JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattinen tilastotiede 2

Harjoitukset 3
31.1.2011

1. Johda Cauchy-jakauman kertymäfunktio ja sen käänteisfunktio (Example 21). Tee `R`-funktio tai ajojono, joka generoi Cauchy-jakautuneita satunnaismuuttujia.

2. Oletetaan, että $X \sim U[0,1]$. Johda satunnaismuuttujan

$$Y = \log \frac{X}{1-X}$$

kertymäfunktio ja tiheysfunktio (logistinen jakauma).

3. Oletetaan, että $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ (ks. Example 16). Johda satunnaismuuttujan $Y = X^\lambda$, $\lambda \neq 0$, jakauma.

4. Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka arvot ovat välillä $[0, A]$, $A < \infty$. a) Osoita, että

$$E(X) = \int_0^A (1 - F(x))\,\mathrm{d}x,$$

missä F on X:n kertymäfunktio. (Käytä osittaisintegrointia.) b) Osoita, että tulos pätee myös silloin kun $A = \infty$. Vihje: Integroi A:han asti ja ota raja-arvo $A \to \infty$.

5. Johda X^2:n tiheys, kun $X \sim N(\mu, 1)$.

6. Funktio φ on konkaavi silloin ja vain silloin, kun $-\varphi$ on konveksi. Osoita, että jos φ on konkaavi, $E[\varphi(X)] \leq \varphi(E[X])$.

7. Tiheysfunktion f määrittämän jakauman entropia määritellään integraalina

$$\mathrm{Ent}(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jos $f(x) = 0$, niin määritellään $f(x) \log f(x) = 0$. a) Osoita, että jos $f(x) > 0$, kun $A < x < B$, ja $f(x) = 0$ muualla, niin $\mathrm{Ent}(f) \leq \log(B - A)$. Vihje

$$\mathrm{Ent}(f) = E\left[\log \frac{1}{f(X)}\right],$$

missä X:n tiheys on f. b) Millä jakaumalla on maksimaalinen entropia?