

Harjoitusten 1 tehtävä 4. Todistus ei olekaan aivan niin suoraviivainen kuin olen luullut. Sama pätee monisteen s. 3 toteamukseen r. 5. Ao. todistus mukailee Billingsleyn todistusta (Billingsley, 1979, s. 22). Yksinkertaisuuden vuoksi tarkastellaan todennäköisyyttä

$$P((a, b]) = b - a, \quad 0 \leq a \leq b \leq 1.$$

Olettamukset:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (0, 1], \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} (a_{ij}, b_{ij}], \quad (a_{ij}, b_{ij}] \cap (a_{ij'}, b_{ij'}) = \emptyset, \quad j \neq j'.$$

Väite:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = 1.$$

Väite seuraa kahdesta aputuloksesta. Oletetaan puoliavoimet välit $(a_k, b_k]$, joita voi olla äärellinen tai numeroituvasti ääretön määrä. Kun välit ovat erillisiä pätee

$$\bigcup_k (a_k, b_k] \subset (a, b] \Rightarrow \sum_k (b_k - a_k) \leq b - a. \quad (1)$$

Mille tahansa puoliavoimille väleille pätee

$$(a, b] \subset \bigcup_k (a_k, b_k] \Rightarrow \sum_k (b_k - a_k) \geq b - a. \quad (2)$$

(1): Oletetaan aluksi, että välejä on äärellinen määrä n kpl. Käytetään täydellistä induktiota. Tapaus $n = 1$ on selvä. Oletetaan, että tulos pätee arvolla $n - 1$. Voimme olettaa yksinkertaisuuden vuoksi, että $a_n = \max_k a_k$. Koska välit ovat erillisiä

$$\bigcup_{k=1}^{n-1} (a_k, b_k] \subset (a, a_n],$$

ja induktiohypoteesin perusteella

$$\sum_{k=1}^{n-1} (b_k - a_k) \leq a_n - a.$$

Siis $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \leq (a_n - a) + (b_n - a_n) = b_n - a \leq b - a$.

Jos välejä on ääretön määrä, niin jokaisella n :n arvolla

$$\bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k] \subset (a, b],$$

joten $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \leq (b - a)$ jokaisella n :n arvolla. Väite pätee siis myös silloin, kun $n \rightarrow \infty$.

(2): Oletetaan taas aluksi, että välejä on äärellinen määrä n . Käytetään täydellistä induktiota. Tapaus $n = 1$ on taas selvä. Oletetaan, että tulos pätee arvolla $n - 1$. Selvästikin b kuuluu jollekin välille. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että $a_n < b \leq b_n$. Jos $a_n \leq a$, väite pätee. Muussa tapauksessa

$$(a, a_n] \subset \bigcup_{k=1}^{n-1} (a_k, b_k],$$

joten induktio-olettamuksen nojalla $\sum_{k=1}^{n-1} (b_k - a_k) \geq a_n - a$. Siis $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \geq (a_n - a) + (b_n - a_n) = b_n - a \geq b - a$. Äärellinen tapaus on todistettu.

Oletetaan nyt, että välejä on ääretön määrä. Valitaan sellainen ϵ , että $0 < \epsilon < b - a$. Silloin

$$[a + \epsilon, b] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k + \epsilon 2^{-k}).$$

Yo. unioni on suljetun välin $[a + \epsilon, b]$ avoin peite. Heine-Borelin lauseen nojalla on olemassa äärellinen osapeite, joka myös sisältää välin $[a + \epsilon, b]$. On siis olemassa sellainen n , että

$$[a + \epsilon, b] \subset \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k + \epsilon 2^{-k}).$$

Tästä seuraa, että pätee myös

$$(a + \epsilon, b] \subset \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k + \epsilon 2^{-k}],$$

johon voimme soveltaa todistamaamme äärellistä tapausta. Siis

$$b - (a + \epsilon) \leq \sum_{k=1}^n (b_k + \epsilon 2^{-k} - a_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) + \epsilon.$$

Tämä pätee kaikilla $0 < \epsilon < b - a$, joten antamalla $\epsilon \rightarrow 0$ saamme väitteen todistetuksi.

Alkuperäinen tilanne on se, että

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{n_i} (a_{ij}, b_{ij}] = (0, 1].$$

Aputuloksista seuraa, että väitteemme pitää paikkansa, sillä

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} (b_{ij} - a_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Harjoitusten 1 tehtävä 5

Luullakseni riittää, että funktio F on kasvava (= ei vähenevä), oikealta jatkuva (kuten Jari Miettinen huomautti) ja $F(1) - F(0) = 1$. Ed. todistus voidaan kuitenkin laajentaa tilanteeseen, missä F on jatkuva kaikissa pisteissä $x \in (0, 1]$ ja oikealta jatkuva origossa.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} (F(b_{ij}) - F(a_{ij})).$$

Koska unionin kuvajoukko on kuvajoukkojen unioni, niin

$$F\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} F(A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{n_i} (F(a_{ij}), F(b_{ij})).$$

Jälkimmäinen yhtälö seuraa siitä, että F on kasvava ja oikealta jatkuva. Toisaalta

$$F\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = F((0, 1]) = (F(0), F(1)].$$

Eo. todistus pätee, kun tarkastellaan välejä $(F(a_{ij}), F(b_{ij}))$ ja $(F(0), F(1))$.