ALGEBRA
KEVÄT 2011

JOUNI PARKKONEN

1. Laskutoimitukset

Algebra käsittelee laskemista. Osin tämä tarkoittaa "numeroilla laskemista" lukualueissa $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ laskutoimituksilla $+$ ja $\cdot$ ja niiden käänteisoperaatioilla $-$ ja $/$ siinä määrin kuin käänteisoperaatiot ovat hyvin määriteltyjä. Tällä kurssilla yleistämme laskutoimituksen käsitteen ja tarkastelemme erilaisia laskutoimitusten määräämiä niinsanottuja algebrallisia rakenteita. Keskeisessä osassa on "abstrakti laskeminen", jossa ei tiedetä tai välitetä siitä, millä lasketaan, vaan tehdään päätelmiä, kun laskutoimitusten jotkin ominaisuudet tunnetaan. Lisäksi tarkastelemme kuvauksia, "jotka säilyttävät algebralliset rakenteet".

Yksi algebran keskeinen ajatus on se, että erilaisissa matemaattisissa yhteyksissä tunnistetaan samankaltaisia rakenteita, esimerkiksi havaitaan, että laskutoimituksilla on sopivia lisäominaisuuksia. Jos osoittautuu, että nämä lisäominaisuudet määrittelevät jonkin algebrallisen rakenteen (ryhmä, rengas,...), voidaan tarkasteltavaa tilannetta usein ymmärtää paremmin näille algebrallisille rakenteille todistettujen yleisten tulosten avulla. Näin voidaan nähdä yleisiä rakenteita teknisten ominaisuuksien takana.

Tässä luvussa määrittelemme useita kurssin keskeisiä käsitteitä ja tutustumme niiden perusominaisuuksiin.

Määritelmä 1.1. Epätyhjän joukon A *laskutoimitus* on kuvaus $* : A \times A \to A$. *Laskutoimituksella varustettu joukko* on pari $(A, *)$, missä $*$ on joukon A laskutoimitus.

Laskutoimituksen tulosta merkitään yleensä $a * a' = *(a, a')$. Laskutoimitus on siis sääntö, joka liittää kahteen joukon A alkioon a, a' joukon A alkion $a * a'$.

———

Luonnollisten lukujen joukko on tällä kurssilla

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Joskus nollaa ei haluta lukea luonnolliseksi luvuksi eikä tästä valinnasta tule suurempia ongelmia.

———

Esimerkki 1.2. Luonnollisten lukujen $\mathbb{N}$ ja kokonaislukujen $\mathbb{Z}$, rationaalilukujen $\mathbb{Q}$ ja reaalilukujen $\mathbb{R}$ yhteen- ja kertolasku ovat laskutoimituksia: $(m, n) \overset{+}{\mapsto} m + n$, $(m, n) \overset{\cdot}{\mapsto} m \cdot n = mn$. Tässä, kuten lähes aina, kertolaskun merkki $\cdot$ jätetään kirjoittamatta ja kertolaskun tulosta merkitään mn.

Samassa joukossa E voidaan määritellä erilaisia laskutoimituksia kuten Esimerkissä 1.2 havaittiin. Tarkastelemme tällä kurssilla myös *renkaiden* teoriaa, renkaat ovat kahdella laskutoimituksella varustettuja joukkoja, joiden laskutoimituksilta vaaditaan muutamia lisäominaisuuksia, jotka esimerkiksi kokonais-, rationaali- ja reaalilukujen yhteen- ja kertolaskulla on.

Jos $*_A$ on laskutoimitus joukossa A ja $*_B$ on laskutoimitus joukossa B, niiden avulla voidaan määritellä laskutoimitus joukossa $A \times B$:

$$((a,b),(a',b')) \mapsto (a *_A a', a *_B b').$$

Tätä laskutoimitusta kutsutaan *laskutoimitusten* $*_A$ *ja* $*_B$ *tuloksi.* Vastaavalla tavalla voidaan määritellä laskutoimituksia useamman joukon karteesiseen tuloon.

Esimerkki 1.3. (a) Luonnollisten lukujen yhteenlaskun avulla saadaan *komponenteittainen yhteenlasku* joukkoon $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ määrittelemällä se komponenttien yhteenlaskun tulolaskutoimituksena $(m,n) + (p,q) = (m+p, n+q)$.
(b) Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määritellään *komponenteittainen yhteenlasku* vastaavalla tavalla

$$x + y = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Edellä tarkastellut esimerkit liittyvät kaikki tavanomaiseen "luvuilla laskemiseen". Laskutoimituksen käsite on kuitenkin paljon laajempi, kuten seuraavasta esimerkistä alkaa ilmetä:

Esimerkki 1.4. (a) Joukon X osajoukot muodostavat *potenssijoukon* $\mathscr{P}(X) = \{A \subset X\}$. Esimerkiksi, kun $X = \{0,1\}$, niin

$$\mathscr{P}(X) = \big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\big\}.$$

Joukkojen leikkaus $(A,B) \mapsto A \cap B$ ja yhdiste $(A,B) \mapsto A \cup B$ ovat laskutoimituksia potenssijoukossa $\mathscr{P}(X)$.
(b) Olkoon $X \neq \emptyset$, ja olkoon $\mathscr{F}(X) = \{f \colon X \to X\}$. Kuvausten yhdistäminen on laskutoimitus joukossa $\mathscr{F}(X)$: $(f,g) \mapsto f \circ g$.
(c) Olkoon $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ reaalisten $n \times n$–matriisien joukko. Kurssilla Lineaarialgebra 1 määriteltiin kaksi laskutoimitusta joukossa $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Seuraavassa, jos C on matriisi, merkintä C_{lm} tarkoittaa sen lm-kerrointa. Matriisien yhteenlasku määritellään komponenteittain asettamalla

$$(A+B)_{ij} = (A_{ij} + B_{ij})$$

kaikilla $1 \leq i, j \leq n$. Matriisien kertolasku määritellään asettamalla

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

kaikilla $1 \leq i, j \leq n$.

Erityisesti dimensiossa 2 saadaan laskutoimitukset

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

ja

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

(d) Kahden alkion muodostamassa joukossa $X = \{0,1\}$ on 16 eri laskutoimitusta: Joukossa

$$X \times X = \big\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\big\}$$

on neljä alkiota ja jokaisella alkiolla on kaksi mahdollista arvoa 0 tai 1.

Jos samassa lausekkeessa esiintyy useita laskutoimituksia, niiden suorittamisjärjestystä ohjataan suluilla: Sulkujen sisällä olevat laskutoimitukset tehdään aina ensin ja sisäkkäisiä sulkuja sisältävät lausekkeet käsitellään “sisältä lähtien” vastaavaan tapaan kuin esimerkiksi lausekkessa $a(b+((cd)(e+f)))$ lasketaan ensin summa $(e+f)$ ja tulo (cd), näiden laskujen tulokset kerrotaan keskenään, saatu tulos lisätään lukuun b ja lopulta tämän laskun tuloksella kerrotaan a. Seuraava määritelmä antaa muutamia keskeisiä laskutoimitusten lisäominaisuuksia.

Määritelmä 1.5. Joukon A laskutoimitus $*$ on

(1) *assosiatiivinen* eli *liitännäinen*, jos $a*(b*c) = (a*b)*c$ kaikilla $a, b, c \in A$.
(2) *kommutatiivinen* eli *vaihdannainen*, jos $a*b = b*a$ kaikilla $a, b \in A$.

Jos joukossa A on määritelty kaksi laskutoimitusta $*$ ja $\oplus$, niin laskutoimitus $*$ on

- *vasemmalta distributiivinen laskutoimituksen* $\oplus$ *suhteen*, jos
$$a*(b \oplus c) = (a*b) \oplus (a*c)$$
kaikilla $a, b, c \in A$.
- *oikealta distributiivinen laskutoimituksen* $\oplus$ *suhteen*, jos
$$(b \oplus c)*a = (b*a) \oplus (c*a)$$
kaikilla $a, b, c \in A$.

Jos $*$ on oikealta ja vasemmalta distributiivinen laskutoimituksen $\oplus$ suhteen, se on *distributiivinen laskutoimituksen* $\oplus$ *suhteen*. Distributiivisuutta sanotaan myös *osittelulaiksi*.

Merkintöjä $+$ ja $\cdot$ käytetään yleisesti eri laskutoimituksille. Merkintää $+$ käytetään kuitenkin ainoastaan kommutatiiviselle laskutoimitukselle. Usein laskutoimitukselle ei käytetä mitään erityistä merkkiä vaan laskutoimitusta merkitään kirjoittamalla laskutoimituksella varustetun joukon alkioista muodostettuja “sanoja” kuten tavanomaisessa kertolaskussa on tapana: $a \cdot b = ab$.

Sulkujen määrää lausekkeissa voi vähentää, jos laskutoimitus $*$ on assosiatiivinen: Koska sulkujen paikalla ei ole merkitystä lausekkeessa $a*(b*c) = (a*b)*c$, voimme käyttää merkintää
$$a*b*c = (a*b)*c = a*(b*c)$$
ilman vaaraa. Huomaa kuitenkin, että kaikki laskutoimitukset eivät ole assosiatiivisia, esimerkiksi Harjoitustehtävässä 6 käsiteltävä ristitulo ei ole assosiatiivinen.

Esimerkki 1.6. (a) Luonnollisten lukujen, kokonais-, rationaali- ja reaalilukujen yhteen- ja kertolaskulle pätee

(1) $m+n = n+m$ ja $mn = nm$ kaikilla m, n (kommutatiivisuus).
(2) $m+(n+l) = (m+n)+l$ ja $m(nl) = (mn)l$ kaikilla m, n, l (assosiatiivisuus).
(3) $m(n+l) = mn+ml$ kaikilla m, n, l, eli kertolasku on distributiivinen yhteenlaskun suhteen.

(b) Joukon $\mathscr{P}(X)$ laskutoimitukset $\cap$ ja $\cup$ ovat

- assosiatiivisia: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ja $A \cap (B \cap C) = (A \cup B) \cup C$ kaikilla $A, B, C \in \mathscr{P}(X)$ ja
- kommutatiivisia: $A \cap B = B \cap A$ ja $A \cup B = B \cup A$ kaikilla $A, B \in \mathscr{P}(X)$.

(c) Joukon $\mathscr{F}(X)$ laskutoimitus $\circ$ on assosiatiivinen: Olkoot $f, g, h \in \mathscr{F}(X)$. Yhdistetyn kuvauksen määritelmän mukaan
$$\big(f \circ (g \circ h)\big)(x) = f\big((g \circ h)(x)\big) = f\big(g(h(x))\big)$$

kaikilla $x \in X$ ja

$$\big((f \circ g) \circ h\big)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f\big(g(h(x))\big)$$

kaikilla $x \in X$. Siis $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ kaikilla $f, g, h \in \mathscr{F}(X)$.

Laskutoimitus $\circ$ ei kuitenkaan ole kommutatiivinen, jos joukossa X on ainakin kaksi alkiota: Olkoon $X = \{0, 1\}$, ja olkoot $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathscr{F}(X)$, $\mathbf{0}(x) = 0$ ja $\mathbf{1}(x) = 1$ kaikilla $x \in X$. Tällöin $\mathbf{1} \circ \mathbf{0} = \mathbf{1} \neq \mathbf{0} = \mathbf{0} \circ \mathbf{1}$.

Määritelmä 1.7. Olkoon $A \neq \emptyset$, ja olkoon $*$ joukon A laskutoimitus.

- Alkio $e \in A$ on laskutoimituksen $*$ *neutraalialkio*, jos $e * g = g$ ja $g * e = g$ kaikilla $g \in A$.
- Alkio $\bar{x} \in A$ on alkion $x \in A$ *vasen käänteisalkio*, jos $\bar{x} * x = e$,
- Alkio $\bar{x} \in A$ on alkion $x \in A$ *oikea käänteisalkio*, jos $x * \bar{x} = e$.

Jos $\bar{x}$ on alkion x vasen ja oikea käänteisalkio, niin se on alkion x *käänteisalkio*.

Esimerkki 1.8. Luku 0 on luonnollisten lukujen, kokonais-, rationaali ja reaalilukujen yhteenlaskun neutraalialkio, ja luku 1 on kertolaskun neutraalialkio. Useimmilla luonnollisilla luvuilla ei ole käänteisalkiota kummankaan laskutoimituksen suhteen, sen sijaan jokaisella kokonais-, rationaali- ja reaaliluvulla x on vastaluku $-x$, joka on luvun x käänteisalkio yhteenlaskun suhteen.

Luvulla 0 ei ole käänteisalkiota kertolaskun suhteen: $0\,x = x\,0 = 0 \neq 1$ kaikilla luvuilla x. Kaikilla nollasta poikkeavilla rationaali- ja reaaliluvuilla x taas on käänteisluku $x^{-1} = 1/x$, esimerkiksi rationaaliluvulle $a/b \neq 0$ pätee $(a/b)^{-1} = b/a$.

Esimerkki 1.9. (a) Identtinen kuvaus $\mathrm{id} = \mathrm{id}_X$ on joukon $\mathscr{F}(X)$ laskutoimituksen $\circ$ neutraalialkio:

$$\mathrm{id} \circ f = f = f \circ \mathrm{id}$$

kaikilla $f \in \mathscr{F}(X)$. Jos $f \in \mathscr{F}(X)$ on bijektio, sen käänteiskuvaus f^{-1} on kuvauksen f käänteisalkio laskutoimituksen $\circ$ suhteen: $f \circ f^{-1} = \mathrm{id} = f^{-1} \circ f$. Muilla joukon $\mathscr{F}(X)$ alkioilla ei ole käänteisalkiota.

(b) Varustamme nyt joukon $X \neq \emptyset$ potenssijoukon laskutoimituksella $\setminus$, joka määritellään

$$A \setminus B = \{a \in A : a \notin B\}.$$

Tällöin jokaisella $A \in \mathscr{P}(X)$ pätee $A \setminus \emptyset = A$, joten $\emptyset$ muistuttaa laskutoimituksen $\setminus$ neutraalialkiota. Kuitenkin $\emptyset \setminus A = \emptyset$ kaikilla $A \in \mathscr{P}(X)$, joten $\emptyset$ ei ole laskutoimituksen $\setminus$ neutraalialkio. Neutraalialkiota ei itse asiassa ole, sillä kaikille $A \in \mathscr{P}(X)$ pätee $A \setminus X = \emptyset$.

———

Jos laskutoimituksesta käytetään tulomerkintää, neutraalialkiolle käytetään usein merkintää 1 ja summamerkintää käytettäessä merkintää 0. Alkion x käänteisalkiota merkitään yleensä x^{-1}, summamerkintää käytettäessä kuitenkin käytetään merkintää $-x$.

———

Lause 1.10. *Olkoon $(X, *)$ laskutoimituksella varustettu joukko.*

(1) *Jos on alkiot $e \in X$ ja $e' \in X$ siten, että $e * g = g$ ja $g * e' = g$ kaikilla $g \in X$, niin $e = e'$.*

(2) *Jos $*$ on assosiatiivinen laskutoimitus, jolla on neutraalialkio e, niin*

(a) *alkiolla $g \in X$ on käänteisalkio, jos ja vain jos sillä on vasen ja oikea käänteisalkio.*
(b) *jos alkiolla $g \in X$ on käänteisalkio, se on yksikäsitteinen.*
(c) *jos alkiolla $g \in X$ on käänteisalkio, se on alkion g ainoa vasen/oikea käänteisalkio*

Todistus. (1) Käyttämällä oletettuja ominaisuuksia ylläolevassa järjestyksessä saadaan $e = e * e' = e'$.
(2) Todistamme kohdan (a): Olkoon g' alkion g vasen käänteisalkio, ja olkoon g'' sen oikea käänteisalkio. Tällöin

$$g'' = e * g'' = (g' * g) * g'' = g' * (g * g'') = g' * e = g'.$$

Tällöin siis g' on alkion g käänteisalkio. Toinen suunta seuraa suoraan määritelmästä. Kohdat (b) ja (c) todistetaan harjoituksissa. □

Olkoon $(A, *)$ laskutoimituksella varustettu joukko. Jos $B \subset A$, $B \neq \emptyset$ ja kaikille $b, b' \in B$ pätee $b*b' \in B$, niin B on laskutoimituksella varustetun joukon $(A, *)$ *vakaa* osajoukko. Laskutoimitus $*$ määrittelee *indusoidun laskutoimituksen* $*|_B$ joukossa B, kun asetetaan $b *|_B b' = b * b'$. Yleensä indusoidulle laskutoimitukselle käytetään samaa merkintää kuin sen indusoivalle laskutoimitukselle $*$: $*|_B = *$.

Esimerkki 1.11. Olkoon

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) : c = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Tällöin kaikille $A, B \in P$ pätee $A + B \in P$ ja $AB \in P$, joten matriisien yhteenlasku ja kertolasku indusoivat kaksi laskutoimitusta joukossa P.

Määritelmä 1.12. Olkoot $(E, *)$ ja $(E', \circledast)$ laskutoimituksella varustettuja joukkoja. Kuvaus $h\colon (E, *) \to (E', \circledast)$ on *homomorfismi*, jos $h(a * b) = h(a) \circledast h(b)$ kaikille $a, b \in E$.

- Bijektiivinen homomorfismi on *isomorfismi*.
- Isomorfismi laskutoimituksella varustetulta joukolta E itselleen on *automorfismi*.

Laskutoimituksella varustetut joukot $(E, *)$ ja $(E', \circledast)$ ovat *isomorfisia (keskenään)*, jos on isomorfismi $h\colon (E, *) \to (E', \circledast)$.

Edellä määriteltyjen lisäksi käytetään melko usein seuraavia nimityksiä:

- Injektiivinen homomorfismi on *monomorfismi*.
- Surjektiivinen homomorfismi on *epimorfismi*.

Tällä kurssilla käytämme näistä homomorfismityypeistä pääsääntöisesti nimityksiä injektiivinen ja surjektiivinen homomorfismi.

Esimerkki 1.13. (a) Reaalilukujen kertolasku indusoi laskutoimituksen positiivisten reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}_+ =]0, \infty[$. Eksponenttikuvaus $\exp\colon (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+, \cdot)$, $\exp(x) = e^x$ on homomorfismi: Kaikille $x, y \in \mathbb{R}$ pätee

$$\exp(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = \exp(x)\exp(y)$$

Eksponenttifunktio on tunnetusti bijektio, siis se on isomorfismi. Eksponenttifunktion käänteisfunktio $\log\colon (\mathbb{R}_+, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ on myös homomorfismi (ja tietysti myös isomorfismi): Kaikille $x, y \in \mathbb{R}_+$ pätee

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

(b) Yhteenlaskulla varustetut joukot $(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}), +)$ ja $(\mathbb{R}^{n^2}, +)$ ovat selvästi isomorfisia.

(c) Kuvaus $h\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$,
$$h(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
on homomorfismi, kun kokonaisluvut varustetaan yhteenlaskulla ja $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ varustetaan matriisien kertolaskulla:
$$h(n+m) = \begin{pmatrix} 1 & n+m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = h(n)h(m).$$

Isomorfiset laskutoimituksella varustetut joukot ovat algebrallisilta ominaisuuksiltaan samanlaiset vaikka joukot ja laskutoimitukset voivat "ulkoisesti" olla hyvinkin erilaisia, kuten Esimerkin 1.13 avulla huomaamme.

Propositio 1.14. *Olkoon $h\colon (E,*) \to (E',\circledast)$ surjektiivinen homomorfismi.*

(1) *Jos $*$ on kommutatiivinen, niin $\circledast$ on kommutatiivinen*
(2) *Jos $*$ on assosiatiivinen, niin $\circledast$ on assosiatiivinen*
(3) *Jos laskutoimituksella varustetussa joukossa E on neutraalialkio e, niin $h(e)$ on laskutoimituksella varustetun joukon E' neutraalialkio.*

Todistus. (1) Olkoot $a', b' \in E'$. Tällöin on $a, b \in E$, joille $h(a) = a'$ ja $h(b) = b'$. Siis
$$a' \circledast b' = h(a) \circledast h(b) = h(a * b) = h(b * a) = h(b) \circledast h(a) = b' \circledast a',$$
joten $\circledast$ on kommutatiivinen.

(2) Harjoitustehtävä.

(3) Olkoon $g' \in E'$. Tällöin $g' = h(g)$ jollain $g \in E$ ja pätee
$$h(e) \circledast g' = h(e) \circledast h(g) = h(e * g) = h(g) = g'$$
ja
$$g' \circledast h(e) = h(g) \circledast h(e) = h(g * e) = h(g) = g',$$
joten $h(e)$ on neutraalialkio. $\square$

Neutraalialkio ei välttämättä kuvaudu neutraalialkiolle, jos homomorfismi ei ole surjektiivinen. Helppo esimerkki tästä ilmiöstä on homomorfismi $h\colon (\mathbb{N},+) \to (\mathbb{N},\cdot)$, $h(n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Kuvaus h on todellakin homomorfismi koska kaikille $m, n \in \mathbb{N}$ pätee
$$h(n+m) = 0 = 0\,0 = h(m)h(n).$$
Kuitenkaan neutraalialkio $0 \in (\mathbb{N},+)$ ei kuvaudu neutraalialkioksi $1 \in (\mathbb{N},\cdot)$.

Harjoitustehtäviä.

Tehtävä 1. Onko joukon $\mathscr{P}(X)$ laskutoimitus $\cap$ distributiivinen laskutoimituksen $\cup$ suhteen? Onko laskutoimitus $\cup$ distributiivinen laskutoimituksen $\cap$ suhteen?

Tehtävä 2. Onko laskutoimituksilla $\cap$ ja $\cup$ neutraalialkiot? Onko jokaisella $A \in \mathscr{P}(X)$ käänteisalkiot laskutoimitusten $\cap$ ja $\cup$ suhteen?

Tehtävä 3. Onko joukon $\mathscr{P}(X)$ laskutoimitus $\setminus$ assosiatiivinen?

Tehtävä 4. Onko matriisien kertolasku assosiatiivinen joukossa $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$? Onko se kommutatiivinen? Onko matriisien kertolaskulla neutraalialkio joukossa $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$?

Tehtävä 5. Olkoon
$$\Gamma = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) : \det A = 1\}.$$
Osoita, että matriisien kertolasku indusoi laskutoimituksen joukossa Γ. Miten matriisien yhteenlasku käyttäytyy?

Tehtävä 6. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ *vektoritulo* eli *ristitulo* on laskutoimitus, joka määritellään asettamalla jokaiselle $a, b \in \mathbb{R}^3$

$$a \times b = \big(\det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \big) .$$

(1) Osoita, että $\times$ on *antikommutatiivinen*: $b \times a = -a \times b$ kaikille $a, b \in \mathbb{R}^3$.
(2) Osoita, että $\times$ on distributiivinen vektorien komponenteittaisen yhteenlaskun suhteen.
(3) Osoita, että $\times$ ei ole assosiatiivinen.

Tehtävä 7. Olkoon $X \neq \emptyset$, ja olkoon $*$ joukon X assosiatiivinen laskutoimitus. Osoita:

(1) Jos alkiolla $g \in X$ on käänteisalkio, se on yksikäsitteinen.
(2) Jos alkiolla $g \in X$ on käänteisalkio, se on alkion g ainoa vasen käänteisalkio

Tehtävä 8. Olkoot $(A, *)$ ja $(C, \circledast)$ laskutoimituksella varustettuja joukkoja ja olkoon $f \colon (A, *) \to (C, \circledast)$ homomorfismi. Osoita:

(1) Jos $B \subset A$ on vakaa, niin $f(B) \subset C$ on vakaa.
(2) Jos $B \subset C$ on vakaa, niin $f^{-1}(B) \subset A$ on vakaa.

Tehtävä 9. Olkoon $h \colon (E, *) \to (E', \circledast)$ surjektiivinen homomorfismi. Osoita: Jos $*$ on assosiatiivinen, niin $\circledast$ on assosiatiivinen.

[6] Vihje: Kannattaa kerrata lineaarialgebran tietoja. Assosiatiivisuuden puuttumisen voi nähdä esimerkiksi tarkastelemalla standardikantavektorien keskinäisiä tuloja.