JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattinen tilastotiede 2

Harjoitukset 1
17.1.2011

1. Olkoon otosavaruus $\Omega = \mathbb{R}$ ja σ-algebrana Borelin σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, so. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ on pienin σ-algebra, joka sisältää puoliavoimet välit $(a, b]$, $a \leq b$. Osoita σ-kentän aksioomien avulla, että seuraavat joukot kuuluvat $\mathcal{B}$:hen: a) $\{a\}$, b) $[a, b)$, c) (a, b), d) $[a, b]$, e) rationaaliluvut $\mathbb{Q}$, f) irrationaaliluvut $\mathbb{I}$.

2. Osoita, että Example 1:n kaava
$$A \cap B = \cup_{i=1}^{m} \cup_{j=1}^{n} \{(a_i, a_i'] \cap (b_j, b_j']\}.$$
pitää paikkansa.

3. Osoita, että $P(A^c \,|\, B) = 1 - P(A \,|\, B)$.

4. Oletetaan, että kaikille erillisten puoliavoimien välien unioneille $\cup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$,
$$0 < a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq 1,$$
$n = 1, 2, \ldots$, pätee
$$P\{\cup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]\} = \sum_{i=1}^{n}(b_i^2 - a_i^2),$$
Osoita, että P toteuttaa luentojen aksioomit (Axiom1 ja 2) luentoesimerkin 1 Boolen algebrassa.

5. Jos ed. tehtävässä erotuksen $b_i^2 - a_i^2$ sijasta on erotus $F(b_i) - F(a_i)$, niin millainen pitää F:n olla, jotta vastaava P toteuttaa aksioomit.

6. Osoita, että jos A ja B ovat riippumattomia, niin myös tapahtunat A^c ja B^c ovat riippumattomia.

7. Oletetaan, että tapahtumat $A_1, \ldots, A_n$ ovat kokonaan riippumattomia ja että $P(A_i) = \alpha$ jokaisella i:n arvolla. vertaile Bonferronin epäyhtälön antamaa approksimaatiota tarkkaan todennäköisyyteen, kun $n = 5, 10, 15$ ja $\alpha = 0.10, 0.05, 0.01$.

8. Voiko kokonaistodennäköisyyden kaavassa (Theorem 2) joukkoja C_j olla numeroituvasti ääretön määrä?