JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattinen tilastotiede 2

Harjoitukset 11
27.3.2012

1. Oletetaan, että $Y_1, \ldots, Y_n$ on satunnaisotos Po(λ)-jakaumasta. a) Etsi UMP-testi hypoteeseille $H_0 : \lambda = \lambda_0$, $H_A : \lambda > \lambda_0$. b) Jos $\alpha = 0.05$, $n = 10$ ja $\lambda_0 = 1$, millainen on satunnaistettu UMP-testi?

2. Oletetaan, että Y noudattaa Laplace-jakaumaa, jonka tiheys on
$$f(y; \mu) = \frac{1}{2} e^{-|y-\mu|}.$$
a) Osoita, että tällä tiheydellä on monotoninen uskottavuusosamäärä (so. ei-vähenevä u.o.). b) Johda yhteen havaintoon perustuvat yksisuuntaiset UMP- testit. c) Miten kriittiset arvot saadaan?

3. Osoita, että jos Th53:ssa T:n jakauma on symmetrinen odotusarvon $E_{\theta_0}[T]$ suhteen, niin
$$P_{\theta_0}(T < c_1) = \frac{\alpha}{2} = P_{\theta_0}(T > c_2).$$
Riittää, kun tarkastelet tapausta $E_{\theta_0}[T] = 0$.

4. Oletetaan, että $Y_1, \ldots, Y_n$ on satunnaisotos Exp(μ)-jakaumasta (ks. Ex. 18). Johda UMPU-testi hypoteeseille $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_A : \mu \neq \mu_0$. Vihje. Jos $Y \sim \text{Exp}(\mu)$, niin $2\mu Y \sim \chi^2(2)$.

5. Oletetaan, että meillä on parametrin θ estimaattori $\hat{\theta}$, jolla on jatkuva kertymafunktio $F(x; \theta) = P_\theta(\hat{\theta} \leq x)$. Oletetaan, että $F(x; \theta)$ on θ:n suhteen aidosti vähenevä jokaisella x:n arvolla. Osoita, että jos
$$\begin{aligned} F(\hat{\theta}; \theta^*_\alpha) &= 1 - \alpha, \\ F(\hat{\theta}; \theta^*_{1-\alpha}) &= \alpha, \end{aligned}$$
niin $(\theta^*_\alpha, \theta^*_{1-\alpha})$ on θ:n luottamusväli, joka toteuttaa
$$P_\theta(\theta^*_\alpha \leq \theta \leq \theta^*_{1-\alpha}) = 1 - 2\alpha.$$
Vihje: $F(\hat{\theta}; \theta) \sim U[0, 1]$, kun θ on parametrin oikea arvo.

6. Sovella ed. tehtävän tulosta tilanteeseen, jossa otos on $N(\mu, \sigma^2)$-jakaumasta, parametri on σ^2, ja estimaattori on otosvarianssi
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum (Y_i - \bar{Y})^2.$$