JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattinen tilastotiede 2

Harjoitukset 7
28.2.2012

1. Oletetaan harjoitusten 5 tehtävän 4 tilanne. Osoita, että $nY_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$, missä $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$. Ks. Example 18.

2. Oletetaan, että

$$\begin{aligned} P(X_n = -\sqrt{n}) &= \frac{1}{4n}, \\ P(X_n = 0) &= 1 - \frac{3}{4n}, \\ P(X_n = \sqrt{n}) &= \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

   Tarkastellaan suppenemista $X_n \to 0$. Päteekö se a) todennäköisyydessä, b) ensimmäisessä keskiarvossa, c) toisessa keskiarvossa?

3. Oletetaan Theorem 39:n tilanne, mutta nyt $h'(\mu) = 0$, $h''(\mu) \neq 0$. Johda s.m:n $n(Y_n - h(\mu))$ rajajakauma. Vihje: $h(\mu+s) = h(\mu)+sh'(\mu)+\frac{1}{2}s^2h''(\mu)+R(\mu,s)$ ja $R(\mu,s)/s^2 \to 0$, kun $s \to 0$.

4. Oletetaan, että $Y, Y_2, \ldots$ ovat i.i.d. ja $E[Y_j] = \mu$, $\mathrm{var}[Y_j] = \sigma^2$. Osoita, että

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \bar{Y}_n)^2 \xrightarrow{p} \sigma^2,$$

   missä $\bar{Y}_n = n^{-1}\sum Y_j$.

5. Oletetaan edellisen tehtävän tilanne. Osoita, että

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{Y}_n - \mu)}{S_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1).$$

   Vihje: Osoita, että jos $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ ja $Z_n \xrightarrow{p} a$, niin $Z_nX_n \xrightarrow{\mathcal{D}} aX$

6. Oletaan, että $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat $\mathrm{Po}(\lambda)$-jakaumaa. Johda minimaalinen tyhjentävä statistiikka.

7. Kuten edellinen tehtävä, mutta jakauma on $\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$, $\Theta = \{(\alpha,\beta) \,|\, \alpha > 0, \beta > 0\}$. Johda minimaalinen tyhjentävä.

8. Kuten edellinen tehtävä, mutta jakauma on $N(\mu, 2\mu^2)$, $\Theta = \{\mu \,|\, \mu > 0\}$. Osoita, että $(\sum Y_i, \sum Y_i^2)$ on minimaalinen tyhjentävä.