



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTO-
TIETEEN LAITOS

PRO GRADU-TUTKIELMA

Tensoritomografiaa negatiivises- sa kaarevuudessa

Rene Hirvelä

17. marraskuuta 2025



Tekijä

Rene Hirvelä

Otsikko

Tensoritografiaa negatiivisessa kaarevuudessa (engl. Tensor tomography in negatively curved spaces)

Tutkinto-ohjelma

Matematiikan aineenopettajan maisteriohjelma

Päivämäärä

17. marraskuuta 2025

Sivumäärä

51

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa tarkastellaan tensoritografiaa erityisesti negatiivisessa kaarevuudessa. Keskiössä on erityisesti röntgenmuunnos m -asteen symmetrisille tensorikentille Riemannin pinnalla. Kyseinen muunnos on yleistys ns. tavallisesta röntgenmuunnoksesta. Toisin kuin tavalliselle röntgenmuunnokselle, jolle voi kysyä sen injektiivisyyttä ja saada myönteinen vastaus, kunhan avaruuden rakenne ja tarkasteltavien funktioiden joukko on oikea, niin tässä tapauksessa, jos $m \geq 1$, niin vastaus tulee olemaan kielteinen. Tässä luontevaa onkin kysyä, mitä sitten voitaisiin saada selville tarkasteltavasta tensorikentästä. Tätä varten tarkastellaankin muunnoksen solenoidista injektiivisyyttä, eli selvitetään ovatko ns. gradientista tulevat tensorikentät ainoat, jotka kuvautuvat nollassa. Tämä tarkoittaisi, että kentän solenoidinen osa olisi selvitettävissä. Tähän voi myös sisällyttää tavallisen röntgenmuunnoksen funktioille tulkitsemalla oikein tapaus $m = 0$.

Tutkielmassa käsitellään aluksi tomografian kannalta tärkeitä geometrisia käsitteitä, joista tärkeimpänä on yksinkertainen Riemannin monisto. Tämän jälkeen siirrymme tarkastelemaan kaksiulotteisten Riemannin monistojen rakenteita, joista pääsemme Riemannin pintaan esittelemällä kompleksisten monistojen teoriaa. Tätä seuraa analyysityökalujen erityisesti Fourier-analyysin kehittäminen Riemannin pinnalla.

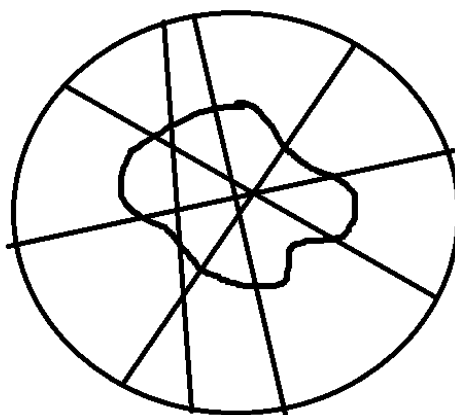
Lopulta pääsemme osoittamaan kuljetusyhtälön avulla, että röntgenmuunnos on solenoidisesti injektiivinen sileillä funktioilla yksinkertaisella Riemannin pinnalla. Tämän jälkeen tarkastellaan myös hieman useamman ulottuvuuden ja yleisen kaarevuuden tapauksia.

Sisällys

Johdanto	3
1 Riemannin geometriaa	6
1.1 Riemannin monistot	6
1.2 Konnektiot ja kaarevuus	9
1.3 Geometrisiä käsitteitä	11
2 Riemannin pinnat	17
2.1 Kompleksirakenteet	17
2.2 Vektorikentät X , $X_\perp$ ja V Riemannin pinnoilla	21
2.3 Integrointi pallokimpulla	24
2.4 Vertikaalinen Fourier-analyysi	27
3 Tensoritomografiaa negatiivisessa kaarevuudessa	32
3.1 Geodeettinen röntgenmuunnos	32
3.2 Solenoidinen injektiivisyys	34
3.3 Kuljetusyhtälö	36
3.4 Solenoidisen injektiivisyyden todistus	39
4 Tensoritomografiaa useampiulotteisessa avaruudessa sekä yleisessä kaarevuudessa	42
4.1 Tensoritomografiaa useampiulotteisessa avaruudessa	42
4.2 Tensoritomografiaa yleisessä kaarevuudessa	44
5 Yhteenveto	48

Johdanto

Röntgentomografiassa fysikaalisesti pyritään muodostamaan kappaleesta röntgensäteilyn vaimenemisen profiili, josta voidaan sitten nähdä kappaleen sisäistä rakennetta ilman, että kappaletta tarvitsee rikkoa. Mittausjärjestelyssä ammutaan siis röntgensäteilyä kappaleen läpi ja mitataan säteilyn intensiteetti sen läpäistyä kappale, jota verrataan intensiteettiin alussa. Tätä toistetaan eri suunnista ja saadusta datasta muodostetaan kokonaiskuva. Kuva 1 havainnollistaa tätä ideaa.



Kuva 1: Röntgentomografiamittaus. Suorat viivat kuvaavat röntgensäteitä, jotka ammutaan kiekon reunoilta ja säteilyn intensiteettiero alun ja lopun välillä mitataan. Ero kuvaa kappaleen kykyä vaimentaa säteilyä ja matemaattisesti tämä mittaus antaa kappaleen pisteittäistä vaimenemista kuvaavan funktion integraalin suoran yli.

Luontevaa on nyt kysyä, miten tämä onnistuu. Toisaalta matematiikassa ensimmäinen kysymys on itse asiassa, onko tämä edes mahdollista? Klassiseen tomografian ongelmaan voi tutustua esimerkiksi lähteestä [5]. Tutkielmassa tarkastellaan kuitenkin ongelmaa monistoilla pohjautuen lähteeseen [14]. Matemaattisesti tämän voi muotoilla seuraavasti:

Ongelma 1 (Geodeettisen röntgenmuunnoksen yksikäsitteisyys). Jos tiedämme Riemannin monistolla (M, g) määritellyn tuntemattoman funktion f integraalin maksimaalisten geodeesien yli, niin tiedämmekö funktion f yksikäsitteisesti? Toisin sanoen, onko röntgenmuunnos Riemannin monistolla (M, g) injektiivinen?

Edellinen ongelma on vielä hieman epämääräinen ja itse asiassa ilman lisätietoja moniston rakenteesta emme osaa vastata tähän. Jos kuitenkin oletetaan, että monisto on yksinkertainen, niin vastaus on myönteinen. Mainittakoon, että tässä yksinkertainen on myös tekninen termi, joka määritellään myöhemmin. Erityisesti, jos monistolla on negatiivinen kaarevuus, niin todistus on melko vaivaton. Lineaarisuuden nojalla tarvitsee itse asiassa osoittaa, että röntgenmuunnoksen ydin on triviaali eli sisältää vain nollafunktion. Olemme kuitenkin kiinnostuneet hieman yleisemmästä ongelmasta, joka laajentaa edellisen tensorikenttiin. Tässä kuitenkin edellisen ongelman muotoilu on jo alkujaan tuhoon tuomittu, sillä tensorikenttiin laajennettu röntgenmuunnos ei ole koskaan injektiivinen, sillä osoittautuu, että tensoriin voidaan lisätä minkä tahansa sileän alemman kertaluvun tensorin gradientti. Voimme tämän johdosta kuitenkin kysyä seuraavaa:

Ongelma 2 (Tensoritomografian solenoidinen injektiivisyys). Jos tiedämme Riemannin monistolla (M, g) määritellyn tuntemattoman m -tensorikentän f röntgenmuunnoksen, niin tiedämmekö sen solenoidisen osan?

Ongelman 1 tapaan tässäkin tarvitaan lisätietoa moniston rakenteesta. Tässä solenoidinen on siis se osa tensorikenttää, joka ei tule gradientista. Ongelmassa 1 pyritään osoittamaan, että röntgenmuunnoksen ydin on triviaali, mutta tässä pyritään näyttämään, että se sisältää vain alemman kertaluvun tensorikentän gradientteja. Yleensäkin lineaarioperaattorin ymmärtämiseksi ydin on yksi keskeinen tiedon palanen. Ongelmassa 2 myös negatiivinen kaarevuus on hyödyllinen tieto, mutta tässä itse asiassa osataan todistaa tehdä yleisemmin 2-ulotteisissa Riemannin monistoissa, kun taas ylemmissä ulottuvuuksissa tarvitaan enemmän. Tässä pro gradu -tutkielmassa pyritään nimenomaan tätä ymmärtämään.

Manittakoon, että inversio-ongelman kannalta pelkästään injektiivisyys (tai solenoidinen injektiivisyys) on vain ongelman ratkaisun kannalta ensimmäinen vaihe. Tällä pyritään siis vastaamaan kysymykseen, olisiko ainakin teoriassa mahdollista mitata jotain epäsuorasti siten, että mittausdata antaa yksikäsitteisen ratkaisun. Tämä ei välttämättä anna esimerkiksi menetelmää laskea datasta mitattava asia. Olisi periaatteessa myös hyvä, jos voitaisiin antaa jonkinlainen rekonstruktiokaava tai -algoritmi. Tämä ei tosin kovin yleisessä tapauksessa onnistu helposti, mutta ainakin klassisessa tilanteessa sopivin oletuksin saadaan röntgenmuunnokselle vasen käänteiskuvaus [5]. Toisaalta olisi myös hyvä, että mikäli mitattavat asiat olisivat jossain mielessä lähellä toisiaan, niin myös niistä saatu data olisi jossain mielessä lähellä. Tätä kutsutaan stabiilisuudeksi ja teoriassa siihen liittyy esimerkiksi tutkielman tapauksessa tietyn laisia estimaatteja sopivien normien suhteen. Lähenteessä [14] on esitetty erilaisia stabiilisuustuloksia. Emme tule kuitenkaan

käsittämään rekonstruktiota ja stabiilisuutta, mutta mainittakoon, että ne ovat inversio-ongelmien kannalta tärkeitä yksityiskohtia.

1 Riemannin geometriaa

Tässä esitellään muutamia tutkielman kannalta olennaisia Riemannin geometrian ja röntgentomografian käsitteitä ja työkaluja. Kaikkea ei määritellä täsmällisesti, eikä kaikkea todisteta. Luvun sisältö pohjautuu kirjoihin [10] ja [11]. Erityisesti on hyvä etukäteen tuntee mikä on sileä monisto, tangenttiavaruus, tangenttikimppu, tensorikenttä, differentiaali ja niihin liittyvä muu peruskäsitteistö. Myös tilavuusmuodoista ja integroinnista monistolla on hyvä tuntee perusteita. Lukija voi nähdä, että joittenkin asioiden täsmällisempää käsittelyä vältellään, koska keskiössä on muunnoksen solenoidinen injektiivisyys ja työkalujen käytön intuitiivinen perusta eikä jokaisen differentiaali geometrian yksityiskohdan ymmärtäminen. Lukija kuitenkin pyritään ohjamaan lähteisiin, joista työkaluihin voi tutustua tarkemmin.

1.1 Riemannin monistot

Emme määrittele sileää monistoa, mutta tarkastelemme röntgentomografiaa Riemannin pinnalla, joten määrittelemme Riemannin moniston ja sen geodeesit, sillä ne ovat tämän kannalta keskeisiä peruskäsitteitä.

Määritelmä 1.1 (Riemannin monisto). Riemannin monisto (M, g) on sileä monisto M varustettuna sileällä $(0, 2)$ -tensorikentällä g , joka indusoi sisätulon tangenttiavaruuksiin.

Emme uppoudu tämän syvemmälle Riemannin moniston määritelmään vaan jätämme perusteisiin tutustumisen lukijalle esimerkiksi lähteestä [10]. Tutkielman kannalta tosin on tehtävä muutama oletus Riemannin monistosta. Oletamme, että monisto on kompakti, yhtenäinen, suunnistuva, sileäreunainen ja vähintään 2-ulotteinen. Kompaktius on yksi tapa varmentaa, että röntgenmuunnos saadaan hyvin määriteltä ja intuitiivisesti kuvaa sitä, että mittaamme jonkun äärellisen kokoisen kappaleen rakennetta. Epäkompaktia tapausta on kuitenkin tutkittu ja sellaiseen voi tutustua esimerkiksi lähteestä [12]. Yhtenäisyys ei rajoita juuri tilannetta, sillä epäyhtenäisen moniston komponentit voi ajatella erillisiksi omiksi monistoiksi. Suunnistuvuus ja sileäreunaisuus varmistaa tietynlaisen säännöllisyyden. Se, että monistolla on reuna taas viittaa siihen, että röntgensäde lähtee reunalta. Reuna tosin aiheuttaa teknisiä haasteita, joista suurimmasta osasta päästään eroon seuraavan lemmän avulla.

Lemma 1.2 (Suljettu laajennus). *Jokainen kompakti sileäreunainen Riemannin monisto (M, g) voidaan isometrisesti upottaa suljettuun monistoon (N, g) .*

Todistuksen idea. Idea on ”liimata” monisto itseensä reunaa pitkin. Katso kirjan [11] esimerkki 9.32. $\square$

Edellisessä lemmassa suljettu monisto tarkoittaa kompaktia reunatonta monistoa. Isometria on puolestaan Riemannin metriikan mielessä. Kuvaus $\phi : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ on Riemannin isometria, jos $\phi^*g_2 = g_1$, missä siis otetaan niin sanottu alkukuvametriikka (eng. pullback metric, katso esimerkiksi [10]). Nyt siis voimme aina ajatella, että tarkasteltava kompakti reunallinen monisto on osa isompaa kompaktia reunatonta monistoa. Huomionarvoista on myös, että suljettuja laajennuksia on useita, mutta valinnalla ei ole merkitystä tämän työn tulosten erityisesti lauseen 3.10 kannalta. Tulemmekin usein viittaamaan tämän lemmän suljettuun laajennukseen, jolloin sen ajatellaan olevan kiinnitetty. Laajennus on tekninen helpotus.

Seuraavassa huomautuksessa taas perustellaan, miksi on olennaista olettaa, että monisto on vähintään 2-ulotteinen.

Huomautus 1.3 (Yksiulotteinen röntgenmuunnos reaaliakselilla). Sileän funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ röntgenmuunnos If on sen integraali

$$If = \int_a^b f(x)dx.$$

Tämä antaa siis lineaarikuvauksen $I : C^\infty([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$. Nyt on helppo nähdä, että $If = 0$ ei takaa, että $f = 0$, eli muunnos ei ole injektiivinen. Kuitenkin funktio $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

on analyysiin peruslauseen nojalla sileä ja $g' = f$. Koska lisäksi $If = 0$ on yhtäpitävää $g(a) = 0 = g(b)$ kanssa, niin pätee, että I on itse asiassa triviaalisti solenoidisesti injektiivinen siinä mielessä, mitä se tässä tapauksessa juuri tarkoittaa, sillä huomautuksella, että yksiulotteisessa tilanteessa tensorit ovat käytännössä skalaarifunktioita.

Määritellään sitten käyrän pituus ja etäisyys Riemannin monistolla.

Määritelmä 1.4 (Käyrän pituus ja etäisyys). Olkoon (M, g) yhtenäinen Riemannin monisto. Paloittain sileän käyrän $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ pituus on

$$L_g(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|_g dt,$$

ja kahden pisteen $x, y \in M$ välinen etäisyys on

$$d_g(x, y) = \inf L_g(\gamma),$$

missä infimum otetaan kaikkien pisteiden x ja y yhdistävien paloittain sileiden käyrien yli.

Huomautus 1.5. Osoittautuu, että etäisyyden määritelmä on hyvin aseteltu (katso [10] propositio 2.50). Lisäksi määritelmän etäisyys antaa todella metriikan monistolle, joka vieläpä indusoi saman topologian kuin monistolla alunperin ([10] lause 2.55).

Seuraavaksi määritellään geodeesit geodeettisen yhtälön ratkaisuuina. Yhtälön idea on se, että se on tavallaan pituusfunktionaalin Euler-Lagrangen yhtälö ([6] propositio 2.2). Voidaan myös osoittaa, että geodeesit ovat lokaalisti minimoivia käyriä ([10] lause 6.15).

Määritelmä 1.6 (Geodeesi ja geodeettinen yhtälö). Geodeesi on käyrä γ , jolle pätee lokaaleissa koordinaateissa geodeettinen yhtälö

$$\ddot{\gamma}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k = 0,$$

missä $\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{il}(\partial_k g_{lj} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{jk})$ on Christoffelin symboli.

Huomautus 1.7 (Einsteinin summauskonventio). Geodeesin määritelmässä olemme ottaneet käyttöön Einsteinin summauskonvention eli indeksin esiintyessä kerran ylä- ja alaindeksinä tarkoittaa, että kyseisen indeksin yli sumataan.

On kuitenkin hyvä huomata, että mikäli monistolla on reuna, niin käyrä, joka kulkee reunaa pitkin voi minimoida etäisyyttä olematta geodeesi. Meidän kannalta tämä ei kuitenkaan ole ongelma, sillä tarkastelemme moniston reunalta lähteviä geodeeseja, jotka antavat meille tomografiadatan.

Haluamme koodata geodeesit niiden alkupaikan ja lähtönopeuden avulla. Tätä varten määritellään pallokimppu.

Määritelmä 1.8 (Pallokimppu). Olkoon TM Riemannin moniston (M, g) tangenttikimppu. Pallokimppu on joukko

$$SM = \{(x, v) \in TM : |v|_g = 1\}.$$

Osoittautuu ([10] lause 4.27), että pisteelle $(x, v) \in SM$ löytyy yksikäsitteinen geodeesi $\gamma_{x,v}$, jolle ajan hetkellä $t = 0$ geodeesi on paikassa x ja nopeus on v . Geodeesien muihin perustuloksiin voi tutustua Leen kirjasta [10].

Olemme nyt määritelleet peruskäsitteitä jokseenkin epämääräisesti, mutta niiden täsmällisempään tarkasteluun voi tutustua esimerkiksi Leen kirjoista [10] ja [11] tai esimerkiksi Ilmavirran monisteesta [6]. Edellisten konseptien syvälinen tarkastelu veisi huomiota tutkielman kannalta olennaisilta työkaluilta ja tarkoitus on vain tehdä perusasiat ainakin intuitiivisesti selviksi.

1.2 Konnektiot ja kaarevuus

Monistolla ei ole selvää, mitä derivointi oikeastaan tarkoittaa. Esimerkiksi vektorikentän tapauksessa ei toimi erotusosamäärän kaltainen lähestymistapa, sillä mitä vektorikentän $V(x)$ muutos edes tarkoittaa, kun x muuttuu, sillä vektorit $V(x) \in T_x M$ eri x arvoilla ovat eri avaruuksissa. Tätä varten tarvitaan tapa vertailla tangenttivektoreita läheisten tangenttiavaruuksien välillä. Tarvitaan konnektio ∇ , joka kuvaa vektorikenttäparin (X, Y) vektorikentäksi $\nabla_X Y$ siten, että se toteuttaa euklidisen avaruuden suuntaisderivaatan laskusäännöt:

- $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,
- $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y$,

missä $f \in C^\infty(M)$. Tässä voidaan ajatella, että $\nabla_X Y$ on ” Y :n derivaatta X :n suuntaan.” Konnektiolta voidaan myös vaatia, että se on jotenkin yhteensopiva metriikan g kanssa, jolloin

- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,
- $X \langle Y, Z \rangle_g = \langle \nabla_X Y, Z \rangle_g + \langle Y, \nabla_X Z \rangle_g$.

Edellisessä $[A, B] = AB - BA$ on kommutaattori. Konnektioihin voi tarkemmin tutustua esimerkiksi läheestä [10]. Olennaista on erityisesti, että konnektio määrittelee yksikäsitteisen konnektion tensorikimpuille (Lee [10] propositio 4.15). Määritellään sitten tietty konnektio, jota kutsutaan Levi-Civita-konnektioksi.

Määritelmä 1.9 (Levi-Civita-konnektio). Riemannin monistolla (M, g) Levi-Civita-konnektio on lokaaleissa koordinaateissa

$$(\nabla_X Y)^i = X^j \partial_j Y^i + \Gamma_{jk}^i X^j Y^k.$$

Osoittautuu, että tämä on yksikäsitteinen metrinen konnektio Riemannin monistolla (katso [10] lause 5.10). Nyt tästä eteenpäin konnektio, jota käytetään, on juuri Levi-Civita-konnektio.

Differentiaali geometriassa ei voida puhua vakiovektorikentästä, sillä vektorit eri pisteissä ovat eri tangenttiavaruuksissa. Tätä varten määritellään kovariantti derivaatta käyrää pitkin.

Määritelmä 1.10 (Kovariantti derivointi pitkin käyrää). Olkoon (M, g) Riemannin monisto. Olkoon $V(t) \in T_{\gamma(t)} M$ vektorikenttä pitkin sileää käyrää γ . Lokaaleissa koordinaateissa vektorikentän kovariantti derivaatta $D_t V$ pitkin käyrää γ on

$$(D_t V)^i = \dot{V}^i + \Gamma_{jk}^i V^j \dot{\gamma}^k.$$

Yhdensuuntaisuus käyrällä määritelläänkin siten, että vektorikentän kovariantti derivaatta häviää. Tätä varten esitellään seuraava tulos.

Propositio 1.11 (Yhdensuuntaisuus ja yhdensuuntaissiirto). *Olkoon γ sileä käyrä Riemannin monistolla (M, g) ja $v \in T_{\gamma(0)}M$. Tällöin alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} D_t V = 0 \\ V(0) = v \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu käyrää pitkin. Tätä vektorikenttää V sanotaan vektorin v yhdensuuntaissiirroksi.

Todistuksen idea. Idea on käyttää lokaaleissa koordinaateissa standardia differentiaaliyhtälöiden olemassaolo- ja yksikäsitteisyystulosta ja jatkaa se koko käyrälle. Yksityiskohdat Leen kirjan [10] lauseessa 4.32. $\square$

Huomautus 1.12. Erityisesti $\dot{\gamma}$ on vektorikenttä pitkin käyrää γ . Lisäksi geodeettinen yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $D_t \dot{\gamma} = 0$. Toisin sanoen geodeesi on käyrä, joka yhdensuuntaissiirtää nopeuttaan. Itse asiassa tästä seuraa helposti, että geodeeseilla on vakiovauhti. Voimme siis tästä eteenpäin olettaa, että $|\dot{\gamma}| = 1$, kun γ on geodeesi.

Määritellään vielä lopuksi kaarevuus kvantitatiivisesti. Pienellä tarkastelulla huomataan, että erityisesti Euklidisessa avaruudessa pätee $\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = \nabla_{[X,Y]} Z$. Tämä motivoi määrittelemään seuraavaa.

Määritelmä 1.13. (Riemannin kaarevuustensori) Olkoon (M, g) Riemannin monisto. Riemannin kaarevuustensori R on

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Nyt itse asiassa monisto on lokaalisti isometrinen euklidisen avaruuden kanssa, jos ja vain jos kaarevuustensori on identtisesti nolla (Leen [10] lause 7.10). Siis $R = 0$ on eräänlainen tasaisuuskriteeri. Itse kaarevuus määritellään tarkastelemalla kahta vektorikenttää eri suuntiin seuraavasti.

Määritelmä 1.14. (Sektionaalinen kaarevuus ja Gaussin kaarevuus pinnoilla) Olkoon (M, g) Riemannin monisto. Sektionaalinen kaarevuus on kahdelle lineaarisesti riippumattomalle vektorikentälle X ja Y samassa pisteessä luku

$$K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle_g}{|X|_g^2 |Y|_g^2 - \langle X, Y \rangle_g^2}.$$

Erityisesti 2-ulotteisella Riemannin pinnalla Gaussin kaarevuus pisteittäin on

$$K = \langle R(X, Y)Y, X \rangle_g,$$

missä $|X|_g = 1 = |Y|_g$ ja $\langle X, Y \rangle_g = 0$.

Huomautus 1.15. Edellisessä määritelmässä todellakin 2-ulotteisessa tapauksessa kaarevuus ei riipu vektorikenttien valinnasta. Tämän näyttämiseksi on helpointa määritellä kuvaus $Rm(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle_g$, jota kutsutaan myös kaarevuustensoriksi. Tällä on paljon symmetrioita (Lee [10] propositio 7.12), joiden avulla on suoraviivaista näyttää, että itse asiassa sektonaalinen kaarevuus ei niinkään riipu vektoreista X ja Y , vaan niiden virittämästä aliavaruudesta. Tätä varten riittää näyttää, että kaarevuus on sama kahdelle kohtisuoralle yksikkövektorille V ja W , jotka virittävät saman aliavaruuden. Tämä onnistuu suoraviivaisella, mutta pitkäköllä laskulla, jonka sivuutamme tässä. Tästä seuraa nyt, että 2-ulotteisessa tapauksessa kaarevuus riippuu vain pisteestä, sillä tangenttiavaruus on itsessään 2-ulotteinen tangenttitaso. Mainittakoon myös, että kaarevuus mitataan ikään kuin kaksiulotteisesti käyttäen kahta vektorikenttää.

Se mikä tästä tekee juuri oikean tavan määritellä kaarevuus on lopulta esimerkkien varassa. Mainittakoon, että erityisesti upotetuilla pinnoilla voidaan yksikkönormaanin avulla määritellä kaksi pääkaarevuussuuntaa, joiden tulo on Gaussin kaarevuus. Itse asiassa pätee niin sanottu Gaussin merkittävä lause (Gauss Theorema Egregium), joka sanoo, miten Gaussin kaarevuus voidaan laskea suoraan metriikasta g , mikä osoittaa, että se on pinnan sisäinen ominaisuus. Toisin sanoen kaarevuuden voi havaita pinnalta käsin ilman tietoa mistään ulkoisesta avaruudesta.

1.3 Geometrisiä käsitteitä

Tulemme tarvitsemaan röntgenmuunnoksen kannalta joitain lisäominaisuuksia moniston geometriasta. Käsittelemme tässä luvussa niitä ja käsittely pohjautuu pääosin lähteen [14] lukuun 3.

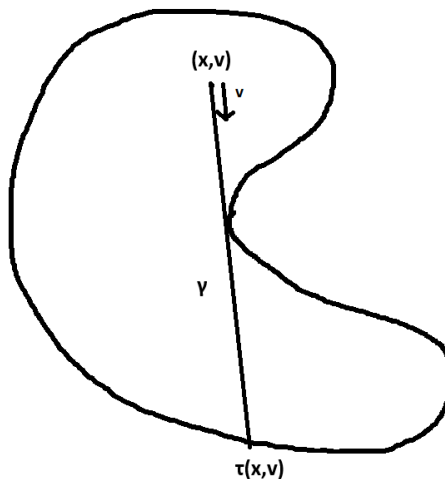
Yksi ongelma integroimisesta pitkin geodeesejä voi olla, että geodeesi on äärettömän pitkä, jolloin röntgenmuunnos ei olisi välttämättä äärellinen. Tätä varten esitetään seuraava määritelmä.

Määritelmä 1.16 (Poistumis aika ja ansaton monisto). Olkoon (M, g) kompakti, yhtenäinen ja sileäreunainen Riemannin monisto ja olkoon (N, g) lemmän 1.2 mukainen suljettu laajennus. Kaikille $(x, v) \in SM$ määritellään geodeesin $\gamma_{x,v}$ poistumisajaksi

$$\tau(x, v) = \sup\{t \in [0, \infty) : \gamma_{x,v}([0, t]) \subset M\}.$$

Sanomme, että monisto (M, g) on ansaton, jos $\tau(x, v) < \infty$ kaikille $(x, v) \in SM$. Toisin sanoen ansattoman moniston kaikilla geodeeseillä on äärelliset pituudet.

Se, että poistumisaika toimii intuitiivisesti oikein on havainnollistettu kuvalla 2.



Kuva 2: Geodeesi lähtee pisteestä (x, v) ja osuu tangentiaalisesti reunaan. Kuitenkin poistumisaika on se hetki, kun geodeesi olisi päätyvässä pois monistolta eikä se hetki, jolloin geodeesi osuisi ensimmäisen kerran reunaan.

Koska eriyisesti käsittelemme reunallisia monistoja, niin on syytä määritellä myös pallokimpun reuna.

Määritelmä 1.17 (Pallokimpun reunajoukot). Pallokimpun reuna on joukko

$$\partial SM = \{(x, v) \in SM : x \in \partial M\}.$$

Sisäänpäin ja ulospäin osoittavat reunat ovat

$$\partial_{\pm} SM = \{(x, v) \in \partial SM : \pm \langle v, \nu(x) \rangle_g \geq 0\},$$

missä ν on sisäänpäin osoittava yksikkönormaalivektori reunalla. Lisäksi $\partial_0 SM$ on näiden leikkaus.

Edellisen määritelmän ν varataan nyt tarkoittamaan kyseistä yksikkönormaalialia ja se ymmärretään tutkielmassa intuitiivisesti. Tarkemmin sanotuna sisäänpäin osoittaminen tarkoittaa, että se on nopeus käyrälle, joka ainakin lyhyen aikaa tulevaisuuteen kulkee monistolla. Vastaavasti ulospäin osoittaessa on kuljettava menneisyyteen. Tangentiaalisessa tapauksessa puolestaan kuljetaan reunalla. Normaalius on taas Riemannin geometrian käsite

eli yksikkönormaalien sisätulo on nolla tangentiaalisia vektoreita vasten. Kun moniston reuna on sileä, on sille seuraavan lemmän karakterisaatio, jossa karakterisoituu myös yksikkönormaali. Muistetaan kuitenkin ensin, että moniston reuna on sileä, jos reuna itsessään on sileä monisto, jonka ulottuvuus on yhden matalampi kuin alkuperäisen moniston.

Lemma 1.18 (Reunan määrittävä funktio). *Olkoon (M, g) kompakti Riemannin monisto, jolla on sileä reuna, ja olkoon (N, g) Lemman 1.2 mukainen suljettu laajennus. Tällöin on olemassa reunaan määrittävä funktio $\rho \in C^\infty(N)$, jolle pätee*

- $\rho(x) = d_g(x, \partial M)$ jokaisen reunapisteen ympäristössä,
- $M = \{x \in N : \rho \geq 0\}$,
- $\partial M = \{x \in N : \rho = 0\}$,
- $N \setminus M = \{x \in N : \rho < 0\}$,
- $\nabla \rho = \nu$ joukossa ∂M .

Todistuksen idea. Idea on, että kompaktiutta ja ykkösen ositusta hyödyntämällä voidaan lähellä reunaa määritellä, että $\rho(x) = \pm d_g(x, \partial M)$ siten, että merkki vaihtuu mentäessä reunan yli. Kun päästään tarpeeksi kauas moniston reunasta, niin lopulta määritellään $\rho(x) = \pm 1$. Sileys on tällöin tarkastettava lähellä reunaa. Lopulta pitää myös näyttää, että todellakin $\nabla \rho = \nu$ joukossa ∂M , mikä vaati rajatarkastelun lähellä reunaa. $\square$

Lemma siis sanoo, että pystymme suljetussa laajennuksessa kareketrisoimaan jonkin sileän funktion arvolla, olemmeko alkuperäisen moniston sisällä, reunalla vaiko ulkopuolella. Olennaista on myös se, että yksikkönormaali saadaan funktion gradientista. Jatkossa pyrimme myös varaamaan funktion ρ tarkoittamaan kyseistä funktiota.

Yksikkönormaalilla on myös seuraavan määritelmän tarkoitus.

Määritelmä 1.19. Toinen perusmuoto on kuvaus $II_x(v, w) = -\langle \nabla_v \nu, w \rangle_g$ joukossa $T\partial M$, missä $x \in \partial M$ ja $v, w \in T_x M$. Sanomme, että ∂M on aidosti konvekksi, jos II_x on positiividefiniitti kaikilla $x \in \partial M$.

Huomautus 1.20. Ensimmäinen perusmuoto on vanha nimitys metriikalle g , joka indusoi pinnalle ulkoisesta avaruudesta. Termi ”toinen perusmuoto” on jäänyt kuitenkin käyttöön ja sille käytetään usein merkintänä roomalaista kakkosta II .

Intuitiivisesti toinen perusmuoto mittaa reunan ulkoista kaarevuutta moniston sisällä. Pintojen tapauksessa reuna on yksiulotteinen, joten w ja v ovat lineaarisesti riippuvat. Konveksissa tapauksessa intuitiivisesti yksikkönormaalin muutos tangenttivektorin suuntaan on vastakkaisuuntaista eli normaali pyrkii kääntymään pois päin tangenttivektorista. Täten konveksisuuden määritelmä on järkevä.

Ansattomuus ja aidosti konvekksi reuna ovat olennaisia oletuksia monen tuloksen kohdalla. Tässä tutkielmassa yleensä monisto on kompakti ja ansaton ja jolla on aidosti konvekksi reuna. Kuten mainitsimme ensimmäiset kaksi mahdollistavat, että geodeesit ovat äärellisen pitkiä ja että röntgenmuunnos ei voi olla ääretön. Aidosti konveksisuus estää puolestaan geodeesia välillä poistumasta monistolta ja mahdollisesti palaamaan takaisin. Monessa injektiivisyystuloksessa tarvitaan kuitenkin vielä lisäksi, että monistolla ei ole niin sanottuja konjugaattipisteitä eli kyseessä on yksinkertainen monisto. Palaamme tähän vielä luvun lopuksi, mutta tarkastellaan ensin poistumisajan säännöllisyyttä.

Lemma 1.21. *Olko ρ lemmän 1.18 antama reunan määrittävä funktio. Määritellään sen avulla funktio*

$$h: SN \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x, v, t) = \rho(\gamma_{x,v}(t)).$$

Jos nyt $(x, v) \in SN$ ja $t_0 \in \mathbb{R}$ siten, että $x_0 = \gamma_{x,v}(t_0) \in \partial M$, niin pätee

- $h(x, v, t_0) = 0,$
- $\frac{\partial h}{\partial t}(x, v, t_0) = \langle \nu(x_0), \dot{\gamma}_{x,v}(t_0) \rangle_g,$
- $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x, v, t_0) = \langle \nabla_{\dot{\gamma}_{x,v}(t_0)} \nabla \rho, \dot{\gamma}_{x,v}(t_0) \rangle_g = \nabla^2 \rho(\dot{\gamma}_{x,v}(t_0), \dot{\gamma}_{x,v}(t_0)).$

Todistus. Ensimmäinen väite pätee, koska $\partial M = \{x \in N : \rho = 0\}$. Toinen väite seuraa suoralla laskulla käyttäen tietoa, että $\nabla \rho = \nu$ joukossa ∂M . Suoralla laskulla saadaan myös

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x, v, t_0) = \langle \nabla_{\dot{\gamma}_{x,v}(t_0)} \nabla \rho, \dot{\gamma}_{x,v}(t_0) \rangle_g + \langle \nabla \rho, \nabla_{\dot{\gamma}_{x,v}(t_0)} \dot{\gamma}_{x,v}(t_0) \rangle_g.$$

Koska $\gamma_{x,v}$ on geodeesi, niin viimeinen termi on nolla, mistä viimeinen kohta seuraa. $\square$

Huomautus 1.22. Edellisessä lemmassa esiintyy Hessen matriisi $\nabla^2 \rho$. Itse asiassa lemmän avulla saadaan, että Hessen matriisi antaa toisen perusmuodon seuraavasti: $II(v, v) = \nabla^2 \rho(v, v)$ joukossa $\partial_0 SM$.

Osoitetaan nyt, että poistumisaika on jatkuva pallokimpulla ja sileä sen sisuksessa.

Lemma 1.23. *Olkoon (M, g) kompakti ansaton monisto, jolla on aidosti konvekksi reuna. Tällöin τ on jatkuva joukossa SM ja sileä joukossa $SM \setminus \partial_0 SM$.*

Todistus. Todistetaan ensin sileys. Olkoon $(x, v) \in SM \setminus \partial_0 SM$. Nyt $\gamma_{x,v}(\tau(x, v)) \in \partial M$ ja $\dot{\gamma}_{x,v}(\tau(x, v)) \in \partial_- SM$. Konveksisuuden nojalla pätee myös $\dot{\gamma}_{x,v}(\tau(x, v)) \notin \partial_0 SM$. Näin ollen lemmän 1.21 nojalla

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x, v, \tau(x, v)) = \langle \nu, \dot{\gamma}_{x,v}(\tau(x, v)) \rangle_g < 0.$$

Koska myös $h(x, v, t_0) = 0$, niin sileys joukossa $SM \setminus \partial_0 SM$ seuraa nyt implisiittifunktiolauseesta.

Nyt riittää enää osoittaa jatkuvuus joukon $\partial_0 SM$ pisteissä. Olkoon siis $(x_0, v_0) \in \partial_0 SM$. Lemman 1.21 ja Taylorin kehitelmän nojalla

$$\begin{aligned} h(x_0, v_0, t) &= h(x_0, v_0, 0) + \frac{\partial h}{\partial t}(x_0, v_0, 0)t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x_0, v_0, 0)t^2 + O(t^3) \\ &= \langle \nu, \dot{\gamma}_{x_0, v_0}(0) \rangle_g t + \frac{1}{2} \langle \nabla_{\dot{\gamma}_{x_0, v_0}(0)} \nabla \rho, \dot{\gamma}_{x_0, v_0}(0) \rangle_g t^2 + O(t^3) \\ &= -\frac{1}{2} II_{\dot{\gamma}_{x_0, v_0}(0)}(\dot{\gamma}_{x_0, v_0}(0), \dot{\gamma}_{x_0, v_0}(0))t^2 + O(t^3), \end{aligned}$$

missä viimeisessä vaiheessa käytetään toisen perusmuodon määritelmää ja muistetaan, että $\nabla \rho = \nu$ joukossa ∂M . Nyt pienellä $t_0 > 0$ pätee $h(x_0, v_0, t_0) < 0$, jolloin kuvauksen h jatkuvuuden nojalla on pisteen (x_0, v_0) ympäristä, jossa pätee $h(x, v, t_0) < 0$. Nyt on voimassa $\tau(x, v) < t_0$, joten $\tau(x, v)$ on pientä ja siten jatkuva pisteessä (x_0, v_0) . $\square$

Huomautus 1.24. Tarkastelemalla esimerkiksi tasossa yksikkökiekkoa on helppo nähdä, että τ ei välttämättä ole sileä joukon $\partial_0 SM$ pisteissä. Itse asiassa τ ei koskaan ole täysin sileä.

Meiltä puuttuu enää vain yksi ominaisuus monistolta, mikä on aiemmin mainittu konjugaattipisteiden puute. Tätä varten määritellään ensin Jacobin kenttä.

Määritelmä 1.25 (Jacobin kenttä). Olkoon J sileä vektorikenttä käyrällä γ . Jos tämä toteuttaa Jacobin yhtälön

$$D_t^2 J + R_\gamma J = 0,$$

missä $R_\gamma J = R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma}$, niin sanomme, että kenttä J on Jacobin kenttä.

Jacobin kenttiin voi tarkemmin tutustua lähteen [10] luvusta 10, mutta lyhyesti kerrottuna Jacobin kentät kuvaavat geodeesin ja sen lähellä olevien geodeesien eroa. Hieman tarkemmin se kertoo haajaantuuko geodeesin lähi-geodeesit vai kasaantuvatko ne samaan pisteeseen jonkin ajan kuluessa.

Määritelmä 1.26 (Konjugaattipisteet). Olkoon $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ geodeesin osa. Päätepisteet $\gamma(a)$ ja $\gamma(b)$ ovat konjugaattipisteitä käyrällä γ , jos on olemassa ei-triviaali Jacobin kenttä J käyrällä γ , jolle $J(a) = 0 = J(b)$.

Lyhyesti kuvattuna konjugaattipisteet ovat sellaisia, että toisesta konjugaattipisteestä lähtevät geodeesit lähes tapaavat toisensa seuraavassa konjugaattipisteessä. Erityisesti voidaan osoittaa, että jos geodeesi lähtee toisesta konjugaattipisteestä, se ei enää minimoi etäisyyttä vastinkonjugaattipisteeseen jälkeen (Lee [10] lause 10.26). Tämä on kuitenkin vain riittävä ehto siihen, ettei geodeesi enää minimoi etäisyyttä. Esimerkiksi sylinterillä ei ole konjugaattipisteitä, mutta esimerkiksi sitä kiertävät ympyrät ovat geodeeseja, jotka eivät minimoi etäisyyttä kuljettuaan puolikaaren.

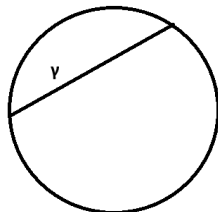
Nyt olemme valmiit määrittelemään röntgenmuunnoksen kannalta hyvin käyttäytyvän geometrisen rakenteen.

Määritelmä 1.27 (Yksinkertainen monisto). Kompakti, yhtenäinen ja suunnistuva Riemannin monisto, jolla on sileä reuna, on yksinkertainen, jos

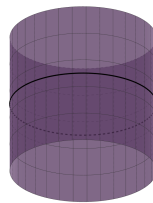
- se on ansaton,
- sen reuna on aidosti konvekksi ja
- sillä ei ole konjugaattipisteitä.

Esimerkiksi tason suljettu yksikkökierokkiekko on yksinkertainen monisto. Esimerkki epäyksinkertaisesta monistosta on sylinterin vaippa, johon sisältyy myös reuna. Sylinterillä geodeeseja ovat mm. sitä kiertävät ympyrät, joten sylinteri on ansallinen monisto. Edellisiä esimerkkejä on havainnollistettu kuvassa 3. Lukija voi pohtia miten muita ominaisuuksia voidaan rikkoa. Intuitio yksinkertaisessa monistossa erityisesti 2-ulotteisessa tapauksessa on, että se on kiekkomainen pala pintaa.

Huomautus 1.28. Tavallisesti yksinkertaisen moniston määritelmässä ei oleteta suunnistuvuutta, sillä osoittautuu (katso [14] lause 3.8.2), että yksinkertaiset Riemannin monistot ovat yhdesti yhtenäisiä monistoja, jotka taas ovat suunnistuvia. Yhdesti yhtenäisellä monistolla suunnistuvuus perustuu taas siihen, että suunnistumattomalla monistolla on ei-triviaali perusryhmä. Tutkielman kannalta tämä ei ole kuitenkaan olennaista, joten olemme sisällyttäneet suunnistuvuuden yksinkertaisen moniston määritelmään suoraviivaistamaan asioita.



(a) Kiekko.



(b) Sylinteri.

Kuva 3: Esimerkit yksinkertaisesta ja ei-yksinkertaisesta monistosta. Tason suljettu yksikkökiekko on yksinkertainen monisto, kun taas sylinterin vaippa, joka sisältää reunan, ei ole yksinkertainen, koska se on ansallinen. Kiekossa geodeesit ovat janoja, kun taas sylinterissä esimerkiksi sen kiertävä ympyrä on geodeesi, joka ei poistu sylinterin vaipalta.

2 Riemannin pinnat

Tässä luvussa siirrymme hieman edistyneimpiin esitietoihin, jotka eivät ole Riemannin geometrian peruskäsitteistöä pohjautuen [14] lukuihin 3 ja 6. Tarkastelemme nyt enemmän analyysin liittyviä asioita. Yksinkertaisuuden ja erityisasemansa vuoksi päädyimme kuitenkin rajoittumaan 2-ulotteisiin monistoihin.

2.1 Kompleksirakenteet

Kaksiulotteisen tomografian vahvuus piilee kompleksisissa rakenteissa. Tarkastellaankin tässä luvussa kompleksisia ja melkein kompleksisia rakenteita. Emme juuri tarvitse kuin perusteita, mutta mainittakoon, että ne ovat itsessäänkin mielenkiintoisia. Kompleksirakenteissa on mahdollista puhua analyyttisyydestä, mistä jo tavallisesta kompleksianalyysistä tiedetään, että ero pelkkään sileyteen, on huomattava, kun verrataan vain esimerkiksi eri sileyden kertalukuja. Näin käykin, että kompleksiset monistot mahdollistavat mielenkiintoisia tuloksia, mutta jotkin tulokset eivät pidä enää vastaavassa muodossa paikkansa. Esimerkiksi Whitneyyn upotuslausetta ei voi mutoilla analyyttisessä muodossa kompakteille monistoille, jossa esiintyy tarpeeksi korkeaulotteinen $\mathbb{C}^n$, sillä tämän kompaktit alimonistot ovat triviaaleja. Oikeampi avaruus onkin projektiivinen avaruus, mutta sekään ei toimi kaikille monistoilla [9]. Mainittakoon myös, että kompleksisilla monistoilla on myös fysiikassa sovelluksia esimerkkinä säieteoria ja mittakenttäteoria. Kiinnostuneet voivat tutustua kompleksisiin monistoihin esimerkiksi Leen kompleksis-

ten monistojen kirjasta [9]. Määritellään nyt kompleksinen monisto vedoten siihen, että sileän moniston määritelmä on tunnettu.

Määritelmä 2.1 (Kompleksinen monisto). Kompleksinen n -ulotteinen monisto on $2n$ -ulotteinen sileä monisto, jolla on avoin peite U_i ja koordinaatitkuvaukset $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ (kanonisella identifikaatiolla $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$) siten, että kartanvaihtokuvaukset $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi(U_i \cap U_j)$ ovat analyyttisiä. Atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_i$ on kompleksinen atlas. Kompleksiset atlaat ovat ekvivalentit jos niiden yhdiste on kompleksinen atlas eli ne määrävät ekvivalentin maksimaalisen atlaan. Kompleksinen rakenne on kompleksisten atlasien ekvivalenssiluokka.

Tästä suoraan voimme määritellä Riemannin pinnan, jossa lopulta tomografiaa tarkastellaan.

Määritelmä 2.2 (Riemannin pinta). Yksiulotteinen kompleksinen monisto on Riemannin pinta.

Voisimme, nyt periaatteessa suoraan olettaa, että tomografian käsittelyssä on Riemannin pinta, mutta itse asiassa 2-ulotteistelle suunnistuvalla Riemannin monistoille on mahdollista löytää kompleksinen rakenne melko vaivattomasti määrittelemällä sinne melkein kompleksinen rakenne, joka määritellään seuraavaksi.

Määritelmä 2.3 (Melkein kompleksinen rakenne). Olkoon M sileä monisto. Melkein kompleksinen rakenne monistolle M on $(1,1)$ -tensorikenttä J , jonka rajoittumalle mihin tahansa tangenttitasoon $T_p M$ pätee $J_p \circ J_p = -\text{Id}$. Jos monistolla on Riemannin metriikka g , niin rakenne on yhteensopiva tämän kanssa, jos $\langle Jv, Jw \rangle_g = \langle v, w \rangle_g$ kaikille $v, w \in T_p M$.

Tässä siis ideana on se, että J_p on tangenttitasossa ikään kuin imaginääriyksiköllä i kertomista vektoriavaruudessa $T_p M$. Huomataan, että analyyttisissä koordinaateissa $z_j = x_j + iy_j$ voidaan määritellä kanoninen melkein kompleksinen rakenne

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Kompleksisella rakenteella on siis melkein kompleksinen rakenne. Kuitenkin melkein kompleksinen rakenne ei ole riittävä kompleksiseen rakenteeseen ja tästä juuri nimitys melkein kompleksinen rakenne. Itse asiassa kompleksiset monistot ovat erityisesti aina kanonisella tavalla suunnistuvia (katso [9] propositio 1.49). Ei-suunnistuvat monistot kuten Möbius-nauha ei ole kompleksinen monisto. Konstruotimme nyt suunnistuvalla monistolle melkein kompleksisen rakenteen 90 asteen kierron avulla.

Määritelmä 2.4. Olkoon (M, g) kaksiulotteinen suunnistuva Riemannin monisto. Määrittelemme tangenttivektorin v 90 asteen kierron vastapäivään yksikäsitteiseksi tangenttivektoriksi $v^\perp$, jolle pätee

- $|v^\perp|_g = |v|_g$,
- $\langle v, v^\perp \rangle_g = 0$,
- $(v, v^\perp)$ on positiivisesti suunnistettu kanta tangenttitasossa, kun $v \neq 0$.

Huomautus 2.5. On suoraviivaista todeta $v^\perp$ on todella yksikäsitteinen. Lisäksi tähän määritelmän suunnistuvuus oletus on olennainen, sillä muuten ei voisi puhua myötä- ja vastapäivään kierrosta. Viimeistä ehtoa ei tällöin olisi, jolloin vektorille olisi kaksi vaihtoehtoa.

Seuraava lemma antaa nyt täsmälleen mikä moniston melkein kompleksinen rakenne on.

Lemma 2.6. *Olkoon (M, g) kaksiulotteinen suunnistuva Riemannin monisto. Tällöin melkein kompleksinen rakenne J on yhteensopiva metriikan g kanssa, jos ja vain jos $J(v) = \pm v^\perp$ kaikilla v , missä merkki on kiinnitetty moniston yhtenäisessä komponentissa.*

Todistus. Oletetaan ensin, että J on melkein kompleksinen rakenne, joka on yhteensopiva metriikan g kanssa. Olkoon $p \in M$ ja $v \in T_p M$. Tällöin selvästi $|Jv|_g = |v|_g$ ja

$$\langle Jv, v \rangle_g = -\langle Jv, J^2v \rangle_g = -\langle v, Jv \rangle_g,$$

jolloin $\langle Jv, v \rangle_g = 0$. Koska tangenttiavaruus $T_p M$ on kaksiulotteinen, niin on oltava, että $J(v) = s(p, v)v^\perp$, jollekin kuvaukselle $s: TM \rightarrow \{-1, 1\}$. Osoitetaan, että jokaisessa yhtenäisessä komponentissa kuvaus on vakio. Näytetään ensin, että s riippuu vain pisteestä p . Jos olisi vektorit $v, w \in T_p M \setminus \{0\}$ siten, että $J(v) = v^\perp$ ja $J(w) = -w^\perp$, niin kuvauksien J ja $v \mapsto v^\perp$ lineaarisuudella päätisi

$$J(v + w) = s(p, v + w)(v^\perp + w^\perp) = v^\perp - w^\perp,$$

jolloin $s(p, v + w)$ arvosta riippuen joko $v^\perp = -v^\perp$ tai $w^\perp = -w^\perp$ eli $v = 0$ tai $w = 0$, mikä on ristiriita, joten $s(p, v) = s(p)$. Määritellään sitten $\tilde{J}(v) = v^\perp$, mikä on sileä ja erityisesti jatkuva. Nyt lokaaleissa koordinaateissa tarpeeksi pienessä koordinaattiympäristössä vektorikentälle $v \in TM \setminus \{0\}$ pätee J :n komponenteissa joko $\tilde{J}_1(v) \neq 0$ tai $\tilde{J}_2(v) \neq 0$. Voimme siis ilmaista $s(p) = J_i(v)/\tilde{J}_i(v)$, missä i valitaan siten, että lauseke on määritelty. Tämä osoittaa, että kuvaus $s: M \rightarrow \{-1, 1\}$ on jatkuva ja siten vakio jokaisessa komponentissa.

Jos taas $J(v) = \pm v^\perp$, niin se on selvästi melkein kompleksinen rakenne, mikä on yhteensopiva metriikan g kanssa. $\square$

Edellinen lemma antaa nyt melkein kompleksisen rakenteen. Kompleksista rakennetta varten tarvitaan vielä erityiset lokaalit koordinaatit.

Lause 2.7 (Isotermiset koordinaatit [1]). *Olkoon (M, g) kaksiulotteinen suunnistuva Riemannin monisto. Tällöin jokaiselle pisteelle on olemassa lokaalit positiivisesti suunnistetut koordinaatit $x = (x_1, x_2)$ siten, että metriikka on muotoa*

$$g_{ij}(x) = e^{2\lambda(x)}\delta_{ij},$$

jollakin $\lambda \in C^\infty(M)$. Kyseisiä koordinaatteja kutsutaan isotermisiksi koordinaateiksi.

Suhteellisen alkeellinen ja seurattava todistus edelliselle lauseelle löytyy esimerkiksi lähteestä [1]. Kyseinen todistus käyttää Gaussilta peräisin olevia merkintöjä metriikan komponenteille, mutta tulos on olennaisesti sama. Todistus on kuitenkin pitkä ja tekninen, eikä tutkielman kannalta olennainen.

Edellinen lause sanoo siis, että kaksiulotteinen Riemannin moniston metriikka voidaan esittää lokaalisti vain siis muodossa, joka on diagonaalinen ja diagonaali-alkiot ovat samat. Sovimme nyt myös että kirjain λ on varattu edellisen lauseen antamalle sileälle kuvaukselle. Isotermisten koordinaattien avulla osoitetaan, että kaksiulotteisella suunnistuvalla Riemannin monistolla on kompleksinen rakenne.

Lause 2.8. *Kaksiulotteisella suunnistuvalla Riemannin monistolla (M, g) on kompleksinen rakenne, jonka indusoima melkein kompleksinen rakenne on $J(v) = v^\perp$.*

Todistus. Olkoon $\bar{g}$ euklidinen metriikka tasossa $\mathbb{R}^2$ ja peitetään monisto lauseen 2.7 antamilla koordinaatti ympäristöillä. Olkoon ϕ_α ja ϕ_β tällöin koordinaattikuvauksia monistolla M . Voimme kirjoittaa isotermiset koordinaatit euklidisen metriikan avulla muodossa $(\phi_\alpha^{-1})^*g = e^{2\lambda_\alpha}\bar{g}$. Nyt kuvaus $\Phi = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ on sileä ja sille pätee

$$\Phi^*\bar{g} = (\phi_\alpha^{-1})^*\phi_\beta^*\bar{g} = e^{2(\lambda_\alpha - \Phi^*\lambda_\beta)}\bar{g}.$$

Tämä nyt tarkoittaa, että Φ on konformikuvaus. Lisäksi isotermisten koordinaattien suunnistuksesta seuraa, että Φ säilyttää suunnistuksen. Kompleksianalyysistä muistetaan nyt, että tällöin Φ on analyyttinen. Tämä antaa nyt kompleksisen rakenteen. Lisäksi selvästi $J(v) = v^\perp$ on isotermisten koordinaattien antama melkein kompleksinen rakenne. $\square$

Nyt tästä eteenpäin, ei käytännössä ole merkitystä, tarkoitammeko suunnistuvalla Riemannin pinnalla yksiulotteista kompleksista monistoa vai vain kaksiulotteista sileää monistoa, sillä kompleksinen rakenne on meillä aina käytettävissä.

2.2 Vektorikentät X , $X_\perp$ ja V Riemannin pinnoilla

Oletamme tässä luvussa, että olemme kompaktilla, yhtenäisellä suunnistuvalla Riemannin pinnalla, ellei toisin mainita ja olkoon $(x, v) \in SM$. Muistetaan, että $v^\perp$ on nopeuden v kierto 90 astetta vastapäivään ja määritellään, että $v_\perp = -v^\perp$ on vastaavasti myötäpäivään. Määrittelemme nyt pinnalle kolme erityistä vektorikenttää. Aloitamme kentästä, joka voidaan määritellä useampaankin ulottuvuuteen.

Määritelmä 2.9 (Geodeettinen virtaus ja geodeettinen vektorikenttä X). Olkoon (M, g) kompakti, suunnistuva, yhtenäinen ja reunallinen Riemannin monisto. Geodeettinen virtaus on diffeomorfismi $\varphi_t: SN \rightarrow SN$,

$$\varphi_t(x, v) = (\gamma_{x,v}(t), \dot{\gamma}_{x,v}(t)).$$

Geodeettinen vektorikenttä on differentiaali operaattori $X: C^\infty(SM) \rightarrow C^\infty(SM)$, jolle kaikille $u \in C^\infty(SM)$ määritellään

$$Xu(x, v) = \left. \frac{d}{dt}(u(\varphi_t(x, v))) \right|_{t=0}.$$

Huomautus 2.10. Määritelmässä 2.9 on implisiittisesti ajateltu, että monisto M on upotettu sen suljettuun laajennukseen (N, g) , jotta geodeesit olisivat määritelty kaikilla ajoille $t \in \mathbb{R}$ ja niitä on voitu jatkaa myös moniston M ulkopuolelle. Ulkopuoli meitä ei kuitenkaan juuri kiinnosta, joten määritelmässä on vain SM eikä SN . Muistetaan, että kyse on vain teknisestä helpotuksesta.

Määrittelemme sitten kaksi muuta vektorikenttää, joiden osalta suunnistuvuus on olennainen.

Määritelmä 2.11 (Vektorikentät $X_\perp$ ja V). Horisontaalinen vektorikenttä on differentiaalioperaattori $X_\perp: C^\infty(SM) \rightarrow C^\infty(SM)$, jolle kaikille $u \in C^\infty(SM)$ määritellään

$$X_\perp u(x, v) = \left. \frac{d}{dt}(u(\psi_t(x, v))) \right|_{t=0},$$

missä $\psi_t(x, v) = (\gamma_{x,v_\perp}(t), W(t))$ ja W on nopeuden v yhdensuuntaissiirto käyrää $\gamma_{x,v_\perp}$ pitkin. Vertikaalinen vektorikenttä puolestaan on differentiaalioperaattori $V: C^\infty(SM) \rightarrow C^\infty(SM)$, jolle kaikille $u \in C^\infty(SM)$ määritellään

$$Vu(x, v) = \left. \frac{d}{dt}(u(\rho_t(x, v))) \right|_{t=0},$$

missä $\rho_t(x, v) = (\gamma_{x,v_\perp}(t), e^{it}v)$ ja $e^{it}v = \cos(t)v + \sin(t)v^\perp$ on nopeuden v kierto kulman t verran.

Geodeettinen vektorikenttä X ja horisontaalinen vektorikenttä $X_\perp$ ovat enemmän (x_1, x_2) -henkisiä vektorikenttiä ja täten voisi ajatella pinnan suuntaisiksi vektorikentiksi, joista ensimmäinen on geodeesin suuntaan ja toinen kohtisuoraan. Vertikaalinen vektorikenttä on puolestaan kulmahenkkinen ja voisi ajatella olevan pintaa vasten kohtisuorassa. Myöhemmin määrittelemekin pallokimpulle metriikan, jolla nämä vektorikentät muodostavat ortogonaalisen kehyksen pallokimpulle.

Tulemme laskemaan paljon lauseen 2.7 antamissa isotermisissä koordinaateissa. Seuraava lemma antaa edellisille vektorikentille esityksen lokaaleissa isotermisissä koordinaateissa.

Lemma 2.12. *Olkoon (x^1, x^2, θ) lokaalit koordinaatit joukossa SM , missä (x^1, x^2) ovat isotermiset koordinaatit joukossa M ja θ on vektorien v ja $\partial/\partial x_1$ välinen kulma eli*

$$v = e^{-\lambda}(\cos \theta \frac{\partial}{\partial x^1} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial x^2}).$$

Näissä koordinaateissa vektorikentät ovat

$$\begin{aligned} X &= e^{-\lambda}(\cos \theta \frac{\partial}{\partial x^1} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial x^2} + (-\sin \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^2}) \frac{\partial}{\partial \theta}), \\ X_\perp &= -e^{-\lambda}(-\sin \theta \frac{\partial}{\partial x^1} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial x^2} - (\cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \sin \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^2}) \frac{\partial}{\partial \theta}), \\ V &= \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Todistus. Lasketaan ensin vektorikentän X esitys lokaaleissa koordinaateissa (x^1, x^2, θ) :

$$Xu(x^1, x^2, \theta) = \frac{d}{dt}(u(x^1, x^2, \theta)) \Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial u}{\partial \theta} \dot{\theta} \Big|_{t=0}.$$

Nyt pätee $\dot{x}^1 = v^1 = e^{-\lambda} \cos \theta$ ja $\dot{x}^2 = v^2 = e^{-\lambda} \sin \theta$, joten riittää osoittaa, että $\dot{\theta} = e^{-\lambda}(-\partial_1 \lambda \sin \theta + \partial_2 \lambda \cos \theta)$, missä siis $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ on lyhennysmerkintä. Nyt geodeettisen yhtälön nojalla pätee

$$(D_t v)^i = \dot{v}^i + \Gamma_{jk}^i v^j v^k = 0.$$

Sijoitetaan $g_{ij} = e^{2\lambda} \delta_{ij}$ Christoffelin symbolin lausekkeeseen, jolloin saadaan

$$\Gamma_{jk}^i = \partial_j \lambda \delta_{ik} + \partial_k \lambda \delta_{ij} - \partial_i \lambda \delta_{jk}.$$

Tästä voidaan nyt määrittää eri Christoffelin symbolit. Esimerkiksi $\Gamma_{11}^1 =$

$\partial_1 \lambda$. Lasketaan sitten

$$\begin{aligned}\dot{v}^1 &= -e^{-2\lambda} \cos \theta (\partial_1 \lambda \cos \theta + \partial_2 \lambda \sin \theta) - e^{-\lambda} \dot{\theta} \sin \theta, \\ \Gamma_{jk}^1 v^j v^k &= e^{-2\lambda} (\partial_1 \lambda \cos^2 \theta + 2\partial_2 \lambda \sin \theta \cos \theta - \partial_1 \lambda \sin^2 \theta), \\ \dot{v}^2 &= -e^{-2\lambda} \sin \theta (\partial_1 \lambda \cos \theta + \partial_2 \lambda \sin \theta) + e^{-\lambda} \dot{\theta} \cos \theta, \\ \Gamma_{jk}^2 v^j v^k &= e^{-2\lambda} (-\partial_2 \lambda \cos^2 \theta + 2\partial_1 \lambda \sin \theta \cos \theta + \partial_2 \lambda \sin^2 \theta).\end{aligned}$$

Sijoittamalla nämä geodeettiseen yhtälöön saadaan kumomalla termejä ja kertomalla tekijällä $e^{2\lambda}$

$$\begin{cases} -e^\lambda \dot{\theta} \sin \theta + \partial_2 \lambda \sin \theta \cos \theta - \partial_1 \lambda \sin^2 \theta = 0 \\ e^\lambda \dot{\theta} \cos \theta + \partial_1 \lambda \sin \theta \cos \theta - \partial_2 \lambda \cos^2 \theta = 0. \end{cases}$$

Väite $\dot{\theta} = -\partial_1 \lambda \sin \theta + \partial_2 \lambda \cos \theta$ seuraa tästä.

Vektorikentän $X_\perp$ lasku on samankaltainen, mutta korvataan vektori v vektorilla

$$v_\perp = e^{-\lambda} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial x^1} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial x^2}).$$

Vektorikentän V esityksessä vastaavasti korvataan v vektorilla

$$e^{it} v = e^{-\lambda} \cos t (\cos \theta \frac{\partial}{\partial x^1} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial x^2}) + e^{-\lambda} \sin t (-\sin \theta \frac{\partial}{\partial x^1} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial x^2}),$$

jolloin ∂_1 ja ∂_2 komponentit häviävät laskussa ja jäljelle jää ∂_θ . □

Tarvitsemme myös näille vektorikentille kommutattorirelaatiot, jotka voi nyt edellisellä lemmalla laskea helposti.

Lemma 2.13. *Määritellyt vektorikentät toteuttavat seuraavat kommutattorirelaatiot.*

$$\begin{aligned}[X, V] &= X_\perp, \\ [X_\perp, V] &= -X, \\ [X, V_\perp] &= -KV,\end{aligned}$$

missä K on Gaussin kaarevuus.

Todistus. Käytetään lemmän 2.12 esityksiä. Tällöin testifunktiolle $f \in C^\infty(SM)$

pätee

$$\begin{aligned}
[X, V]f &= XVf - VXf \\
&= e^{-\lambda}(\cos \theta \frac{\partial}{\partial x^1} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial x^2} + (-\sin \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^2}) \frac{\partial}{\partial \theta}) \frac{\partial}{\partial \theta} f \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial \theta} e^{-\lambda}(\cos \theta \frac{\partial}{\partial x^1} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial x^2} + (-\sin \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^2}) \frac{\partial}{\partial \theta}) f \\
&= e^{-\lambda}(\cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial \theta} + (-\sin \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^2}) \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}) \\
&\quad - e^{-\lambda}(\cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial x^1} + \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial x^2} + (-\sin \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^2}) \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}) \\
&\quad - e^{-\lambda}(-\sin \theta \frac{\partial f}{\partial x^1} + \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x^2} - (\cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \sin \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^2}) \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}) \\
&= -e^{-\lambda}(-\sin \theta \frac{\partial}{\partial x^1} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial x^2} - (\cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \sin \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^2}) \frac{\partial}{\partial \theta}) f \\
&= X_{\perp} f.
\end{aligned}$$

Vastaavanlaisella laskulla näytetään, että

$$\begin{aligned}
[X_{\perp}, V] &= -X, \\
[X, V_{\perp}] &= e^{-2\lambda}(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial^2 x^1} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial^2 x^2})V.
\end{aligned}$$

Käyttämällä Gaussin merkittävää lausetta ([4] lause 3.98) voidaan osoittaa, että Gaussin kaarevuus on

$$K = \frac{1}{g_{11}}(\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x^2} + \Gamma_{22}^i \Gamma_{1i}^1 - \Gamma_{12}^i \Gamma_{2i}^1) = -e^{-2\lambda}(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial^2 x^1} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial^2 x^2}),$$

joten myös viimeinen relaatio pätee. $\square$

Huomautus 2.14. Mainitsimme aiemmin, että Gaussin merkittävä lause sanoo siis todella, että Gaussin kaarevuus riippuu metriikasta g ja on erityisesti pinnan sisäinen ominaisuus. Nyt toisaalta isotermissä koordinaateissa g määräytyy sileän funktion λ avulla, kuten myös Gaussin kaarevuus K . Funktio λ siis sisältää pinnan geometrisen informaation ja on siis syvällisempi, kuin ensisilmäyksellä olettaa. Mainittakoon, myös että edellisessä Gaussin kaarevuus voidaan kirjoittaa myös muodossa, $K = -\Delta_g \lambda$, missä Δ_g on metriikkaan liittyvä Laplace–Beltrami-operaattori.

2.3 Integrointi pallokimpulla

Riemannin pinnalla (M, g) on tilavuusmuoto, joka lokaaleissa koordinaateissa on $dV^2 = |g(x)|^{1/2} dx^1 \wedge dx^2$. Myöskin joukkoon $S_x M = \{v \in T_x M :$

$|v|_g = 1\}$ saadaan tilavuusmuoto dS_x . Emme käsittele tilavuusmuotoja tämän tarkemmin, mutta niihin voi tutustua esimerkiksi lähteistä [10] ja [11]. Idea on, että nämä antavat meille integraalin käsitteen ja ovat mittoja. Nyt pallokimpulla SM funktion f integraali on

$$\int_M \int_{S_x M} f(x, v) d_x S(v) dV^2(x),$$

olettaen, että se on olemassa. Tämä integraali antaa nyt luonnollisen tilavuusmuodon (tai mitan, mikäli lukija niin haluaa,) joukkoon SM , jota merkitään $d\Sigma^3 = dV^2 \wedge dS_x$. Itse asiassa kyseinen tilavuusmitta tulee niin kutsutusta Sasaki-metriikasta pallokimpulla ja tämä metriikka on myös luonteva aiempien vektorikenttien kannalta.

Määritelmä 2.15 (Sasaki-metriikka). Olkoon (M, g) kompakti, suunnistuva Riemannin pinta, jolla on sileä reuna. Yksikäsitteinen metriikka G pallokimpulla SM , jolle vektroikentät X , $X_\perp$ ja V muodostavat ortogonaalisen kehyksen on nimeltään Sasaki-metriikka.

Huomautus 2.16. Sasaki-metriikka voitaisiin määritellä yleisemmin tangenttikimpulla vaatien sen olevan metriikka, jolla on tietyt luonnolliset ominaisuudet (katso esim. [6] määritelmä 10.3 tai [20]). Tämä johtaa tietysti samaan lopputulokseen, mutta tarkastelun suoraviivaistamiseksi vaadimme sen metriikaksi, joka tekee meidän vektorikentistä X , $X_\perp$ ja V ortogonaaliset.

Sasaki-metriikka on myös tilavuusmuodon kannalta luonnollinen, minkä antaa seuraava lemma.

Lemma 2.17. *Sasaki-metriikan antama tilavuusmuoto pallokimpulle SM on $d\Sigma^3$.*

Todistus. Olkoon $d_G V$ Sasaki-metriikan indusoima tilavuusmuoto. Nyt pätee $d_G V(X, -X_\perp, V) = 1$ ja toisaalta isotermissä koordinaateissa

$$d\Sigma^3 = e^{2\lambda} dx^1 \wedge dx^2 \wedge d\theta.$$

Tällöin lemmän 2.12 avulla lasketaan

$$\begin{aligned} & d\Sigma^3(X, -X_\perp, V) \\ &= e^{2\lambda} \det \begin{bmatrix} e^{-\lambda} \cos \theta & -e^{-\lambda} \sin \theta & 0 \\ e^{-\lambda} \sin \theta & e^{-\lambda} \cos \theta & 0 \\ e^{-\lambda}(-\sin \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^2}) & -e^{-\lambda}(\cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \sin \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^2}) & 1 \end{bmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Väite seuraa nyt tästä. □

Kuten aiemmin myös moniston (M, g) reunalla ∂M on tilavuusmuoto dV^1 , jolloin voidaan integroida funktiota f pallokimpun reunalla ∂SM seuraavasti:

$$\int_{\partial M} \int_{S_x M} f(x, v) d_x S(v) dV^1(x),$$

olettaen, että integraali on olemassa. Vastaavasti saadaan $d\Sigma^2$ ja erityisesti Sasaki-metriikan indusoima metriikka pallokimpun reunalle antaa tämän.

Koska päädymme tekemään Fourier-analyysiä, määrittelemme nyt sopivat L^2 -avaruudet tarkoitukseemme.

Määritelmä 2.18 (Sisätulo pallokimpulla). Sisätulot joukoissa SM ja ∂SM ovat

$$\begin{aligned}\langle u, w \rangle_{SM} &= \int_{SM} u \bar{w} d\Sigma^3, \\ \langle u, w \rangle_{\partial SM} &= \int_{\partial SM} u \bar{w} d\Sigma^2.\end{aligned}$$

Vastaavat L^2 -avaruudet ovat puolestaan $L^2(SM)$ ja $L^2(\partial SM)$.

Teknisenä työkaluna näille saadaan myös osittaisintegroitikaavat.

Propositio 2.19 (Osittaisintegrointi). *Olkoon $u, w \in C^1(SM)$. Tällöin pätee seuraavat osittaisintegroitikaavat*

$$\begin{aligned}\langle Xu, w \rangle_{SM} &= -\langle u, Xw \rangle_{SM} - \langle \langle v, \nu \rangle u, w \rangle_{\partial SM}, \\ \langle X_\perp u, w \rangle_{SM} &= -\langle u, X_\perp w \rangle_{SM} - \langle \langle v_\perp, \nu \rangle u, w \rangle_{\partial SM}, \\ \langle Vu, w \rangle_{SM} &= -\langle u, Vw \rangle_{SM}.\end{aligned}$$

Todistus. Todistamme väitteen lemmän 2.12 antamissa koordinaateissa. Teemme kuitenkin laskun ikään kuin nämä olisivat globaalit koordinaatit, sillä lokaalien laskujen tulokset voidaan yhdistää käyttämällä ykkösen ositusta. Nyt voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}\langle Xu, w \rangle_{SM} &= \int_M \int_0^{2\pi} e^{-\lambda} \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial x^1} + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + \left(-\sin \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^2} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \bar{w} d\theta dx.\end{aligned}$$

Merkitään $\nu = (\nu^1, \nu^2)$. Nyt tavallisella osittaisintegroinnilla muuttujan x

suhteen voidaan laskea

$$\begin{aligned}\int_M \int_0^{2\pi} e^{-\lambda} \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x^1} \bar{w} d\theta dx &= - \int_{\partial M} \int_0^{2\pi} e^{-\lambda} \cos \theta \nu^1 u \bar{w} d\theta dx \\ &\quad - \int_M \int_0^{2\pi} u \frac{\partial}{\partial x^1} (e^{-\lambda} \cos \theta \bar{w}) d\theta dx, \\ \int_M \int_0^{2\pi} e^{-\lambda} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial x^2} \bar{w} d\theta dx &= - \int_{\partial M} \int_0^{2\pi} e^{-\lambda} \sin \theta \nu^2 u \bar{w} d\theta dx \\ &\quad - \int_M \int_0^{2\pi} u \frac{\partial}{\partial x^2} (e^{-\lambda} \sin \theta \bar{w}) d\theta dx\end{aligned}$$

ja muuttujan θ suhteen käyttäen periodisuutta saadaan

$$\begin{aligned}&\int_M \int_0^{2\pi} e^{-\lambda} \left(-\sin \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^2} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} \bar{w} d\theta dx \\ &= - \int_M \int_0^{2\pi} u \frac{\partial}{\partial \theta} \left(e^{-\lambda} \left(-\sin \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x^2} \right) \bar{w} \right) d\theta dx.\end{aligned}$$

Yhdistämällä reunatermit saadaan $-\langle \langle v, \nu \rangle u, w \rangle_{\partial SM}$ ja lopuista termeistä tulee $-\langle u, Xw \rangle_{SM}$. Toinen kohta menee vastaavasti. Viimeisessä tarvitsee vain osittaisintegroida muuttujan θ suhteen, jolloin saadaan periodisuudella

$$\langle Vu, w \rangle_{SM} = \int_M \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \bar{w} d\theta dx = - \int_M \int_0^{2\pi} u \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} d\theta dx = -\langle u, Vw \rangle_{SM}.$$

Väite on näin ollen todistettu. $\square$

Huomautus 2.20 (Santalón kaava, [14] propositio 3.5.14 tai [19]). Esitellään vielä Santalón kaava, joka on tärkeä muuttujanvaihtokaava, jota emme tarvitse, mutta se ansaitsee maininnan, sillä se on olennainen luvun 4 kannalta. Olkoon (M, g) kompakti, ansaton Riemannin pinta, jolla on aidosti konvek-sireuna. Tällöin jos $f \in C(SM)$ (itse asiassa voi olettaa, että $f \in L^1(SM)$), niin pätee Santalón kaava

$$\int_{SM} f d\Sigma^3 = \int_{\partial_+ SM} \int_0^{\tau(x,v)} f(\varphi_t(x, v)) \langle \nu(x), v \rangle_g dt d\Sigma^2.$$

Tämän voi nähdä myös Fubinin lauseen kaltaisena tuloksena, missä jokaisella $(x, v) \in \partial_+ SM$ integroidaan ensin moniston läpi poistumisaikaan asti ja sitten joukon $\partial_+ SM$ yli.

2.4 Vertikaalinen Fourier-analyysi

Tässä luvussa esittelemme Fourier-sarjan Riemannin pinnalla, määrittelemme Guillemín–Kazhdan-operaattorit ja näytämme jotain niiden perusominaisuuksia. Lopuksi todistamme Guillemín–Kazhdan-identiteetin. Tämän luvun tulokset ovat olennaisessa osassa tutkielman päälauseen todistuksessa.

Jos oletamme, että $M = \bar{D}(0, 1)$, missä siis $\bar{D}(0, 1)$ on tason suljettu yksikkökierros, niin pallokimppu voidaan identifoida joukoksi $M \times S^1$, missä S^1 on yksikköympyrä. Tällöin jokaiselle kuvaukselle $u \in C^\infty(SM)$ saadaan Fourier-esitys

$$u(x, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(x, \theta), \quad u_k(x, \theta) = \tilde{u}_k(x) e^{ik\theta}, \quad \tilde{u}_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, \theta) e^{-ik\theta} d\theta.$$

Huomataan, että $-i\partial_\theta u_k = ku_k$. Palataan nyt tilanteeseen, jossa (M, g) on kompakti suunnistuva Riemannin pinta. Edellinen havainto ja isotermiset koordinaatit motivoivat nyt seuraavan määritelmän.

Määritelmä 2.21 (Fourier-moodit). Kaikille $k \in \mathbb{Z}$ määritellään

$$H_k = \{u \in L^2(SM) : -iVu = ku\}, \\ \Omega_k = \{u \in C^\infty(SM) : -iVu = ku\}.$$

Määritellään nyt uudet operaattorit, joiden luontevuus näkyy heti, kun todistamme niiden perusominaisuudet.

Määritelmä 2.22 (Guillemin–Kazhdan-operaattorit [2]). Määritellään operaattorit

$$\eta_+ = \frac{1}{2}(X + iX_\perp) \quad \eta_- = \frac{1}{2}(X - iX_\perp).$$

Todistetaan välittömästi näille joitain perusominaisuuksia.

Lemma 2.23. *Määritelmän 2.22 operaattoreille pätee*

- $X = \eta_+ + \eta_-$,
- $[\eta_\pm, iV] = \pm\eta_\pm$,
- $[\eta_+, \eta_-] = \frac{i}{2}KV$,
- $\eta_\pm : \Omega_k \rightarrow \Omega_{k\pm 1}, \quad V : \Omega_k \rightarrow \Omega_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$

Lisäksi jos $u, v \in C^1(SM)$, niin pätee

$$\langle \eta_\pm u, w \rangle_{SM} = -\langle u, \eta_\mp w \rangle_{SM} - \langle \mu_{\pm 1} u, w \rangle_{SM},$$

missä $\mu_{\pm 1} = \frac{1}{2}(\langle v, \nu \rangle \pm i\langle v_\perp, \nu \rangle)$ ovat funktion $\mu = \langle v, \nu \rangle$ Fourier-moodit, joille $\mu = \mu_{+1} + \mu_{-1}$.

Todistus. Ensimmäinen väite on selvä ja kommutaattorirelaatiot seuraavat kommutaattorin perusominaisuuksista ja lemmasta 2.13 suoraviivaisella laskulla. Olkoon sitten $u \in \Omega_k$. Tällöin pätee

$$-iV(\eta_{\pm}u) = \eta_{\pm}(-iVu) + [\eta_{\pm}, iV]u = \eta_{\pm}(ku) \pm \eta_{\pm}u = (k \pm 1)\eta_{\pm}u$$

ja

$$-iV(Vu) = ik^2u = kVu,$$

mistä nähdään kuvausominaisuudet. Proposition 2.19 avulla saadaan puolestaan osittaisintegroitikaava osoitettua suoraviivaisella laskulla. Kun huomataan vielä, että $V\mu = -\langle v_{\perp}, \nu \rangle$, niin Fourier-moodeja koskeva väite seuraa. $\square$

Nyt voimme osoittaa, että Fourier-sarja saadaan myös pallokimpuille.

Lemma 2.24 (Fourier-sarja). *Funktiolle $u \in L^2(SM)$ on yksikäsitteinen ortogonaalinen esitys*

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k, \quad u_k \in H_k,$$

missä sarja suppenee L^2 -mielessä. Jos $u \in C^{\infty}(SM)$, niin edellinen esitys on

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k, \quad u_k \in \Omega_k,$$

missä sarja suppenee C^{∞} -mielessä. Fourier-moodit ovat isotermisissä koordinaateissa

$$u_k(x, \theta) = \tilde{u}(x)e^{ik\theta}, \quad \tilde{u}_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} u(x, \theta) d\theta.$$

Todistus. Ensimmäistä ja viimeistä väitettä varten riittää todeta, että melkein kaikilla $x \in M$ kuvaus $\theta \mapsto u(x, \theta)$ on joukossa $L^2(S^1)$, jolloin väite seuraa tavallisesta Fourier-analyysistä (katso esim. [18]). $C^{\infty}(M)$ -suppenemista varten huomataan aluksi, että edellisen lemmän kuvausominaisuuden ja osittaisintegroitikaavan nojalla, kun $w \in \Omega_k$, pätee

$$\langle \eta_+u - \eta_+u_{k-1}, w \rangle_{SM} = -\langle u - u_{k-1}, \mu_{-1}w \rangle_{\partial SM} = 0,$$

sillä $\mu_{-1}w$ on $(k-1)$ -asteinen Fourier-moodi. Näin ollen $\eta_+u - \eta_+u_{k-1} \perp \Omega_k$. Sileiden funktioiden tiheyden nojalla pätee myös $\eta_+u - \eta_+u_{k-1} \perp H_k$. Näin ollen tavallisen Fourier-analyysin nojalla $(\eta_+u)_k = \eta_+u_{k-1}$. Vastaavanlaisella argumentilla saadaan myös, että $(\eta_-u)_k = \eta_-u_{k+1}$ ja $(Vu)_k = Vu_k$. Koska $\{X, X_{\perp}, V\}$ on kehys, niin myös $\{\eta_+, \eta_-, V\}$ on kehys. Näin ollen, jos $W \in \{\eta_+, \eta_-, V\}$, niin kuvauksen Wu Fourier-sarja suppenee L^2 -mielessä,

joten alkuperäinen sarja suppenee. Koska edellinen argumentti voidaan toistaa mielivaltaisen monta kertaa, kun operoidaan operaattoreilla η_+ , η_- ja V , niin tästä seuraa, että suppeneminen on todella C^∞ -suppeneminen. $\square$

Huomautus 2.25 (Tikapuuoperaattorit). Fysiikkaan orientoituneet voivat havaita, että Guillemin–Kazhdan-operaattoreissa on yhteyttä kvanttimekaanisen harmonisen värähtelijän tikapuuoperaattoreihin $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p})$ ja $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p})$, missä $\hat{x}$ ja $\hat{p}$ ovat paikka- ja liikemääräoperaattorit, m massa, ω värähtelijän kulmataajuus ja $\hbar$ redusoitu Planckin vakio. Värähtelijän Hamiltonin operaattorin $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$, jonka ominaistilojen $|n\rangle$ ominaisenergiat ovat $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, missä $n = 0, 1, 2, \dots$. Nyt pätee $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ ja $\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$ sekä kanoniset kommutaattorirelaatiot

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, [\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega\hat{a}^\dagger, [\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar\omega\hat{a}.$$

Lisäksi pätee lemmän 2.23 kaltainen kuvausominaisuus, jotka ominaistiloihin operoitaessa nostavat tai lasketvat energiatilaa yhdellä askeleella eli $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ ja $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$. Nyt siis X on analoginen paikkaoperaattorin $\hat{x}$ ja $X_\perp$ liikemääräoperaattorin $\hat{p}$ kanssa, kun taas $-iV$ on kuten Hamiltonin operaattori $\hat{H}$. Lisäksi Fourier-sarja vastaa tilannetta, jonka mukaan mikä tahansa tila on Hamiltonin operaattorin ominaistilojen lineaarikombinaatio.

Todistetaan luvun lopuksi Guillemin–Kazhdan-identiteettinä tunnettu energiorelaatio.

Lemma 2.26 (Guillemin–Kazhdan-identiteetti [2]). *Kaikille $u \in C^\infty(SM)$ pätee*

$$\|\eta_- u\|_{SM}^2 = \|\eta_+ u\|_{SM}^2 - \frac{i}{2}\langle KV u, u \rangle_{SM} - \langle \eta_- u, \mu_{-1} u \rangle_{\partial SM} + \langle \eta_+ u, \mu_{+1} u \rangle_{\partial SM}.$$

Erityisesti jos $u|_{\partial SM} = 0$, niin

$$\|\eta_- u\|_{SM}^2 = \|\eta_+ u\|_{SM}^2 - \frac{i}{2}\langle KV u, u \rangle_{SM}.$$

Todistus. Lemman 2.23 osittaisintegroitikaavalla lasketaan

$$\|\eta_- u\|_{SM}^2 - \|\eta_+ u\|_{SM}^2 = \langle [\eta_-, \eta_+] u, u \rangle_{SM} - \langle \eta_- u, \mu_{-1} u \rangle_{\partial SM} + \langle \eta_+ u, \mu_{+1} u \rangle_{\partial SM}.$$

Väite saadaan nyt käyttämällä saman lemmän kommutaattorirelaatiota $[\eta_+, \eta_-] = \frac{i}{2}KV$. $\square$

Seuraus 2.27. *Olkoon Riemannin pinnan Gaussin kaarevuus $K \leq -\kappa_0$, missä $\kappa_0 \geq 0$ on vakio. Tällöin kaikille $k \geq 0$ pätee*

$$\|\eta_- u_k\|_{SM}^2 + \frac{\kappa_0}{2} k \|u_k\|_{SM}^2 \leq \|\eta_+ u_k\|_{SM}^2, \quad u_k \in \Omega_k, u_k|_{\partial SM} = 0.$$

Vastaavasti kaikille $k \leq 0$ pätee

$$\|\eta_+ u_k\|_{SM}^2 + \frac{\kappa_0}{2} k \|u_k\|_{SM}^2 \leq \|\eta_- u_k\|_{SM}^2, \quad u_k \in \Omega_k, u_k|_{\partial SM} = 0.$$

Todistus. Seuraa edellisestä lemmasta arviolla. □

3 Tensoritomografiaa negatiivisessa kaarevuudessa

Meillä on nyt valmiina kaikki tarpeellinen, joten voimme ryhtyä tarkastelemaan tensoritomografiaa, pohjautuen lähteen [14] lukuihin 4, 6 ja 7. Olkoon siis $C^\infty(S^m(T^*M))$ kaikkien sileiden symmetristen kompleksiarvoisten kovarianttien tensorikenttien joukko, joiden aste on m . Sanomme myös, että funktion $u \in L^2(SM)$ aste on m , jos lemmän 2.24 antaman Fourier-sarjan esityksessä $u_k = 0$, kun $|k| \geq m + 1$.

3.1 Geodeettinen röntgenmuunnos

Määritellään ensin röntgenmuunnos funktioille.

Määritelmä 3.1. Olkoon (M, g) kompakti ansaton Riemannin monisto, jolla on aidosti konvekksi reuna. Geodeettinen röntgenmuunnos on kuvaus

$$I: C^\infty(SM) \rightarrow C^\infty(\partial_+ SM),$$

missä

$$If(x, v) = \int_0^{\tau(x, v)} f(\varphi_t(x, v)) dt.$$

Laajentaaksemme tämän tensorikenttiin määritellään luonnollinen inklusio

$$\ell_m: C^\infty(S^m(T^*M)) \rightarrow C^\infty(SM),$$

$$\ell_m(h)(x, v) = h_x(\underbrace{v, \dots, v}_{m \text{ kpl}}).$$

Tässä siis vain tensorikentän jokaiseen argumenttiin ”kopioidaan” nopeus v , jolloin saadaan skalaarifunktio pallokimpulla. Tälle inklusiolle pätee seuraava hyödyllinen kuvausominaisuus.

Propositio 3.2. *Kuvaukset*

$$\ell_m: C^\infty(S^m(T^*M)) \rightarrow \bigoplus_{j=-N}^N \Omega_{2j},$$

kun $m = 2N$ ja

$$\ell_m: C^\infty(S^m(T^*M)) \rightarrow \bigoplus_{j=-N-1}^N \Omega_{2j+1},$$

kun $m = 2N + 1$, ovat lineaarisia isomorfismeja.

Ennen varsinaista todistusta todistetaan aluksi seuraava lemma.

Lemma 3.3. *Olkoon $k \geq 0$ ja $f \in \Omega_k \oplus \Omega_{-k}$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen $F_k \in C^\infty(S^k(T^*M))$, jolle pätee $\ell_k F_k = f$.*

Todistus. Kuvaus ℓ_k määriteltiin symmetrisille tensorikentille ja tästä seuraa helposti, että tällöin kuvaus ℓ_k on injektio, sillä symmetrinen tensorikenttä h määräytyy sen arvoista $h_x(v, \dots, v)$. Riittää siis osoittaa, että väitteen F_k on olemassa. Tapaus $k = 0$ on triviaali, joten oletetaan, että $k \geq 1$. Olkoon $f = f_k + f_{-k}$. Lemman 2.7 koordinaateissa $f(x, \theta) = \tilde{f}_k(x)e^{ik\theta} + \tilde{f}_{-k}(x)e^{-ik\theta}$. Määritellään nyt lokaalisti $F_k = e^{k\lambda(x)}(\tilde{f}_k(x)(dz)^k + \tilde{f}_{-k}(x)(d\bar{z})^k)$, missä $z = x_1 + ix_2$. Nyt pätee suoralla laskulla $\ell_k F_k(x, v) = f_k + f_{-k}$. Saadut lokaalit esitykset antavat symmetrisen k -tensorikentän F_k , jolle pätee $\ell_k F_k = f_k + f_{-k}$. $\square$

Määritellään vielä operaattori

$$\kappa: C^\infty(S^m(T^*M)) \rightarrow C^\infty(S^{m+2}(T^*M)),$$

$$\kappa(h)(x, v) = \sigma(h \otimes g),$$

missä σ on tensorin symmetrisoija

$$\sigma f(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\text{permutaatiot } S} f(v_{S(1)}, \dots, v_{S(k)})$$

ja g on metrinen tensori.

Proposition 3.2 todistus. Todistamme vain tapauksen, jossa $m = 2N$, sillä toinen on analoginen. Todetaan ensin, että tarkastelemalla funktiota $\ell_m h$ lemmän 2.7 antamissa koordinaateissa voidaan huomata, että kyseessä on trigonometrinen polynomi, jonka aste on korkeintaan m , joten kuvaus on hyvin määritelty eli arvojoukot ovat oikeat. Lisäksi ℓ_m on selvästi lineaarinen ja kuten aiemmin totesimme se on injektio. Jäjelle jää todistaa, että ℓ_m on surjektio.

Olkoon $f \in C^\infty(SM)$, jolle $f_k = 0$ kaikille $|k| \geq m + 1$. Nyt kaikille $1 \leq k \leq m$ lemma 3.3 antaa $F_k \in C^\infty(S^k(T^*M))$, jolle pätee $\ell_k F_k = f_k + f_{-k}$. Määritellään $F_0 = f_0$. Määritellään sitten symmetrinen m -tensorikenttä seuraavasti

$$F = F_m + \kappa F_{m-2} + \dots + \kappa^{m/2} F_0.$$

Huomaamalla, että mille tahansa symmetriselle k -tensorikentälle G_k pätee $\ell_{m+2}(\kappa G_k) = \ell_k G_k$, saadaan lopulta

$$\ell_m F = \sum_{k=-m}^m f_k = f.$$

Näin ollen ℓ_m on surjektio. $\square$

Nyt on suoraviivaista määritellä röntgenmuunnos tensorikentille.

Määritelmä 3.4. Geodeettinen röntgenmuunnos symmetrisille m -tensorikentille määritellään kuvauksena

$$I_m: C^\infty(S^m(T^*M)) \rightarrow C^\infty(\partial_+ SM), \quad I_m f = I(\ell_m f).$$

Auki kirjoitettuna siis

$$I_m f(x, v) = \int_0^{\tau(x,v)} f_{\gamma_{x,v}(t)}(\dot{\gamma}_{x,v}(t), \dots, \dot{\gamma}_{x,v}(t)) dt.$$

Lokaaleissa koordinaateissa tämä on

$$I_m f(x, v) = \int_0^{\tau(x,v)} f_{j_1, \dots, j_m}(\gamma_{x,v}(t)) \dot{\gamma}^{j_1}(t) \dots \dot{\gamma}^{j_m}(t) dt,$$

missä $f = f_{j_1, \dots, j_m}(x) dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_m}$.

Huomautus 3.5. Nyt itse asiassa määritelmän 3.1 röntgenmuunnos saadaan edellisestä erikoistapauksena

$$I_0: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(\partial_+ SM), \quad I_0 f = I(\ell_0 f).$$

Tässä siis

$$\begin{aligned} \ell_0: C^\infty(M) &\rightarrow C^\infty(SM) \\ \ell_0(f)(x, v) &= f(x). \end{aligned}$$

Edellisen huomautuksen avulla voidaan siis sopivalla tulkinnalla sisällyttää I tapaukseen I_m vastamaan kuvausta I_0 . Meidän ei siis tarvitse käsitellä tapausta I mitenkään erikseen, vaikka se onkin erityisasemassa.

Mainitaan vielä loppuun, että tärkeät erikositapaukset ovat I_0 , I_1 ja I_2 . Näistä I_0 liittyy reunan jäykkyysoongelmaan, kun konformaaliluokka on kiinnitetty, I_1 konnektioiden sirontajäykkyysoongelmaan ja I_2 myös reunan jäykkyysoongelmaan. Näihin voi tutustua lähteestä [14], mutta emme paneudu näihin sen syvemmin. Olennaista on, että muunnosta I_m tutkimalla voi tutkia muita tärkeitä inversio-ongelmia.

3.2 Solenoidinen injektiivisyys

Tässä alaluvussa muotoilemme lopulta tutkielman päätuloksen (lause 3.10). Tarvitsemme tähän enää solenoidisen injektiivisyyden määritelmän, mutta motivoimme aluksi, miksi tämä on luonteva määritelmä ja miksi päätuloksen väitettä on luonnollista kysyä. Määritellään ensin uusi derivaatan käsite symmetrisille tensorikentille.

Määritelmä 3.6. Kuvaus $d_s: C^\infty(S^m(T^*M)) \rightarrow C^\infty(S^{m+1}(T^*M))$, $d_s = \sigma \nabla$ on symmetrisen m -tensorikentän sisäderivaatta. Tässä muistetaan, että σ on tensorin symmetrisoija

$$\sigma f(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\text{permutaatiot } S} f(v_{S(1)}, \dots, v_{S(k)})$$

ja ∇ Levi-Civita-konnektio.

Seuraavaksi huomataan, että tapauksessa $m \geq 1$ kuvauksen I_m ydin ei ole triviaali.

Lemma 3.7. *Kaikille $p \in C^\infty(S^{m-1}(T^*M))$ pätee $X\ell_{m-1}p = \ell_m d_s p$.*

Todistus. Suoralla laskulla käyttäen määritelmiä saadaan

$$\begin{aligned} \ell_m(d_s p)(x, v) &= (d_s p)_x(v, \dots, v) \\ &= (\nabla p)_x(v, \dots, v) \\ &= \left. \frac{d}{dt} (p_\gamma(\dot{\gamma}(t), \dots, \dot{\gamma}(t))) \right|_{t=0} \\ &= X\ell_m p. \end{aligned} \quad \square$$

Lemma 3.8. *Olko $p \in C^\infty(S^{m-1}(T^*M))$ siten, että $p|_{\partial SM} = 0$. Tällöin $I_m(d_s p) = 0$.*

Todistus. Lemman 3.7 nojalla pätee $I_m(d_s p) = I(\ell_m d_s p) = I(X\ell_{m-1}p) = 0$. $\square$

Nyt luonnollinen kysymys on, että ovatko muotoa $d_s p$ olevat tensorit ainoat ytimen alkioita. Tämä motivoi seuraavan määritelmän.

Määritelmä 3.9 (Solenoidinen injektiivisyys). Röntgenmuunnos I_m on solenoidisesti injektiivinen, jos kaikilla $h \in C^\infty(S^m(T^*M))$, joille $I_m h = 0$, pätee, että h on potentiaalitensori eli $h = d_s p$, jollekin $p \in C^\infty(S^{m-1}(T^*M))$, jolle $p|_{\partial M} = 0$. Muunnoksen I_0 solenoidinen injektiivisyys tarkoittaa sen injektiivisyyttä, jolloin edellinen tulkitaan siis vain, että $C^\infty(S^{-1}(T^*M)) = \{0\}$.

Olemme nyt valmiita esittelemään tutkielman päätuloksen, jonka todistamme myöhemmin luvussa 3.4.

Lause 3.10. *Olko (M, g) yksinkertainen Riemannin pinta, jolla on negatiivinen kaarevuus. Tällöin I_m on solenoidisesti injektiivinen.*

Huomautus 3.11. Lause 3.10 siis sanoo, että lineaarikuvauksen I_m ydin koostuu siis potentiaalitensoreista eli tensoreista, jotka ovat muotoa $d_s h$, jollekin yhtä alemman kertaluvun tensorikentälle $h \in C^\infty(S^{m-1}(T^*M))$, sillä konventiolla, että ydin on triviaali tapauksessa $m = 0$.

Määritellään divergenssioperaattori $\delta_s : C^\infty(S^m(T^*M)) \rightarrow C^\infty(S^{m-1}(T^*M))$ kaavalla $\langle \delta_s f, h \rangle_{L^2} = \langle f, d_s h \rangle_{L^2}$, missä $f \in (S^m(T^*M))$ ja $h \in C^\infty(S^{m-1}(T^*M))$ häviävät moniston reunalla. Tällöin sanotaan, että f on solenoidinen, jos $\delta_s f = 0$. Tällöin voidaan yleistää Helmholtzin hajotelma tensorikentille eli siis $f \in C^\infty(S^m(T^*M))$ voidaan hajottaa solenoidiseen osaan ja potentiaaliosaan. Tällöin $f = f^s + d_s h$, missä $f^s \in C^\infty(S^m(T^*M))$ on solenoidinen ja $h \in C^\infty(S^{m-1}(T^*M))$ häviää reunalla ([14] lause 6.4.7). Nyt siis lause 3.10 sanoo siis, että tensorikentän solenoidinen osa voidaan määrittää, kun data $I_m f$ tunnetaan.

3.3 Kuljetusyhtälö

Solenoidisen injektivisyyden väite voidaan muuttaa niin kutsuttua kuljetusyhtälöä koskevaksi väitteeksi. Käsitlemmekin kuljetusyhtälöä tässä luvussa, minkä jälkeen voimme viimein todistaa tutkielman päätuloksen.

Määritelmä 3.12 (Integraalifunktio). Olkoon (M, g) kompakti ansaton Riemannin monisto. Tällöin kaikille $f \in C^\infty(SM)$ määritellään integraalifunktio kaavalla

$$u^f(x, v) = \int_0^{\tau(x, v)} f(\varphi_t(x, v)) dt.$$

Kuljetusyhtälö on nyt $Xu = -f$ joukossa SM jollain reuna-arvolla. Integraalifunktio toimii nyt kuljetusyhtälön ratkaisuna, kuten seuraava lemma näyttää.

Lemma 3.13. *Olkoon $f \in C^\infty(SM)$. Tällöin $u^f \in C(SM) \cap C^\infty(SM \setminus \partial_0 SM)$ ja u^f on yksikäsitteinen ratkaisu kuljetusyhtälön määrittämälle reuna-arvo-ongelmalle*

$$\begin{cases} Xu = -f \\ u|_{\partial_- SM} = 0. \end{cases}$$

Lisäksi $u^f|_{\partial_+ SM} = If$.

Todistus. Lemmasta 1.23 seuraa, että $u^f \in C(SM) \cap C^\infty(SM \setminus \partial_0 SM)$.

Suoralla laskulla saadaan puolestaan, että

$$\begin{aligned}
Xu^f(x, v) &= \frac{d}{ds} \int_0^{\tau(\varphi_s(x, v))} f(\varphi_t(\varphi_s(x, v))) dt \Big|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds} \int_0^{\tau(x, v)-s} f(\varphi_{t+s}(x, v)) dt \Big|_{s=0} \\
&= -f(\varphi_{\tau(x, v)}(x, v)) + \int_0^{\tau(x, v)} \frac{d}{dt} f(\varphi_t(x, v)) dt \\
&= -f(x, v).
\end{aligned}$$

Lisäksi selvästi $u^f|_{\partial_- SM} = 0$ ja $u^f|_{\partial_+ SM} = If$. Yksikäsitteisyyden todistusta varten olkoon $u_1, u_2 \in C(SM) \cap C^\infty(SM \setminus \partial_0 SM)$ kaksiratkaisua. Tällöin näiden erotus $v = u_1 - u_2$ toteuttaa reuna-arvo-ongelman

$$\begin{cases} Xv = 0 \\ v|_{\partial_- SM} = 0. \end{cases}$$

Ensimmäinen ehto sanoo, että kuvaus v on vakio geodeeseja pitkin, jolloin toisesta ehdosta seuraa, että $v = 0$. Ideana on, että voimme alkupaikalla ja -nopeudella (x, v) lähtevää geodeesia pitkin palata reunalta, missä v on nolla, palata kyseiseen alkupaikkaan ja nopeuteen. Nyt siis $u_1 = u_2$, joten ratkaisu on yksikäsitteinen. $\square$

Ongelma on vielä, että integraalifunktio u^f ei välttämättä ole sileä joukon $\partial_0 SM$ pisteissä. Esimerkiksi $u^f = \tau$, jos $f = 1$ ja tiedämme, että τ ei ole sileä joukossa $\partial_0 SM$. Kuitenkin jos $If = 0$, niin sileys saadaan myös joukossa $\partial_0 SM$.

Propositio 3.14 ([14] propositio 4.2.3). *Olkoon (M, g) kompakti ja ansaton Riemannin monisto, jolla on aidosti konvekksi reuna, ja olkoon $f \in C^\infty(SM)$. Tällöin jos $If = 0$, niin $u^f \in C^\infty(SM)$.*

Lause voidaan todistaa yleisemmällä tuloksella ([14] lause 5.3.6), jonka tekniset yksityiskohdat ovat lähteen [14] luvussa 5. Osoitetaan väite kuitenkin lisäoletuksella, että f on kompaktisti kannettu joukossa $\text{int} SM$.

Todistus erikoistapauksessa. Oletetaan, että proposition oletusten lisäksi siis, että f on kompaktisti kannettu joukossa $\text{int} SM$. Tällöin lemmän 3.13 nojalla riittää näyttää, että myös u^f on kompaktisti kannettu joukossa $\text{int}(SM)$ sillä sileys seuraa tällöin siitä, että u^f on nolla kantajan $\text{supp}(u^f) \subset \text{int}(SM)$ ulkopuolella. Lemman 1.23 nojalla τ on jatkuva joukossa SM ja koska $\tau = 0$ joukossa $\partial SM \setminus \partial_+ SM$, niin jos $(x, v) \in SM$ on lähellä reunaa, niin pätee $\gamma_{x, v}(t) \notin \text{supp}(f)$ välillä $[0, \tau(x, v)]$ tai $\gamma_{x, -v}(t) \notin \text{supp}(f)$ välillä $[0, \tau(x, -v)]$.

Ensimmäisessä tapauksessa siis geodeesi on jo päässyt niin lähelle reunaa, että se ei enää osu kuvauksen f kantajaan ja jälkimmäisessä se ei ole kulkenut tarpeeksi osuakseen siihen. Oletetaan, jälkimmäinen tapaus. Ensimmäinen on analoginen tämän kanssa. Nyt siis selvästi lähellä reunaa pätee $u^f(x, v) = If(x, v) = 0$, joten todellakin $\text{supp}(u^f) \subset \text{int}(SM)$. Nyt kuvauksen u^f kantajan kompaktius seuraa moniston kompaktiudesta. $\square$

Huomautus 3.15. Propositio pätee kyllä ilman lisäoletusta, mutta teknisyyden vuoksi emme todistaneet tulosta yleisesti. Mainitaan kuitenkin, että ongelma syntyy reunan tangentiaalisista suunnista, joiden kannalta poistumisaika on epäsiileä reunalla, joten todistus vaatii reunalla lisätarkastelua. Erikoistapauksen todistuksessa saimme hoidettua asian siten, että kuvaus u^f on lähellä reunaa on nollafunktio. Erikoistapaus on kuitenkin suhteellisen järkevä, koska mittaamme jonkin äärellisen objektion vaimenemisprofiilia, niin voitaisiin vain ajatella, että mittausalue riittää kattamaan koko objektin siten, että se ei koske alueen reunaa. Toisaalta mieleen voisi myös tulla moniston pieni laajentaminen ulospäin, mutta tämäkään ei ole kovin suoraviivaista, sillä jos f ei häviä reunalla, niin esimerkiksi nollajatkko ei ole siileä, kun taas siileästi jatkaminen ulospäin ei enään takaisi sitä, että If olisi nolla.

Voimme nyt muuttaa kysymyksen solenoidisesta injetkiivisyydestä kysymykseen kuljetusyhtälöstä.

Propositio 3.16. *Olko (M, g) kompakti ansaton Riemannin pinta, jolla on aidostikonveksi reuna. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.*

- (a) I_m on solenoidisesti injektiivinen.
- (b) Jos f on astetta m , f sisältää vain parillisen/parittoman asteisia termejä, kun m on parillinen/pariton, $u \in C^\infty(SM)$ toteuttaa kuljetusyhtälön $Xu = -f$ joukossa SM ja $u|_{\partial SM} = 0$, missä f on astetta m niin u on astetta $m - 1$,

missä tapauksessa $m = 0$ ehto b) tarkoittaa seuraavaa.

- (b') Jos $f \in C^\infty(M)$, $u \in C^\infty(SM)$ toteuttaa kuljetusyhtälön $Xu = -f$ joukossa SM ja $u|_{\partial SM} = 0$, niin u on identtisesti nolla.

Todistus. Oletaan ensin, että I_m on solenoidisest injektiivinen. Olkoon nyt f kuten ehdossa (b) tai (b'). Lemman 3.13 nojalla $u = u^f$ ja $If = u|_{\partial_+ SM} = 0$. Proposition 3.2 nojalla löytyy yksikäsitteinen $h \in C^\infty(S^m(T^*M))$ siten, että $f = \ell_m h$. Nyt $I_m h = I(\ell_m h) = If = 0$, jolloin solenoidisesta injektiivisyydestä seuraa, että $h = d_s p$ jollekin $p \in C^\infty(S^{m-1}(T^*M))$ siten, että $p|_{\partial SM} = 0$. Nyt lemmän 3.7 nojalla pätee

$$X(u + \ell_{m-1} p) = -f + \ell_m d_s p = -f + f = 0.$$

Koska lisäksi u ja $\ell_{m-1}p$ ovat nollia reunalla ∂SM , niin $u = -\ell_{m-1}p$ todistaen ensimmäisen implikaation.

Oletetaan sitten, että (b) (tai (b')) pätee ja olkoon $I_m h = 0$. Jos nyt $f = \ell_m h$, niin $If = 0$ ja proposition 3.2 nojalla f on astetta m ja f sisältää vain parillisen/parittoman asteisia termejä, kun m on parillinen/pariton. Lemma 3.13 ja propositio 3.14 puolestaan sanovat, että kuvaukselle $u = u^f \in C^\infty(SM)$ pätee $Xu = -f$ ja $u|_{\partial SM} = 0$. Oletuksen nojalla u on astetta $m-1$ ja $f = -Xu$. Ottamalla ℓ_m^{-1} puolittain saadaan $h = d_s \ell_{m-1}(-u)$. Valitaan siis $p = \ell_{m-1}(-u)$, jolloin $h = d_s p$ ja $p|_{\partial M} = 0$ eli I_m on solenoidisesti injektiiivinen. $\square$

Huomautus 3.17 (Pestovin identiteetti [14] propositio 4.3.2 tai [17]). Erityis-maininnan ansaitsee nyt toinen energiaidentiteetti, jota kutsutaan Pestovin identiteetiksi. Olkoon (M, g) kompakti suunnistuva Riemannin pinta, jolla on sileä reuna. Tällöin

$$\|VXu\|_{SM}^2 = \|XVu\|_{SM}^2 - \langle KVu, u \rangle_{\partial SM} + \|Xu\|_{SM}^2$$

kaikille $u \in C^\infty(SM)$, joille $u|_{\partial SM} = 0$. Nyt itse asiassa tapauksessa $I_0 = I$ (solenoidinen) injektiiivisyys on yhtäpitävä sen kanssa, että yhtälön $VXu = 0$ ainoa sileä ratkaisu joukossa SM reunaehdolla $u|_{\partial SM} = 0$ on $u = 0$. Jos nyt (M, g) on yksinkertainen ja negatiivisesti kaareutunut Riemannin pinta, niin Pestovin identiteetti antaa

$$\|XVu\|_{SM}^2 - \langle KVu, u \rangle_{\partial SM} + \|Xu\|_{SM}^2 = 0.$$

Koska $K \leq 0$, niin kaikki termit ovat ei-negatiivisia, joten $\|XVu\|_{SM}^2 = 0$ eli $Xu = 0$ joukossa SM . Tällöin täytyy olla, että $u = 0$ eli I on todella injektiiivinen. Mainittakoon myös, että itse asiassa aiemmin esitelty Guillemín–Kazhdhan-identiteetti on Pestovin identiteetti sovellettuna kuvaukseen $u \in \Omega_k$ ja toisaalta Guillemín–Kazhdhan identiteetistä saadaan summaamalla indeksin $k \in \mathbb{Z}$ yli Pestovin identiteetti.

3.4 Solenoidisen injektiiivisyyden todistus

Kaikki todistukseen vaadittavat työkalut ja tulokset ovat nyt valmiina, kunhan todistamme vielä yhden lemmän.

Lemma 3.18. *Olkoon (M, g) kompakti ja suunnistuva Riemannin pinta, jolla on sileä reuna. Olkoon $u \in C^\infty(SM)$, jolle $Xu = f$. Tällöin*

$$\eta_+ u_{k-1} + \eta_- u_{k+1} = f_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Erityisesti, jos f on astetta m , niin

$$\eta_+ u_{k-1} + \eta_- u_{k+1} = 0, \quad |k| \geq m+1.$$

Todistus. Lemman 2.24 nojalla saadaan esitykset kuvauksille u ja f . Käyttämällä lemmän 2.23 ominaisuutta $X = \eta_+ + \eta_-$ ja yhtälöä $Xu = f$ saadaan

$$Xu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_+ u_k + \eta_- u_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k = f$$

Koska nyt lemmän 2.23 nojalla $\eta_+ u_{k-1}$ ja $\eta_- u_{k+1}$ ovat kertalukua k , niin väite seuraa vertailemalla saman kertaluvun termejä. $\square$

Proposition 3.16 nojalla lauseen 3.10 todistamiseksi riittää enää todistaa seuraava lause.

Lause 3.19. *Olkoon (M, g) yksinkertainen Riemannin pinta, joka on negatiivisesti kaareutunut. Jos f on astetta m , $u \in C^\infty(SM)$ toteuttaa kuljetusyhtälön $Xu = -f$ joukossa SM ja $u|_{\partial SM} = 0$, niin u on astetta $m - 1$.*

Todistus. Edellisen lemmän nojalla pätee

$$\eta_+ u_{k-1} + \eta_- u_{k+1} = 0, \quad |k| \geq m + 1.$$

Oletetaan, että $k \geq m + 1$. Seurauksen 2.27 nojalla pätee

$$\|\eta_- u_{k-1}\|_{SM} \leq \|\eta_+ u_{k-1}\|_{SM}.$$

Yhdistämällä edelliset saadaan

$$\|\eta_- u_{k-1}\|_{SM} \leq \|\eta_- u_{k+1}\|_{SM}, \quad k \geq m + 1.$$

Tätä arviota voidaan iteroida, jolloin N iteraation jälkeen pätee

$$\|\eta_- u_{k-1}\|_{SM} \leq \|\eta_- u_{k-1+2N}\|_{SM}, \quad k \geq m + 1.$$

Koska $u \in C^\infty(SM)$, niin $\eta_- u \in L^2(SM)$. Erityisesti Fourier-sarjan suppenemisen nojalla summa

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \|\eta_- u_l\|_{SM}^2$$

on äärellinen, joten $\lim_{l \rightarrow \pm\infty} \|\eta_- u_l\|_{SM} = 0$. Ottamalla raja-arvo $N \rightarrow \infty$ saadaan, että

$$\eta_- u_{k-1} = 0, \quad |k| \geq m + 1.$$

Käyttämällä edellisen lemmän tulosta saadaan, että

$$\eta_- u_l = 0 = \eta_+ u_l, \quad l \geq m.$$

Lemman 2.23 ominaisuuden $X = \eta_+ + \eta_-$ nojalla

$$Xu_l = 0, \quad u_l|_{\partial SM} = 0, \quad l \geq m.$$

Tämän perusteella pätee

$$u_l = 0, \quad l \geq m.$$

Vastaavasti, kun $k \leq -m - 1$ saadaan, että

$$u_l = 0, \quad l \leq -m.$$

Näin ollen u on astetta $m - 1$. □

Huomautus 3.20. Emme itse asiassa tarvinneet koskaan konjugaattipisteiden puutetta eli meidän ei tarvitse olettaa sitä. Kuitenkin negatiivisesti kaareutuneessa avaruudessa ei itse asiassa ole konjugaattipisteitä eli oletus on silti voimassa. Perustellaan tämä lyhyesti. Olkoon $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ geodeesin osa ja olkoon J Jacobin kenttä, jolle $J(a) = 0 = J(b)$. Määritellään apukuvaus $\phi(t) = |J(t)|_g^2$. Nyt voidaan laskea käyttäen Jacobin yhtälöä ja kaarevuuden määritelmää tämän toinen derivaatta

$$\begin{aligned} \phi'' &= \langle D_t^2 J, J \rangle_g + \langle D_t J, D_t J \rangle_g \\ &= -\langle R_\gamma J, J \rangle_g + |D_t J|_g^2 \\ &= -(|\dot{\gamma}|_g^2 |J|_g^2 - \langle \dot{\gamma}, J \rangle_g^2) K + |D_t J|_g^2 \end{aligned}$$

Nyt Cauchy–Schwartzin epäyhtälön ja negatiivisen kaarevuuden nojalla $\phi'' \geq 0$, joten ϕ on konvekssi funktio, jolloin $\phi = 0$, sillä $\phi(a) = 0 = \phi(b)$. Näin ollen $J = 0$ eli ei ole epätriviaalia Jacobin kenttää kahden pisteen välillä. Käsitelimme yksinkertaisen moniston tapausta, sillä se esiintyy erityisesti variaatiossa, joka koskee kuvausta I_0 . Jos nimittäin monisto on yksinkertainen, niin ei tarvita tietoa kaarevuudesta.

4 Tensoritografiaa useampiulotteisessa avaruudessa sekä yleisessä kaarevuudessa

Tässä luvussa tarkastellaan päätuloksen variaatioita perustuen lähteen [14] lukuihin 3,4,6,7, 8 ja 10 aloittamalla sen yleistyksestä useampaan ulottuvuuteen, minkä jälkeen tarkastellaan yleistä kaarevuutta.

4.1 Tensoritografiaa useampiulotteisessa avaruudessa

Vaikka olemmekin tarkastelleet ongelmaa Riemannin pinnoilla, niin itse asiassa tuloksia voidaan yleistää useampiulotteisiin avaruuksiin. Tässä meidän tulee palata vektorikenttiin X , $X_\perp$ ja V . Näistä muistetaan, että X määriteltiin dimensiosta riippumatta, mutta useammassa ulottuvuudessa $X_\perp$ ja V eivät ole enää vektorikenttiä vaan gradientin kaltaisia eli ikään kuin useampi vektorikenttä. Useammassa ulottuvuudessa ei meille enää riitä kaksi paikka-koordinaattia ja yksi kulma-koordinaatti vaan tarvitaan enemmän.

Tarkastellaan ensin pallokimppua tarkemmin useassa ulottuvuudessa, johon yksityiskohtia löytyy myös lähteistä [8] ja [13]. Olkoon (M, g) kompakti Riemannin monisto ja $\pi : SM \rightarrow M$ kanoninen projektio. Pallokimpulla tulee olemaan nyt Sasaki-metriikka, joka tulee nyt ajatella sen luonnollisena metriikkana. Olkoon nyt $\mathcal{V} = \ker d\pi$ vertikaalinen alikimppu. Nyt Sasaki-metriikalla saadaan orthogonaalinen hajotelma

$$TSM = \mathbb{R}X \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{V},$$

missä $\mathcal{H} = (\mathbb{R}X \oplus \mathcal{V})^\perp$ on horisontaalinen alikimppu. Nyt itse asiassa pätee $\mathcal{H}(x, v) \cong \mathcal{V}(x, v) \cong \{v\}^\perp \subset T_x M$ ja $\mathbb{R}X \oplus \mathcal{H} \cong T_x M$ kanonisella identifiointilla.

Nyt voimme yleistää X , $X_\perp$ ja V useampaan ulottuvuuteen, johon voi yksityiskohtaisemmin tutustua lähteessä [15]. Olkoon nyt $u \in C^\infty(SM)$. Edellinen hajotelma antaa meille gradienttihajotelman

$$\nabla_{SM} u = ((Xu)X, \overset{h}{\nabla} u, \overset{v}{\nabla} u),$$

missä $\overset{h}{\nabla}$ ja $\overset{v}{\nabla}$ ovat horisontaalinen ja vertikaalinen gradientti, jotka ovat kuvauksia joukolta $C^\infty(SM)$ joukolle

$$\mathcal{Z} = \{Z \in C^\infty(SM, TM) : Z(x, v) \in T_x M, Z(x, v) \perp v\}.$$

Siis molemmat antavat vektorikentän, joka on kohtisuorassa nopeutta vasten. Tässä oikeastaan kiteytyy idea. Riemannin pinnalla on geodeesin menosuuntaan nähden kaksi kohtisuoraa komponenttia, joista toinen on pinnan

suuntainen ja toinen normaalin suuntainen. Nyt kyseisiä suuntia on useampi. Joukkoon $\mathcal{Z}$ voidaan myös määritellä L^2 -sisätulo, kun integroidaan tilavuusmuodon $d\Sigma^{2n-1}$ suhteen. Tällöin voidaan määritellä divergensit $\overset{h}{\text{div}}$ ja $\overset{v}{\text{div}}$ kuvausten $-\overset{h}{\nabla}$ ja $-\overset{v}{\nabla}$ formaaleina adjungaatteina.

Edellä määritellyille pätee lemmän 2.13 kanssa analogiset kommutaattorirelaatiot

Lemma 4.1 ([14] lemma 4.7.2). *Seuraavat kommutaattorirelaatiot pätevät*

- $[X, \overset{v}{\nabla}] = -\overset{h}{\nabla},$
- $[X, \overset{h}{\nabla}] = R\overset{v}{\nabla},$
- $\overset{h}{\text{div}}\overset{v}{\nabla} - \overset{v}{\text{div}}\overset{h}{\nabla} = (n-1)X,$
- $[X, \overset{v}{\text{div}}] = -\overset{h}{\text{div}},$
- $[X, \overset{h}{\text{div}}] = \overset{v}{\text{div}}R,$

missä n on dimensio ja R on Riemannin kaarevuustensori.

Myös proposition 2.19 tulokselle on analoginen tulos.

Propositio 4.2 (Osittaisintegrointi [14] propositio 4.7.3). *Olkoon $u, w \in C^\infty(SM)$ ja $Z \in \mathcal{Z}$. Tällöin pätevät seuraavat osittaisintegroitikaavat*

$$\begin{aligned}\langle Xu, w \rangle_{SM} &= -\langle u, Xw \rangle_{SM} - \langle \langle v, \nu \rangle u, w \rangle_{\partial SM}, \\ \langle \overset{h}{\nabla} u, Z \rangle_{SM} &= -\langle u, \overset{h}{\text{div}} Z \rangle_{SM} - \langle u, \langle Z, \nu \rangle \rangle_{\partial SM}, \\ \langle \overset{v}{\nabla} u, Z \rangle_{SM} &= -\langle u, \overset{v}{\text{div}} Z \rangle_{SM}.\end{aligned}$$

Huomautuksen 3.17 Pestovin identiteetti yleistyy myös seuraavasti.

Propositio 4.3 (Pestovin identiteetti [14] propositio 4.7.4 tai [7]). *Olkoon (M, g) kompakti n -ulotteinen Riemannin monisto, jolla on sileä reuna. Olkoon $u \in C^\infty(SM)$. Tällöin pätee*

$$|\overset{v}{\nabla} Xu|_{SM}^2 = |X\overset{v}{\nabla} u|_{SM}^2 - \langle R\overset{v}{\nabla} u, u \rangle_{SM} + (n-1)|Xu|_{SM}^2 + \langle Tu, \overset{v}{\nabla} u \rangle_{\partial SM},$$

missä $Tu = \mu\overset{h}{\nabla} u - Xu\overset{v}{\nabla} \mu$.

Guillemin–Kazhdan-identiteettiä varten tarkastellaan analogista vertikaalista Fourier-analyysiä, johon voi tutustua myös lähteestä [3]. Olennaisesti Fourier-sarja, koostuu nyt palloharmonisista funktioista, mikä on kulmaosan moniulotteinen vastine. Määrittelemällä vertikaalinen Laplace-operaattori $\overset{\vee}{\Delta} = \text{div} \overset{\vee}{\nabla}$ voidaan Fourier-moodit määritellä analogisesti yhtälöllä $-\overset{\vee}{\Delta}u = \lambda_l u$, missä $l \geq 0$ on kokonaisluku (huomaa ero aiempaan, missä sallittiin myös negatiiviset kokonaisluvut). Nyt kuvaukselle $u \in L^2(SM)$ tai $u \in C^\infty(SM)$ pätee esitys

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} u_l,$$

missä u_l ovat Fourier-moodeja. Guillemin–Kazhdan-operaattorit puolestaan on määritelty kaavalla

$$X_{\pm}u = \sum_{l=0}^{\infty} P_{l\pm 1}(X P_l u_l),$$

missä P_l on ortogonaaliprojektio ($P_{-1} = 0$) joukolta $L^2(SM)$ esityksen Fourier-moodille. Näille operaattoreille pätee nyt vastaavia ominaisuuksia. Erityisesti näillä on $\eta_{\pm}$ -operaattorien lemmän 2.23 antama tikapuuominaisuus ([14] lemma 6.6.4). Erona kuitenkin nyt voi huomata, että $X_{\pm}$ eivät ole vektorikenttiä. Guillemin–Kazhdan-identiteetin voisi muotoilla nyt seuraavasti.

Propositio 4.4 (Guillemin–Kazhdan-identiteetti [14] propotistio 6.6.7 tai [3]). *Olko u_l Fourier-moodi. Tällöin pätee*

$$\beta_{l-1} \|X_+ u\|_{SM}^2 = \alpha_{l-1} \|X_- u\|_{SM}^2 - \langle R \overset{\vee}{\nabla} u, \overset{\vee}{\nabla} u \rangle_{SM} + \|Zu\|_{SM}^2 + \langle Tu, \overset{\vee}{\nabla} u \rangle_{\partial SM},$$

missä $\alpha_l = \alpha_l(\lambda_l, n)$ ja $\beta_l = \beta_l(\lambda_l, n)$, $Tu = \mu \overset{h}{\nabla} u - Xu \overset{\vee}{\nabla} \mu$ ja Z on se $\overset{h}{\nabla} u$ osa, jolle $\text{div} Z = 0$.

Päätulos on nyt muuten sama, mutta kaarevuus korvataan sektionaalisella kaarevuudella.

Lause 4.5 ([14] lause 7.5.1). *Olko (M, g) yksinkertainen Riemannin monisto, jolla on negatiivinen sektionaalinen kaarevuus. Tällöin I_m on solenoidisesti injektiivinen.*

4.2 Tensoritomografiaa yleisessä kaarevuudessa

Negatiivinen kaarevuus on suhteellisen vahva oletus. Tarkastellaan seuraavaksi siis tapauksia, missä kaarevuudesta ei tehdä oletuksia. Palaamme kuitenkin takaisin tarkastelemaan Riemannin pintoja ja tarkastelemme tapausta

I_0 . Muistetaan aluksi, että muotoilimme päätuloksen yksinkertaisille monistoille, mutta emme tarvinneet konjugaattipisteiden puuttumista, joka tosin on negatiivisessa avaruudessa joka tapauksessa voimassa. Ilman oletusta negatiivisesta kaarevuudesta joudutaan tätä oletusta käyttämään.

Konjugaattipisteisiin ja niin kutsuttuun Morse-teoriaan voi tutustua lähteistä [10] ja [14]. Emme kuitenkaan paneudu tähän kovin tarkasti vaan esitelmemme nopeasti tarpeellisen indeksimuodon ja miten se liittyy konjugaattipisteisiin. Muuten todistus tarvitsee aiemmin mainittua Santalón kaavaa ja kuljetusyhtälökarakterisaatiota. Olkoon nyt $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ geodeesin osa ja X ja Y geodeesin normaalivektorikenttiä, jotka katoavat välin päätepisteissä. Indeksimuoto I_γ määritellään nyt bilinaarimuotona

$$I_\gamma(X, Y) = \int_a^b \langle D_t X, D_t Y \rangle_g - \langle R_\gamma X, D_t Y \rangle_g dt.$$

Huomautus 4.6. Teorian kannalta on helpompaa ymmärtää vektorikentät Sobolev-mielessä, mutta sivuutamme tämän keskustelun.

Indeksimuoto pituuden toinen variaatio eli se karakterisoi onko käyrä pituuden minimoija, maiksimoija vai satula. Tärkeänä ominaisuutena on, että indeksimuoto on positiividefiniitti jos ja vain jos geodeesin osalla ei ole konjugaattipisteitä. Näytimme huomautuksessa 3.17, miten muunnoksen I_0 injektivisyys seuraa Pestovin identiteetistä negatiivisessa kaarevuudessa. Kuitenkin yksinkertaisten Riemannin pintojen tapauksessa pätee jotain yleisempää.

Propositio 4.7 ([14] propositio 4.4.3). *Olkoon (M, g) yksinkertainen Riemannin pinta ja olkoon $u \in C^\infty(SM)$, jolle $u|_{\partial SM} = 0$. Tällöin pätee*

$$\|Xu\|_{SM}^2 - \langle Ku, u \rangle_{SM} \geq 0,$$

missä yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos $u = 0$.

Proposition todistuksen ideana on käyttää Santalón kaavaa, jolla voi laskea epätyhtälön vasemman puolen muotoon, jossa esiintyy indeksimuoto integraalissa joukon $\partial_+ SM$ yli. Tämän jälkeen tulos seuraa siitä, että indeksimuoto on positiividefiniitti, koska pinnalla ei ole konjugaattipisteitä. Huomautuksen 3.17 kaltaisella argumentilla saa nyt edellisellä propositiolla tuloksen

Lause 4.8 ([14] lause 4.4.1). *Olkoon (M, g) yksinkertainen Riemannin pinta. Tällöin I_0 on injektio.*

Huomautus 4.9. Itse asiassa edellinen toimii myös useassa ulottuvuudessa. Tällöin osoitetaan, että $\|X\overset{\vee}{\nabla}u\|_{SM}^2 - \langle R\overset{\vee}{\nabla}u, \overset{\vee}{\nabla}u \rangle_{SM} \geq 0$ kaikille $u \in C^\infty(SM)$, joille $u|_{\partial SM} = 0$, mistä tulos seuraa yksinkertaisille Riemannin monistoille. [14]

Esitämme vielä muunnelman, jossa Riemannin pinnalla voi olla konjugaattipisteitä. Tällöin kaarevuuskin on yleinen, sillä negatiivisessa kaarevuudessa ei ole konjugaattipisteitä. Riittävä ehto korvaamaan on adjungaatin I_0^* surjektiivisuus. Yksityiskohtia löytyy lähteestä [16].

Ensisilmäyksellä röntgenmuunnoksen I_0 adjungaatista puhuminen vaikuttaa erikoiselta, koska kyseessä on lineaarikuvauksen $C^\infty(SM) \rightarrow C^\infty(\partial_+ SM)$. Adjungaatti määritellään rajoitetulle (jatkuvalle) lineaarikuvaukselle $A : X \rightarrow Y$ Hilbert-avaruuksien X ja Y välillä rajoitettuna lineaarikuvauksena $A^* : Y \rightarrow X$, joka toteuttaa kaavan $\langle x, A^*y \rangle_X = \langle Ax, y \rangle_Y$ kaikilla $x \in X$ ja $y \in Y$. Nyt tarkasteltavat avaruudet eivät kuitenkaan ole Hilbert-avaruuksia. Kuitenkin I_0 voidaan laajentaa rajoitetuksi lineaarikuvaukseksi $L^2(SM) \rightarrow L^2(\partial_+ SM)$ ([14] propositio 4.1.2), jolloin voidaan puhua sen adjungaatista I_0^* . Kuvaukselle $h \in L^2(\partial_+ SM)$ voidaan itse asiassa myös eksplisiittisesti laskea, että

$$I_0^*h(x) = \int_{S_x M} h^\sharp(x, v) dS_x(v),$$

missä $h^\sharp(x, v) = h(\varphi_{-\tau(x, -v)}(x, v))$.

Huomautus 4.10. Laajenenminen onnistuu myös Sobolev-mielessä $H^k(SM) \rightarrow H^k(\partial_+ SM)$ kaikille $k \in \mathbb{N}$ ([14] propositio 4.1.3).

Suoraan määritelmillä voi huomata, että jos lineaarikuvauksen adjungaatti on surjektio, niin alkuperäinen kuvaus on injektio. Tällöin siis I_0^* surjektiivisuus antaa suoraan I_0 injektiivisyyden. Määritellään joukko

$$C_\alpha^\infty(\partial_+ SM) = \{h \in C^\infty(\partial_+ SM) : h^\sharp \in C^\infty(SM)\}.$$

Nyt saadaan seuraava lemma.

Lemma 4.11 ([14] lemma 10.2.2). *Olkoon (M, g) kompakti ja ansaton Riemannin monisto, jolla on aidosti konvekksi reuna. Jos $I_0^* : C_\alpha^\infty(\partial_+ SM) \rightarrow C^\infty(SM)$ on surjektio, niin $I_0 : C^\infty(SM) \rightarrow C^\infty(\partial_+ SM)$ on injektio.*

Seuraava päätuloksen variaatio on kuitenkin vahvempana voimassa.

Lause 4.12 ([14] lause 10.2.1). *Olkoon (M, g) kompakti ja ansaton Riemannin pinta, jolla on aidosti konvekksi reuna, ja olkoon I_0^* surjektio. Tällöin I_m on solenoidisesti injektiivinen.*

Todistus perustuu siihen, että lemmän 2.24 antaman esityksen avulla voidaan määritellä analyyttisyys kulmamuuttujan suhteen siten, että kuvaus u on analyyttinen, jos $u_k = 0$ kaikilla $k < 0$ ja antianalyttinen, jos $u_k = 0$ kaikilla $k > 0$. Yksikkökiekolla tätä voi verrata tavallisen kompleksianalyysin määritelmään ja todeta määritelmän olevan järkevä. Analyyttisyyden ja antianalyttisyyden avulla saadaan niin sanottu integroiva tekijä.

Propositio 4.13 ([14] propositio 10.1.2). *Olkoon (M, g) kompakti ja ansaton Riemannin pinta, jolla on aidosti konvekksi reuna. Olkoon I_0^* surjektio. Tällöin jokaiselle $a_{-1} + a_1 \in \Omega_{-1} \oplus \Omega_1$ on olemassa $w \in C^\infty(SM)$ siten, että w on analyyttinen ja $Xw = a_{-1} + a_1$. Vastaavasti on olemassa $\tilde{w} \in C^\infty(SM)$ siten, että $\tilde{w}$ on antianalyttinen ja $X\tilde{w} = a_{-1} + a_1$.*

Proposition integroiva tekijä on analoginen vastaavalle differentiaaliyhtälöiden rakaisuun käytettävälle integroivalle tekijälle. Tämän avulla voidaan todistaa, että I rajoittuma joukkoihin Ω_m on injektio ([14] lause 10.2.3). Loput todistuksesta on kuljetusyhtälön, Fourier-sarjan ja Guillemin–Kazhdan-operaattorien hyödyntämistä. Yksityiskohdat lähteen [14] luvussa 10.

Huomautus 4.14. Lauseen 4.12 variaatio on tosin suhteellisen epätyytyttävä, sillä on kuitenkin epätriviaalia, että kuvaus I_0^* olisi surjektio. Mainitaan kuitenkin eräs surjektiivisuustulos, jolla on yhteys aiempaan. Olkoon (M, g) yksinkertainen monisto. Tiedämme, että I_0 on injektio, ja osoittautuu, että niin sanottu normaalioperaattori $I_0^* I_0 : L^2(M) \rightarrow L^2(M)$ on elliptinen pseudodifferentiaalioperaattori. Näiden avulla voidaankin osoittaa, että kuvaus $I_0^* : C_\alpha^\infty(\partial_+ SM) \rightarrow C^\infty(SM)$ on surjektio. Yksityiskohdat lähteen [14] luvussa 8. Tämä tosin ei todista käytännössä mitään uutta, koska monisto on yksinkertainen.

5 Yhteenveto

Tutkielmassa tarkastelimme tensoritomografien kannalta tärkeitä työkaluja, joiden avulla osoitimme, että röntgenmuunnos yksinkertaisella negatiivisesti kaareutuneella Riemannin pinnalla on solenoidisesti injektiivinen. Toisin sanoen voimme selvittää tuntemattoman tensorikenttän solenoidisen osan, kun tiedämme sen integraalin maksimaalisten geodeesien yli. Lisäksi tarkastelimme miten voimme yleistää työkaluja useampaan ulottuvuuteen ja millä oletuksilla voidaan luopua negatiivisesta kaarevuudesta. Olennaisesti, jos olemme yleisemmän tilanteen tai luovumme jostakin oletuksesta, niin tarvitsemme todennäköisesti lisätietoja jostain muusta. Tämä ei missään nimessä ole kaiken kattava, sillä mainitsimme esimerkiksi epäkompaktista tilanteesta, mutta emme tarkastelleet sitä ollenkaan.

Johdannossa myös sanoimme, että inversio-ongelman kannalta tämä on vain ensimmäinen askel. Emme esimerkiksi tiedä, miten solenoidinen osa pitäisi laskea. Tämä on tosin tarkasteltavassa abstraktissa tilanteessa hankala ongelma. Itse asiassa helpompi jatkokysymys on muunnoksen stabiilisuudessa eli voisiko pienellä muutoksella röntgenmuunnoksessa saada aikaan iso muutos solenoidisessa osassa. Mainitsimme, että tämä voisi tarkoittaa estimaatteja sopivien normien suhteen ja niitä on esitetty lähteessä [14]. Tämän tarkastelu tarvitsisi Sobolev-avaruuksien teoriaa, mitä emme käsitelleet tässä, mutta stabiilisuuteen voitaisiin sen avulla vastata ja se voisi olla luonteva jatko tälle tutkielmalle esimerkiksi tarkastelemalla vain tapausta I_0 .

Viitteet

- [1] Shiing-shen Chern. “An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface”. *Proc. Amer. Math. Soc.* 6 (1955), s. 771–782. ISSN: 0002-9939,1088-6826. DOI: [10.2307/2032933](https://doi.org/10.2307/2032933). URL: <https://doi.org/10.2307/2032933>.
- [2] V. Guillemin ja D. Kazhdan. “Some inverse spectral results for negatively curved 2-manifolds”. *Topology* 19.3 (1980), s. 301–312. ISSN: 0040-9383. DOI: [10.1016/0040-9383\(80\)90015-4](https://doi.org/10.1016/0040-9383(80)90015-4). URL: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(80\)90015-4](https://doi.org/10.1016/0040-9383(80)90015-4).
- [3] Victor Guillemin ja David Kazhdan. “Some inverse spectral results for negatively curved n -manifolds”. Teoksessa: *Geometry of the Laplace operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979)*. Vol. XXXVI. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980, s. 153–180. ISBN: 0-8218-1439-7.
- [4] Esko Heinonen. *Käyrien ja pintojen differentiaaligeometria*. Helmikuu 2021. URL: <https://eskoheinonen.wordpress.com/wp-content/uploads/2021/02/kpdg-1.pdf>.
- [5] Joonas Ilmavirta. *Analysis and X-ray tomography*. Maaliskuu 2025. URL: <https://users.jyu.fi/~jojapeil/opetus/mats4300k25/mats4300-v2.pdf>.
- [6] Joonas Ilmavirta. *Geometry of geodesics*. Huhtikuu 2024. URL: <https://users.jyu.fi/~jojapeil/opetus/mats4120k24/MATS4120-v2.pdf>.
- [7] Joonas Ilmavirta ja Gabriel P. Paternain. “Broken ray tensor tomography with one reflecting obstacle”. *Comm. Anal. Geom.* 30.6 (2022), s. 1269–1300. ISSN: 1019-8385,1944-9992. DOI: [10.4310/cag.2022.v30.n6.a3](https://doi.org/10.4310/cag.2022.v30.n6.a3). URL: <https://doi.org/10.4310/cag.2022.v30.n6.a3>.
- [8] Gerhard Knieper. “Hyperbolic dynamics and Riemannian geometry”. Teoksessa: *Handbook of dynamical systems, Vol. 1A*. North-Holland, Amsterdam, 2002, s. 453–545. ISBN: 0-444-82669-6. DOI: [10.1016/S1874-575X\(02\)80008-X](https://doi.org/10.1016/S1874-575X(02)80008-X). URL: [https://doi.org/10.1016/S1874-575X\(02\)80008-X](https://doi.org/10.1016/S1874-575X(02)80008-X).
- [9] John M. Lee. *Introduction to complex manifolds*. Vol. 244. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, [2024] ©2024, s. xii+361. ISBN: [9781470476953]; [9781470477820]; [9781470477813].

- [10] John M. Lee. *Introduction to Riemannian manifolds*. Second. Vol. 176. Graduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, 2018, s. xiii+437. ISBN: 978-3-319-91754-2; 978-3-319-91755-9.
- [11] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Second. Vol. 218. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2013, s. xvi+708. ISBN: 978-1-4419-9981-8.
- [12] Jere Lehtonen, Jesse Railo ja Mikko Salo. “Tensor tomography on Cartan-Hadamard manifolds”. *Inverse Problems* 34.4 (2018), s. 044004, 27. ISSN: 0266-5611,1361-6420. DOI: [10.1088/1361-6420/aaaf85](https://doi.org/10.1088/1361-6420/aaaf85). URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6420/aaaf85>.
- [13] Gabriel P. Paternain. *Geodesic flows*. Vol. 180. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999, s. xiv+149. ISBN: 0-8176-4144-0. DOI: [10.1007/978-1-4612-1600-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1600-1). URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1600-1>.
- [14] Gabriel P. Paternain, Mikko Salo ja Gunther Uhlmann. *Geometric inverse problems—with emphasis on two dimensions*. Vol. 204. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. With a foreword by András Vasy. Cambridge University Press, Cambridge, 2023, s. xxiv+344. ISBN: 978-1-316-51087-2.
- [15] Gabriel P. Paternain, Mikko Salo ja Gunther Uhlmann. “Invariant distributions, Beurling transforms and tensor tomography in higher dimensions”. *Math. Ann.* 363.1-2 (2015), s. 305–362. ISSN: 0025-5831,1432-1807. DOI: [10.1007/s00208-015-1169-0](https://doi.org/10.1007/s00208-015-1169-0). URL: <https://doi.org/10.1007/s00208-015-1169-0>.
- [16] Gabriel P. Paternain, Mikko Salo ja Gunther Uhlmann. “Tensor tomography on surfaces”. *Invent. Math.* 193.1 (2013), s. 229–247. ISSN: 0020-9910,1432-1297. DOI: [10.1007/s00222-012-0432-1](https://doi.org/10.1007/s00222-012-0432-1). URL: <https://doi.org/10.1007/s00222-012-0432-1>.
- [17] L. N. Pestov ja V. A. Sharafutdinov. “Integral geometry of tensor fields on a manifold of negative curvature”. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 295.6 (1987), s. 1318–1320. ISSN: 0002-3264.
- [18] Mikko Salo. *Fourier analysis*. Syyskuu 2024. URL: https://users.jyu.fi/~salomi/teaching/fa_2024/Fourier_lectures_2024.pdf.
- [19] L. A. Santaló. “Measure of sets of geodesics in a Riemannian space and applications to integral formulas in elliptic and hyperbolic spaces”. *Summa Brasil. Math.* 3 (1952), s. 1–11. ISSN: 0039-498X.

- [20] Shigeo Sasaki. “On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds”. *Tohoku Math. J. (2)* 10 (1958), s. 338–354. ISSN: 0040-8735,2186-585X. DOI: [10.2748/tmj/1178244668](https://doi.org/10.2748/tmj/1178244668). URL: <https://doi.org/10.2748/tmj/1178244668>.