JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattinen tilastotiede 2

Harjoitukset 10
20.3.2012

1. (Fisher scoring uudelleen). Luvun 4.2 tilanteessa uskottavuus yhtälöt ovat
$$n^{-1}\sum \mathbf{g}(y_i) = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\theta}).$$
Jos $\boldsymbol{\theta}_1$ on alkuarvo, niin ratkaisua voi yrittää iteraatiolla
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_k &= \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k)^{-1}\left(n^{-1}\sum \mathbf{g}(y_i) - \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\theta}_k)\right)\\ \boldsymbol{\theta}_{k+1} &= \boldsymbol{\theta}_k + \boldsymbol{\delta}_k, \quad k = 1, 2, \ldots.\end{aligned}$$
Tee **R**-koodi, jolla voit estimoida Gamma-jakauman parametrit. Alkuarvot saat esimerkiksi momenttimenetelmällä. Simuloi aineistoja sopivilla parametrien arvoilla ja estimoi parametrit. Gamma-funktion helpillä (`?gamma`) löydät tarvittavat **R**-funktiot.

2. (Ed. kerran tehtävä 8.) Sovella luvun 4.3.3. tuloksia a) Poisson regressioon ja b) regressioon, joka syntyy negatiivisesta binomijakaumasta, (ks. ed. kerran tehtävä 3).

3. (Ex. 61) Osoita, että
$$\lim_{\theta\to\infty} \log\theta + (\theta - 1)\log y - y^{\theta} = -\infty,$$
kun $y > 0$ mutta $y \neq 1$. Käsittele tapaukset $y < 1$ ja $y > 1$ erikseen.

4. Logistisen jakauman tiheys on
$$f(y, \mu) = \frac{e^{y-\mu}}{(1 + e^{y-\mu})^2}.$$
Oletetaan satunnaisotos $Y_1, \ldots, Y_n$ tästä jakaumasta. Osoita Ex. 61:n tapaan, että on olemassa yksikäsitteinen äärellinen MLE $\hat{\mu}_n$.

5. Jatkoa edelliseen. Johda $\hat{\mu}_n$:n teorian mukainen asymptoottinen jakauma (ilman todistusta).

6. Oletetaan satunnaisotos $Y_1, \ldots, Y_n$ Weibull(λ, θ)-jakaumasta, jonka tiheys on
$$f(y, \lambda, \theta) = \lambda\theta y^{\theta-1} e^{-\lambda y^{\theta}}.$$
a) Johda uskottavuusyhtälöt. b) Johda teorian mukainen asymptoottinen jakauma. Vihje: Jos $Y \sim$ Weibull(λ, θ), niin $\lambda^{-1/\theta} Y \sim$ Weibull$(1, \theta)$. Tämä saattaa helpottaa laskuja (ks. Ex. 61).

7. Tee **R**-funktio, joka estimoi Weibullin jakauman parametrit esim. `optim`-funktion tai jonkin muun funktion) avulla.

8. Kokeile ed. tehtävän funktion toimivuutta, joillakin parametrien arvoilla. Weibullin jakaumaa voit helposti simuloida, sillä jos $Y \sim$ Exp(λ), niin $Y^{1/\theta} \sim$ Weibull(λ, θ).