yhtälöiden ratkaisukaavat ovat samankaltaisia kuin kolmannen asteen tapauksessa. Kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisemista käsitellään enemmän kurssilla Lukualueet ja esimerkiksi kirjassa K. Väisälä: Lukuteorian ja korkeamman algebran alkeet. Kurssin lukualueet moniste on saatavissa tämän kurssin kotisivulta.

Abel osoitti vuonna 1826, että viidennen ja korkeamman asteen polynomeille ei ole samanlaista ratkaisualgoritmia kuin alemman asteen polynomeille. Tämän väitteen todistuksessa käytetään yleensä ryhmäteoriaa, jota tarkastelemme luvusta 4 alkaen. Polynomeja tarkastellaan lähemmin tämän kurssin lopussa.

Jokaisella nollasta poikkeavalla kompleksiluvulla on käänteisalkio kertolaskun suhteen. Otamme käyttöön erityisen merkinnän

$$\mathbb{C}^{\times} = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$$

laskutoimituksella varustetulle joukolle $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$. Vastaavasti

$$\mathbb{R}^{\times} = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$$

ja

$$\mathbb{Q}^{\times} = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot).$$

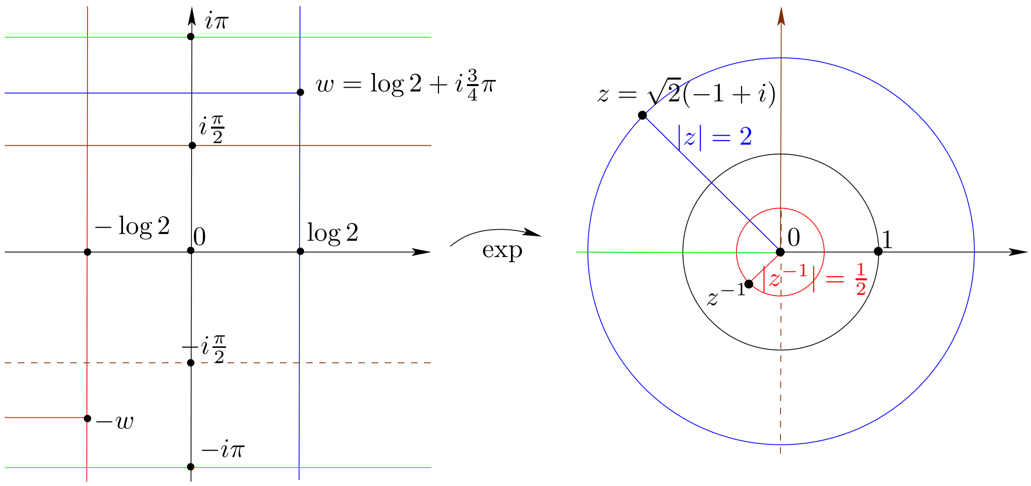
Näitä laskutoimituksella varustettuja joukkoja kutsutaan (kurssin aikana selvenevistä syistä) kompleksilukujen, reaalilukujen ja rationaalilukujen *multiplikatiivisiksi ryhmiksi*. Laskutoimituksella varustetut joukot $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ ja $(\mathbb{Q}, +)$ taas ovat kompleksilukujen, reaalilukujen ja rationaalilukujen *additiiviset ryhmät*.

Napakoordinaattikuvauksen avulla voidaan määritellä algebran (ja myöhemmin kompleksianalyysin) kannalta merkittävä kuvaus:

Määritelmä 2.10. Kuvaus $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, joka määritellään asettamalla jokaiselle $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

on *(kompleksinen) eksponenttifunktio*.



Kuva 3. Kompleksinen eksponenttifunktio. Eri suorien kuvautumista on havainnollistettu väreillä. Piste $w = \log 2 + i\frac{3}{4}\pi$ kuvautuu eksponenttifunktiolla pisteeksi $z = \sqrt{2}(-1+i)$ ja piste $-w$ pisteeksi z^{-1}.

Propositio 2.11. *Eksponenttifunktio* $\exp\colon (\mathbb{C}, +) \to \mathbb{C}^{\times}$ *on surjektiivinen homomorfismi.*

Todistus. Osoitamme ensin, että kompleksinen eksponenttifunktio on homomorfismi. Olkoot $z = x + i\,y, w = u + i\,v \in \mathbb{C}$. Tällöin reaalisen eksponenttifunktion laskusääntöjen ja Proposition 2.5 nojalla

$$\begin{aligned}\exp(z + w) &= e^{x+u}\big(\cos(y + v) + i \sin(y + v)\big)\\ &= e^x e^u(\cos y + i \sin y)(\cos v + i \sin v)\\ &= \exp(z)\exp(w).\end{aligned}$$

Olkoon $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $g(x,y) = (e^x, y)$. Tällöin $g(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Jos tulkitsemme kompleksisen eksponenttikuvauksen kuvauksena, joka on määritelty tasossa $\mathbb{R}^2$, pätee $\exp = N \circ g$. Siis exp on surjektiivinen, koska molemmat kuvaukset g ja napakoordinaattikuvaus N ovat surjektiivisia. $\square$

Kompleksisen eksponenttifunktion avulla saadaan yksinkertainen lauseke ykkösen juurille: Yhtälön $z^m = 1$ ratkaisut ovat luvut

$$\zeta_m^R = e^{R\frac{2\pi}{m}i},$$

$0 \le R \le m-1$.

Harjoitustehtäviä.

Tehtävä 10. Osoita, että kompleksilukujen kertolasku on assosiatiivinen ja kommutatiivinen laskutoimitus. Osoita, että kompleksilukujen kertolasku on distributiivinen yhteenlaskun suhteen. Onko kompleksilukujen yhteenlasku distributiivinen kertolaskun suhteen?

Tehtävä 11. Osoita, että kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$ pätee

(1) $\bar{\bar{z}} = z$,
(2) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$,
(3) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$,
(4) $|\bar{z}| = |z|$ ja
(5) $|zw| = |z||w|$.

Tehtävä 12. Olkoot $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, ja $w = s(\cos\theta + i\sin\theta)$. Osoita, että

$$zw = rs(\cos(\phi+\theta) + i\sin(\phi+\theta)).$$

Tehtävä 13. Olkoot $z_k = r_k(\cos\phi_k + i\sin\phi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Osoita induktiolla, että

$$\prod_{k=1}^n z_k = z_1 z_2 \cdots z_n = (\prod_{k=1}^n r_k)(\cos(\sum_{k=1}^n \phi_k) + i\sin(\sum_{k=1}^n \phi_k)).$$

Tehtävä 14. Osoita, että jokaisella kompleksiluvulla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ on m kappaletta m. juuria.

Tehtävä 15. Määritä ykkösen kuudennet juuret. Kirjoita juuret muodossa, jossa ei käytetä trigonometrisiä funktioita eikä kompleksista eksponenttifunktiota. Piirrä kuva, jossa kaikki juuret esitetään tason pisteinä.

Tehtävä 16. Ratkaise yhtälöt $z^3 = i$ ja $z^5 = -\frac{1}{2}$ napakoordinaattien avulla. Havainnollista ratkaisuja kuvalla.

Tehtävä 17. Ratkaise yhtälöt $z^2 - z + 1 = 0$ ja $z^2 - iz + 1 = 0$.

Tehtävä 18. Olkoot $a_k \in \mathbb{R}$ kaikilla $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ja olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$ yhtälön

$$\sum_{k=1}^n a_k z^k = 0 \tag{2}$$

ratkaisu. Osoita, että $\overline{z_0}$ on yhtälön (2) ratkaisu.

[10] Vihje: Käytä reaalilukujen vastaavia ominaisuuksia, jotka oletamme tunnetuiksi