JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattinen tilastotiede 2

Harjoitukset 5
14.2.2012

1. Oletetaan, että X ja Y ovat sellaisia satunnaismuuttujia, että $E[X^2] < \infty$ ja $E[Y^2] < \infty$. Osoita epäyhtälö (Cauchy-Schwartz)
$$E[|XY|] \leq \sqrt{E[X^2]\,E[Y^2]}$$
ilman Hölderin epäyhtälöä. Vihje: Kaikilla λ:n arvoilla $E[(|X| + \lambda|Y|)^2] \geq 0$. Tee neliöön korotus ja ota odotusarvo. Etsi odotusarvon minimi λ:n suhteen. Minimi on on ei-negatiivinen. Ratkaise epäyhtälö.

2. Johda suoraan laskemalla a) $\mathrm{Bin}(n, p)$-jakauman c.f.
$$\varphi_n(t) = [p(e^{it} - 1) + 1]^n,$$
b) $\mathrm{Po}(\lambda)$-jakauman c.f.
$$\varphi(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1)).$$

3. Osoita edellisen tehtävän avulla, että $\mathrm{Bin}(n, \lambda/n)$-jakauma suppenee kohti $\mathrm{Po}(\lambda)$-jakaumaa, kun $n \to \infty$.

4. Oletetaan, että $X_i \sim U[0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots$ ja että kaikki ovat keskenään riippumattomia. a) Johda satunnaismuuttujan $Y_n = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ kertymäfunktio. b) Osoita, että $Y_n \xrightarrow{p} 0$.

5. Oleteaan ed. tehtävän tilanne, ja määritellään järjestetty otos $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}$. Johda $X_{(k)}$:n kertymäfunktio ja tiheysfunktio. Vihje: $X_{(k)} \leq x$ täsmälleen silloin, kun vähintään k kpl satunnaismuuttujista $\{X_1, \ldots, X_n\}$ on korkeintaan x.

6. Todista Theorem 30.

7. Oletetaan $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim F$, missä F on kertymäfunktio. Johda s.m:n $Y_n = aX_n + b$ asymptoottinen kertymäfunktio, so. raja
$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq y).$$

8. Sovella Lindebergin-Lévyn lausetta empiiriseen kertymäfunktioon.