JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattinen tilastotiede 2

Harjoitukset 6
21.2.2012

1. Oletetaan, että $X_1, X_2, \dots$ ovat i.i.d. ja $E[X_i] = \mu$, $\mathrm{var}[_i] = \sigma^2$ ja $E[(X_i - \mu)^4] = \mu_4$. Määritellään
$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2.$$
Osoita, että
$$\frac{\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2)}{\sqrt{\mu_4 - \sigma^4}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1).$$

2. Osoita, että jos edellisen tehtävän tilanteessa S_n^2:n määritelmässä käytetään μ:n sijasta otoskeskiarvoa, niin rajajakauma pysyy samana.

3. Osoita t-jakauman määritelmän nojalla, että $t(n) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$.

4. Oletetaan, että $X_n \sim \mathrm{Po}(\lambda_n)$ ja $\lambda_n \to \infty$. Osoita c.f:n avulla, että
$$\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1).$$

5. Osoita, että jos $X_j \sim \mathrm{Ber}(p_j)$ ovat riippumattomia, ja
$$s_n^2 = \sum_{j=1}^{n} p_j(1-p_j), \quad s_n^2 \to \infty,$$
niin Lindebergin ehto on voimassa, ja
$$\frac{1}{s_n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - p_j) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1).$$
Saattaa helpottaa, kun kirjoittaa
$$\int_{|y|\geq ts_n} y^2 \,\mathrm{d}F_j(y) = E[\mathbf{1}_{\{|X_j - p_j| \geq ts_n\}}(X_j - p_j)^2]$$

6. Oletetaan, että $X_1, X_2, \dots$ ovat i.i.d., $E[X_j] = 0$ ja $\mathrm{var}[X_j] = 1$. Vakiot $a_1, a_2, \dots$ ovat sellaisia että
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max_{1\leq j\leq n} a_j^2}{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} = 0.$$
Osoita, että
$$\frac{1}{s_n}\sum_{j=1}^{n} a_j X_j \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1),$$
missä $s_n^2 = \sum_{j=1}^{n} a_j^2$.