

# JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Matemaattinen tilastotiede 2

Harjoitukset 4

7.2.2011

1. Tee R-ohjelma tai funktio, joka generoi multinormaalaisia satunnaismuuttujia. Voit käyttää hyväksesi `chol` -funktioita.
2. a) Laske likiarvo varianssille  $\text{var}[\sqrt{X}]$ , kun  $X \sim \text{Po}(\lambda)$ . b) Voit laskea likiarvon myös numeerisesti, koska  $\text{var}(\sqrt{X}) = E[X] - (E[\sqrt{X}])^2$ , ja

$$E[\sqrt{X}] = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \approx \sum_{k=1}^N \sqrt{k} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ kun } N \text{ on riittävän iso.}$$

Virheelle pätee

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{k} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} < \sum_{k=N+1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

jonka perusteella voit arvioida miten suureksi  $N$  on syytä valita. Tee vertailuja arvoilla  $\lambda = 5, 10, 20$ .

3. Johda Laplacen jakauman m.g.f.
4. Oletetaan, että  $X \sim U[0, 1]$ . Johda  $X$ :n karakteristinen funktio integroimalla reaali- ja imaginaarinen osa erikseen.
5. Johda Cauchy-jakauman karakteristinen funktio. Vihje: Vertaa Laplacen jakauman c.f:ta ja Cauchyn jakauman tiheysfunktioita. Käytä c.f:n ominaisuutta 7.
6. Oletetaan, että kaikki  $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n$  ovat keskenään riippumattomia ja että  $X_i \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $Y_j \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Osoita, että

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(m-1, n-1), \text{ missä}$$

$$S_1^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2,$$

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

7. Osoita, että jos  $X$ :n tiheys  $f$  on parillinen, so.  $f(x) = f(-x)$  jokaisella  $x$ :llä, niin

$$E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) f(x) dx.$$

8. Sovella ed. tehtävän kaavaa  $N(0, 1)$ :n tiheysfunktioon. Derivoi c.f. ja johda osittaisintegroinnilla yksinkertainen differentiaaliyhtälö, josta saat ratkaisuksi  $N(0, 1)$ :n c.f:n.