JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattinen tilastotiede 2

Harjoitukset 9
13.3.2012

1. Ed. kerran tehtävän 1 tilanteessa osoita, että minimaaliseksi tyhjentäväksi voidaan valita otoskeskiarvo $\bar{Y}$ ja otosvarianssi S^2. Etsi sellainen funktio $A(\bar{Y}, S^2)$, jonka jakauma ei riipu μ:stä.

2. Edellisen kerran tehtävässä 4 oleellinen on neliömuoto (aluksi $n = 1$) $(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})$. Suorita kertolasku!

3. Edellisen kerran tehtävässä 8 käytä hyväksesi tietoa $T = \sum Y_i \sim \text{Po}(n\lambda)$ ja laske!

4. Edellisen kerran tehtävässä 5 osoita, että a) kyseessä on eksponenttinen perhe. b) Mikä on sen dimensio? c) Mikä on minimaalinen tyhjentävä?

5. Oletetaan satunnaisotos $Y_1, \ldots, Y_n$ Gamma(α, β)-jakaumasta. Johda uskottavuusyhtälöt. Tiheys on
$$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\beta y}.$$

6. (Fisher scoring). Luvun 4.2 tilanteessa uskottavuus yhtälöt ovat
$$n^{-1} \sum \mathbf{g}(y_i) = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\theta}).$$
Jos $\boldsymbol{\theta}_1$ on alkuarvo, niin ratkaisua voi yrittää iteraatiolla
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}_k &= \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k)^{-1} \left(\boldsymbol{\theta}_k - n^{-1} \sum \mathbf{g}(y_i) \right) \\ \boldsymbol{\theta}_{k+1} &= \boldsymbol{\theta}_k + \boldsymbol{\delta}_k, \quad k = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$
Tee **R**-koodi, jolla voit estimoida Gamma-jakauman parametrit. Alkuarvot saat esimerkiksi momenttimenetelmällä. Simuloi aineistoja sopivilla paramterien arvoilla ja estimoi parametrit. Gamma-funktion helpillä (`?gamma`) löydät tarvittavat **R**-funktiot.

7. Tutki logistisen regression kertoimien normaalisuutta simuloimalla. Tutustu kurssin Johdatus tilastolliseen mallintamiseen monisteeseen (salasana JTM05092011) esimerkkiin 6.5. (s. 92–94) ja linkin R-esimerkit takana olevaan Luku6:n esimerkkin 6.5. Tee 10000 toistoa ja plottaa kertoimien histogrammi ja sen päälle teorian mukainen normaalinen tiheys.

8. Sovella luvun 4.3.3. tuloksia a) Poisson regressioon ja b) regressioon, joka syntyy negatiivisesta binomijakaumasta, (ks. ed. kerran tehtävä 3).