

1. Ed. kerran teht. 8:n jakauma $N(\mu, 2\mu^2)$, $\Theta = \{\mu \mid \mu > 0\}$. Osoita, että a) kysymyksessä on eksponentiaalinen perhe, jonka dimensio on 2, b) joka ei ole täysi, c) ja jonka minimaalinen tyhjentävä statistiikka on $(\sum Y_i, \sum Y_i^2)$.
2. Muodosta ed. tehtävässä sellainen minimaalinen tyhjentävä pari, jonka toinen komponentti on ansillaarinen statistiikka.
3. Etsi kanoniset parametrit ja minimaaliset tyhjentävät statistiikat kun Y_1, \dots, Y_n ovat riippumattomia satunnaismuuttujia jakaumista a) $NB(m, p)$ (negatiivinen binomi), m tunnettu, jonka pistetodennäköisyydet ovat

$$f(y; m, p) = \binom{m+y-1}{m-1} p^m (1-p)^y, \quad y = 0, 1, 2, \dots, 0 < p < 1.$$

b) käänteinen Gaussin (Inverse Gaussian) jakauma $IG(\alpha, \mu)$, jonka tiheys on

$$f(y, \alpha, \mu) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi y^3}} e^{-\frac{\alpha(y-\mu)^2}{2\mu^2 y}}, \quad y > 0, \quad \alpha, \mu > 0.$$

Käytä eksponentiaalisen perheen yleisiä tuloksia.

4. Kuten edellinen tehtävä, kun jakauma on multinormaalinen $N(\mu, \Sigma)$ (Y_i :t ovat nyt vektoreita \mathbf{Y}_i).
5. Oletetaan AR(1) malli

$$Y_i = \phi Y_{i-1} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

missä satunnaismuuttujat $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ ovat riippumattomia jakaumasta $N(0, 1)$, so. Y_i :n ehdollinen jakauma ehdolla $Y_0 = y_0, \dots, Y_{i-1} = y_{i-1}$ on $N(\phi y_{i-1}, 1)$. Muodosta uskottavuusfunktio, kun $Y_0 = y_0$ on vakio.

6. (Rao-Blackwell). Oletetaan, että (Y_1, \dots, Y_n) :n yhteistiheysfunktio on $f(\mathbf{y}, \theta)$ ja että $\hat{\theta} = g(Y_1, \dots, Y_n)$ on harhaton θ :n estimaattori, so. $E_\theta[\hat{\theta}] = \theta$ jokaisella θ :n arvolla. Oletetaan vielä, että $T = h(Y_1, \dots, Y_n)$ on tyhjentävä. a) Osoita, että $\tilde{\theta} = E_\theta[\hat{\theta} \mid T]$ ei riipu θ :sta ja on myös harhaton θ :n estimaattori ja b) $\text{var}_\theta(\tilde{\theta}) \leq \text{var}_\theta(\hat{\theta})$ jokaisella θ :n arvolla.
7. Oletetaan, edellisessä tehtävässä, että $Y_i \sim \text{Po}(\lambda)$ ja että ne ovat riippumattomia $i = 1, \dots, n$. Estimoitava parametri on $\theta = e^{-\lambda} = P_\lambda(Y_1 = 0)$. Valitse $\tilde{\theta} = \mathbf{1}_{\{Y_1=0\}}$ ja ratkaise $\tilde{\theta}$.
8. Harhainen estimaattori $e^{-\lambda}$:lle on $e^{-\bar{Y}}$, $\bar{Y} = \sum Y_i/n$. a) Laske tämän estimaattorin keskineliövirhe $E_\lambda[(e^{-\bar{Y}} - e^{-\lambda})^2]$. b) Laske ed. tehtävän $\text{var}_\lambda(\tilde{\theta})$. c) Tee vertailuja.