

Säteily- ja ydinfysiikka

Eetu Uusikylä

11. marraskuuta 2022

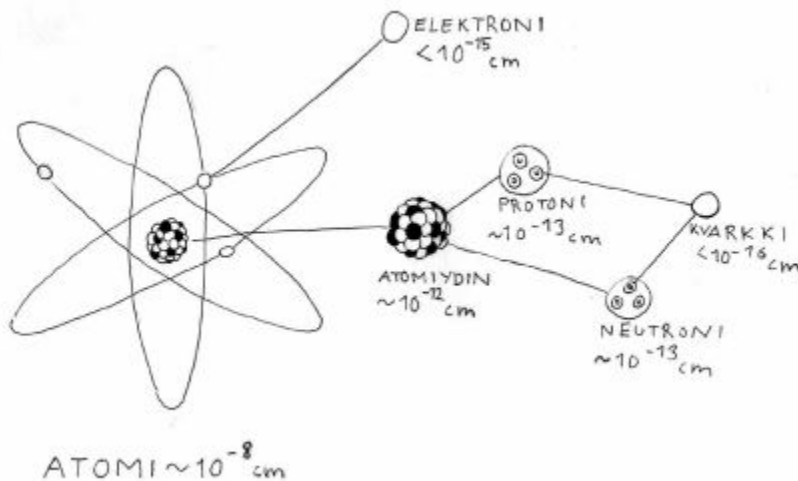
1 Johdanto

Ydinfysiikka tutkii atomiytimien rakennetta, reaktioita ja ydinrakenteisiin vaikuttavia voimia. Keskeisiä ydinfysiikan ilmiöitä ovat radioaktiivinen hajoaminen, ydinsynteesi, sekä fuusio ja fissio. Näiden seurauksena voi vapautua energiaa, jota hyödynnetään mm. ydinenergian tuotossa ja lääketieteen kuvantamisessa. Ydinreaktioiden energioiden määrittäminen vaatii ytimen rakenneosien välisten vuorovaikutusten ymmärtämistä.

¹

2 Ytimen ominaisuudet

Atomiydin muodostuu protoneista ja neutroneista, joita kutsutaan yhteisnimellä nukleonit. Protonit ovat positiivisesti varattuja ($Q = +e$) ja niiden välillä vallitsee sähköinen hylkimisvoima, Coulombin repulsio. Neutronit ovat sähköisesti neutraaleja, eli niiden välillä ei ole sähköistä vuorovaikutusta. Atomiytimen läpimitta (10^{-15} - 10^{-14} m) on noin 10^{-5} atomin läpimitasta. Silti yli 99.999 % atomin massasta on keskittynyt ytimeen. Atomiydintä ympäröi elektronipilvi, jonka massa on häviävän pieni ytimen massaan verrattuna. Massoja eri isotoopeille löytyy esim. osoitteesta <https://www.ndc.jaea.go.jp/NuC/index.html>.



Kuva 1: Atomin ja ytimen rakenne

Atomiydintä merkitään yleisesti tunnuksella A_ZX_N . Tässä Z ja N ovat protoni- ja neutroniluvut. Massaluvulla A ilmaistaan protonien ja neutronien yhteenlaskettua lukumäärää. Atomiytimen järjestysluku

¹materiaali on vapaasti käytettävissä CC-BY -lisenssin ehtojen mukaisesti

määräytyy protoniluvun perusteella. Ytimiä, joilla on sama järjestysluku, mutta eri massaluku, kutsutaan isotoopeiksi. Ytimiä, joilla on sama massaluku, mutta eri järjestysluvut, kutsutaan isobaareiksi. Isotoneilla puolestaan on sama neutroniluku, mutta eri protoniluku.

Yhden nukleonin massa on noin $1 \text{ u} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Termiä u kutsutaan atomimassayksiköksi. Sen suuruus on $\frac{m(^{12}\text{C})}{12}$, missä ^{12}C on hiilen isotooppi, jonka massaluku on 12. Atomimassayksikkö voidaan ilmaista myös lukuna $u = 931.49 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, missä c on valonnopeus (n. $3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$). Ydin oletetaan usein pallomaiseksi, jolloin sen tiheys on noin

$$\rho(^AX) = \frac{m(^AX)}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (1)$$

Tässä $m(^AX)$ on ytimen massa ja R on ytimen keskimääräinen säde, joka voidaan ilmaista myös massaluvun ja vakion $R_0 = 1.25 \text{ fm}$ avulla kaavan

$$R = R_0 A^{1/3} \quad (2)$$

mukaisesti.

Tehtävä 1

Osoita, että nukleonien lukumäärätiheys (nukleonia/tilavuusyksikkö) ytimessä ei riipu ytimen massaluvusta.

Tehtävä 2

^{208}Pb :n massa on n. $3.4535 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$. Ilmoita tämä massa yksiköissä $[\frac{\text{MeV}}{c^2}]$ ja sen jälkeen yksiköissä [u].

2.1 Ytimen sidosenergia

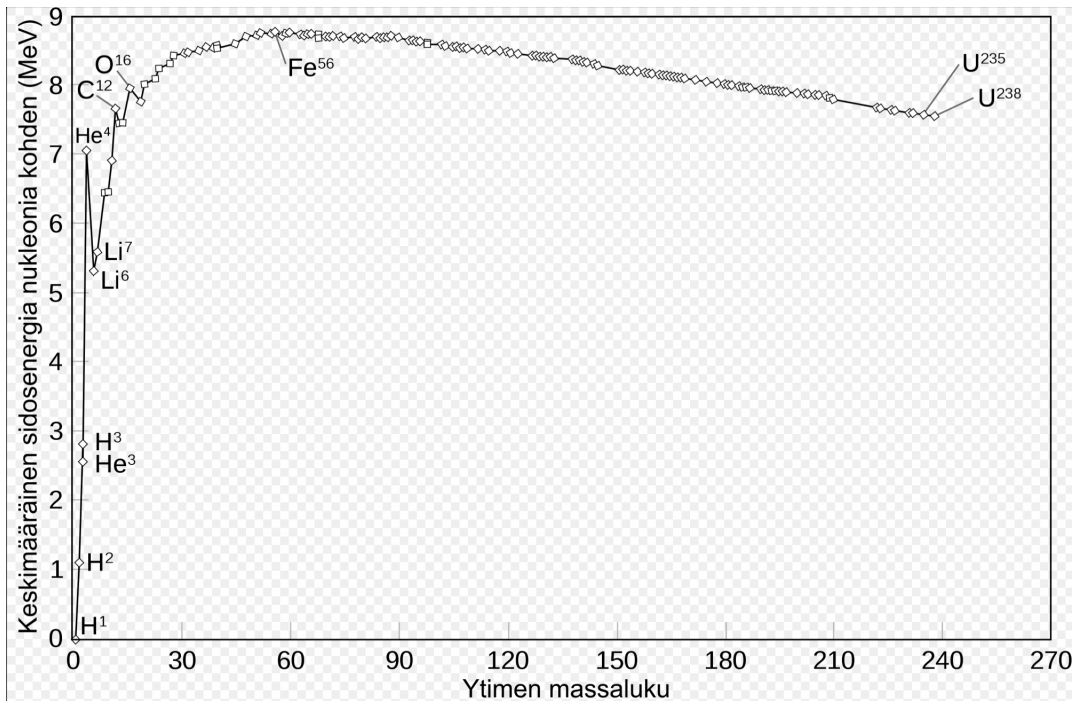
Ytimen sidosenergiaksi määritellään energia, joka tarvitaan nukleonin erottamiseksi toisistaan. Nukleonien välillä vallitsee vahva vuorovaikutus (ydinvoima), joka sitoo nukleoneja yhteen. Ydinvoima vaikuttaa ydintä sitomalla nukleoneja yhteen. Coulombin repulsiivinen voima saa puolestaan protonit hylkimään toisiaan ja näin ollen heikentää ytimen stabiilisuutta. Vahva vuorovaikutus on neljästä perusvuorovaikutuksesta voimakkain, mutta sen kantama on hyvin lyhyt, noin 1 fm . Coulombin voiman kantama on ääretön, ja se on kääntäen verrannollinen varausten etäisyyteen toisistaan.

Kevyiden ytimien ($A < 56$) sidosenergia kasvaa massaluvun funktiona. Rauta-56:n sidosenergia on nukleonia kohden suurin (Kuva 2). Tätä raskaammilla isotoopeilla sidosenergia heikkenee massaluvun kasvaessa, sillä niiden säde ylittää ydinvoiman kantaman. Massaluvun kasvaessa lisääntyy myös protonien lukumäärä, mikä saa Coulombin repulsion kasvamaan suhteessa vahvaan vuorovaikutukseen. Ytimen X sidosenergia voidaan laskea yhtälön

$$B(A, Z) = (m_X - Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n)c^2 \quad (3)$$

$$B(A, Z) = (m_X - Zm(^1\text{H}) + (A - Z)m_n)c^2 \quad (4)$$

avulla. Tässä c on valonnopeus ja m_X , m_p , m_n , m_e $m_{^1\text{H}}$ ovat massat ytimelle, protonille, neutronille, elektronille ja ^1H :lle.



Kuva 2: Ytimen sidosenergia nukleonia kohden massaluvun funktiona

2.1.1 Semi-empiirinen massakaava

Ytimen sidosenergia voidaan laskea myös ns. nestepisaramallin avulla. Tämä malli perustuu semi-empiiriseen massakaavaan (Weizsäckerin massakaavan), joka ilmaistaan yhtälöä

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z(Z-1)A^{-1/3} - a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta \quad (5)$$

käyttäen. Tässä a_v , a_s , a_c , a_{sym} ja δ ovat kokeellisesti määritettyjä vakioita, jotka ottavat huomioon ytimen tilavuuden, pinta-alan, sähköisten voimien, protoni- ja neutronilukujen, sekä niiden parillisuuden vaikutukset atomytimen vakauteen.

Termiä $a_v A$ kutsutaan tilavuustermiksi. Sen määrittäminen perustuu oletukseen, että jokainen nukleoni vuorovaikuttaa vahvan vuorovaikutuksen kautta vain vierekkäisten nukleoniensa (naapuriensa) kanssa ja että jokaisella nukleonilla on sama määrä naapureita. Vahva vuorovaikutus ytimessä on verrannollinen nukleonien lukumäärään (A) ja siten ytimen tilavuuteen.

Pintatermi $a_s A^{2/3}$ ottaa huomioon, että atomytimen uloimmilla nukleoneilla on vähemmän naapureita kuin niillä, jotka ovat ytimen sisällä. Pintatermi on siten negatiivinen ja verrannollinen ytimen pinta-alaan.

Sähköinen hylkimisvoima protonien välillä pienentää ytimen sidosenergiaa, mikä huomioidaan Coulombin termillä $-a_c Z(Z-1)A^{-1/3}$.

Asymmetriatermi $a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A}$ on Paulin kieltoääntöön liittyvä termi, jonka mukaan ydin on stabiileimmillaan, kun protoneita ja neutroneita on sama määrä.

Paritermi δ ottaa huomioon protoni- ja neutroniparien muodostumisen. Parillinen protoni- ja neutroniluku on stabiilimpi kuin pariton. Paritermi δ voi saada arvot:

$$\delta = \begin{cases} +a_p A^{-3/4} & \text{jos } Z \text{ ja } N \text{ ovat parillisia} \\ 0 & \text{jos } A \text{ on parillinen ja } Z \text{ tai } N \text{ on pariton} \\ -a_p A^{-3/4} & \text{jos } Z \text{ ja } N \text{ ovat parittomia} \end{cases}$$

Sovitusparametrit Weizsäckerin massakaavalle ovat kirjallisuudesta riippuen noin $a_V = 15.5$ MeV, $a_S = 16.8$ MeV, $a_c = 0.72$ MeV, $a_{\text{asym}} = 23$ MeV ja $a_p = 34$ MeV.

Tehtävä 3

Laske sidosenergia ytimelle $^{238}_{92}\text{U}$ yhtälöiden (3) ja (4) avulla. Mitä arvioit tämän perusteella semi-empiirisen massakaavan tarkkuudesta? Massat ^1H :lle ja neutronille ovat 1.00782503223 u ja 1.00866491595 u.

2.1.2 Separointienergia

Atomiytimen protoneille ja neutroneille on olemassa tietty energia, joka tarvitaan niiden erottamiseen ytimeistä. Tätä energiaa kutsutaan separointienergiaksi, joka on protonille

$$S_p = B(^{A+1}_{Z+1}X_N) - B(^A_ZY_N) \quad (6)$$

ja neutronille

$$S_n = B(^{A+1}_ZX_{N+1}) - B(^A_ZY_N) \quad (7)$$

Tässä $B(^{A+1}_{Z+1}X_N)$ ja $B(^A_ZY_N)$ ovat sidosenergiat kahdelle isotonille, joista ensiksi mainitulla on yksi protoni enemmän, mutta molemmilla on sama määrä neutroneja. Vastaavasti $B(^{A+1}_ZX_{N+1})$ ja $B(^A_ZY_N)$ ovat saman alkuaineen isotooppeja, joista ensiksi mainitulla on yksi neutroni enemmän.

Tehtävä 4

Laske, paljonko energiaa tarvitaan neutronin irrottamiseksi ^{209}Pb :sta. Tee sama lasku yhtälöitä (3) ja (4) käyttäen.

3 Ydinfysiikan ilmiöt

3.1 Radioaktiivinen hajoaminen

Radioaktiivisessa hajoamisessa epävakaa ydin muuttuu spontaanisti toiseksi ytimeksi emittoiden säteilyä. Aktiivisuus A voidaan ilmaista aktiivisten ytimien lukumäärän muutoksena aikayksikössä kaavan

$$A = \frac{dN}{dt} = \lambda N \quad (8)$$

mukaan. Tässä $\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}}$ on ytimen hajoamisvakio, joka riippuu ytimen puoliintumisajasta $T_{1/2}$. Ylläolevasta yhtälöstä voidaan johtaa aktiivisten ytimien lukumäärä ajanhetkellä t yhtälön

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (9)$$

mukaan. Tässä N_0 on aktiivisten ytimien lukumäärä hetkellä $t = 0$.

Usein radioaktiivinen ydin synnyttää hajotessaan tytärtyimen, joka on myös radioaktiivinen. Tällöin systeemin radioaktiivisuudessa täytyy ottaa molempien ytimien hajoamisvakiot huomioon. Tytärtyimen aktiivisuus ajanhetkellä t voidaan laskea yhtälöstä:

$$A_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \quad (10)$$

missä λ_1 ja λ_2 ovat emo- ja tytärtyimen hajoamisvakiot ja N_0 on emoytimien lukumäärä alussa. Termi $e^{-\lambda_1 t}$ tulee tytärtyimen tuotosta emoytimen hajoamisen myötä. Tytärtyimen hajoaminen muiksi ytimiksi otetaan huomioon negatiivisella termillä $-e^{-\lambda_2 t}$.

Ydinreaktion Q arvo kertoo, kuinka paljon ydinreaktio sitoo tai vapauttaa energiaa. Q arvo lasketaan yhtälön

$$Q = \Delta mc^2 = (m_i - m_f) \cdot c^2 \quad (11)$$

mukaan. Tässä m_i ja m_f ovat reaktion alku- ja lopputuotteiden yhteenlasketut massat, joiden erotusta Δm kutsutaan massavajeeksi. Reaktiota, jonka $Q > 0$, kutsutaan eksoergiseksi. Reaktiota, jonka $Q < 0$, kutsutaan endoergiseksi. Eksoerginen reaktio vapauttaa energiaa ja voi siten tapahtua spontaanisti. Endoerginen reaktio puolestaan vaatii energiaa syntyäkseen.

Jos ydinreaktion Q arvo on negatiivinen, sille on olemassa ns. kynnysenergia, joka ammushiukkasella on vähintään oltava, jotta reaktio voi tapahtua. Kynnysenergia voidaan määrittää yhtälöstä

$$E_{th} = -Q(1 + \frac{m_a}{m_X}) \quad (12)$$

Tässä Q on reaktion Q arvo ja m_a ja m_X ovat ammushiukkasen ja emoytimen massat.

Tehtävä 5

Täydennä allaolevat ydinreaktiot



Laske kullekin reaktiolle Q arvo ja määritä, onko kyseessä endoerginen vai eksoerginen reaktio. Mikäli reaktio ei tapahdu spontaanisti, laske sille kynnysenergia E_{th} .

Tehtävä 6

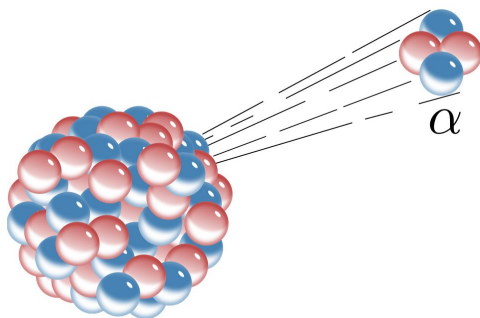
Radioaktiivinen ${}^{140}\text{Ba}$ ($T_{1/2} = 12.75$ d) hajoaa betahajoamisen kautta ${}^{140}\text{La}$:ksi ($T_{1/2} = 1.68$ d). Laske yhtälöitä (5)-(7) käyttäen suhde $A({}^{140}\text{La})/A({}^{140}\text{Ba})$. Mitä arvoa tämä suhde lähestyy pitkän ajan kuluessa?

3.1.1 Alfahajoaminen

Alfahajoamisessa radioaktiivinen ydin emittoi alfahiukkasen, eli helium-hiukkasen, jossa on kaksi protonia ja kaksi neutronia. Hajoamisessa emoydin X muuttuu kaavan

$${}^A_ZX \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^4_2He \quad (17)$$

mukaan tytärytimeksi Y . Reaktiosta vapautuva energia (Q arvo) muuttuu reaktiotuotteiden liike-energiaksi. Liikemäärän ja energian voidaan olettaa säilyvän alfahajoamisessa.



Kuva 3: Alfahajoaminen

Tehtävä 7

Uraanin ${}^{238}\text{U}$ isotooppi hajoaa alfahajoamisen kautta ${}^{234}\text{Th}$ -yttimeksi. Laske tytärytimen ja alfahiukkasen liike-energiat reaktion jälkeen. Emoydin on aluksi levossa. Tehtävässä voidaan käyttää approksimaatiota $m = A \cdot u$.

Tehtävä 8

Plutonium ${}^{238}\text{Pu}$ emittoi alfahiukkasen, jonka energia on noin 5.5 MeV.

a. Laske tämän alfahiukkasen nopeus klassisen fysiikan keinoin ja arvioi, voidaanko alfahiukkasta pitää epärelativistisena. Alfahiukkasen massa on 4.002603 u.

b. Montako grammaa ${}^{238}\text{Pu}$:ia tarvitaan tuottamaan 50 W:n lämpöenergia? Oletetaan, että jokainen ${}^{238}\text{Pu}$:n hajoaminen tuottaa 5.5 MeV:in alfahiukkasen ja jokaisen alfahiukkasen energia muuttuu suoraan lämmöksi.

Vihje: Watin yksikkö on $[W] = \frac{J}{s}$. Laske ensiksi, montako Joulea yksi ${}^{238}\text{Pu}$:n hajoaminen tuottaa (1 eV = $1.602 \cdot 10^{-19}$ J). Muista, että $N = \frac{m}{M} N_{av}$, missä M on nuklidin moolimassa ja $N_{av} = 6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$ on Avogadron vakio.

3.1.2 Beta-hajoaminen

Betahajoamisessa radioaktiivinen ydin emittoi betahiukkasen sekä betahiukkasta vastaavan neutriinon tai antineutriinon. Betahajoaminen voi tapahtua spontaanisti kolmella tavalla:

1. β^- -hajoaminen, jossa ydin A_ZX emittoin (β^-)-hiukkasen, eli elektronin, sekä antineutriinon $\bar{\nu}_e$ kaavan

$${}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z+1}Y + \beta^- + \bar{\nu}_e \quad (18)$$

mukaan.

2. β^+ -hajoamisessa ydin A_ZX emittoi (β^+) -hiukkasen, eli positronin, sekä neutriinon ν_e kaavan

$${}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z-1}Y + \beta^+ + \nu_e \quad (19)$$

mukaan.

Elektronisieppaus on vaihtoehtoinen reaktio β^+ -hajoamiselle. Siinä atomin ydin ”kaappaa” sen elektroniverholta yhden elektronin. Seurauksena ytimen massaluku pienenee yhdellä:

$${}^A_ZX + \beta^- \rightarrow {}^A_{Z-1}Y + \nu_e \quad (20)$$

Q arvot β^- , β^+ -hajoamiselle ja elektronisieppaukselle ovat

$$Q_{\beta^-} = (m({}^A_ZX) - m({}^A_{Z+1}Y))c^2 \quad (21)$$

$$Q_{\beta^+} = (m({}^A_ZX) - m({}^A_{Z-1}Y) - 2m_{\beta^-})c^2 \quad (22)$$

ja

$$Q_{EC} = (m({}^A_ZX) - m({}^A_{Z-1}Y))c^2 - E_B \quad (23)$$

Termi E_B on elektronin sidosenergia elektronisieppauksessa syntyvässä tytärtytimessä. Betahajoamisessa syntyvä betahiukkanen saa liike-energiansa reaktion Q arvosta. Betahiukkasen liike-energia on jatkuva, eli se voi saada mitä tahansa arvoja väliltä $[0-Q]$.

Tehtävä 9

${}^{196}\text{Au}$ voi hajota sekä β^- , että β^+ -hajoamisella ja elektronisieppauksella. Kirjoita reaktioyhtälöt hajoamisille ja laske betahiukkasen maksimienergia kussakin hajoamisessa. Elektronien sidosenergioita löytyy osoitteesta https://xdb.lbl.gov/Section1/Table_1-1.pdf

Tehtävä 10

a. ${}^{137}\text{Cs}$ emittoi betahiukkasen, jonka maksimienergia on $Q_{\beta^-} = 1175.63$ keV. Laske tämän hiukkasen maksiminopeus klassisen fysiikan keinoin ja arvioi, voidaanko betahiukkasta pitää epärelativistisena. Betahiukkasen massa on $m_{\beta} = 5.48579909 \cdot 10^{-4}$ u.

b. Relativistisen, eli lähellä valonnopeutta liikkuvan hiukkasen, nopeus (v) voidaan laskea yhtälöstä

$$Q_{\beta^-} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} m_e c^2 = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} m_e c^2 \quad (24)$$

Laske elektronin maksiminopeus tätä yhtälöä käyttäen ja arvioi, pitäisikö elektronia käsitellä sittenkin relativistisena hiukkasena.

3.1.3 Gammasiirtymät

Gammasäteily on lyhytaaltoisista sähkömagneettista säteilyä, joka on peräisin atomiydinten viritystilojen purkautumisesta tai elektroni-positroniparien annihilaatiosta. Radioaktiivisen hajoamisen jälkeen tytärtydin on usein virittyneessä tilassa. Tämä viritystilasta purkautuu nopeasti gammafotonina, kun ydin palaa viritystilalta perustilaan.

Kun atomiydin siirtyy viritystilalta i tilalle j , syntyy gammafotoni, jonka energia on

$$E_\gamma = E_i - E_f \quad (25)$$

Tässä E_i ja E_f ovat tilojen i ja j energiat.

Sisäinen konversio on gammasäteilylle vaihtoehtoinen siirtymä. Siinä tytärtyimen viritysentergia siirtyy suoraan sen atomin elektroniin. Tämä saa aikaan elektronin irtoamisen atomista. Irronnut ”konversio-elektroni” saa energiakseen

$$E_e = E_\gamma - E_B \quad (26)$$

missä E_γ on gammafotonin energia ja E_B on konversioelektronin sidosenergia, joka gammafotonilla tulee vähintään olla elektronin irrottamiseksi.

3.2 Ydinreaktiot

Ydinreaktio on prosessi, jossa ydin törmää toisen ytimen tai hiukkasen kanssa muodostaen yhden tai useamman uuden ytimen. Tunnetuimmat ydinreaktiot ovat fuusio ja fissio, jotka esitellään lyhyesti alla.

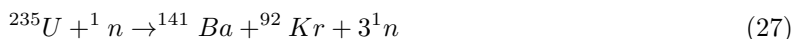
3.2.1 Fissio

Fissiossa raskas atomiydin hajoaa kahdeksi tai useammaksi pienemmäksi tytärtimeksi vapauttaen energiaa ja mahdollisesti muita hiukkasia. Energia on ns. sidosenergiaa, sen määrä vastaa reaktion alku- ja lopputuotteiden välistä massavajetta. Fissiossa syntyvät tytärtyimet ovat aina radioaktiivisia.

Fissio voidaan jakaa spontaaniin ja indusoituun fissioon. Spontaani fissio tapahtuu itsestään ilman ulkoisia voimia. Indusoidussa fissiossa fissio tuotetaan keinotekoisesti pommittamalla emoydintä am-mushiukkasilla, tavallisesti protoneilla tai neutroneilla.

Tehtävä 11

Ydinenergian tuotto perustuu indusoituun fissioon ^{235}U -ytimessä neutronien avulla. Laske Q arvo reaktiolle:



Reaktiotuotteiden massat ovat $m(^{235}\text{U}) = 235.043931368$, $m(^{141}\text{Ba}) = 140.914402957$, $m(^{92}\text{Kr}) = 91.926173095$ u ja $m({}^1_0\text{n}) = 1.00866491595$ u.

3.2.2 Fuusio

Fuusioreaktio on fissiolle käänteinen ydinreaktio, jossa kaksi kevyttä ydintä yhdistyy yhdeksi raskaammaksi ytimeksi. Samalla vapautuu energiaa sekä usein myös protoneita ja neutroneita.

Tehtävä 12

Laske kynnysenergia ydinreaktiolle:



Tehtävä 13

Tähden energiantuotto perustuu sen keskustassa tapahtuviin fuusioreaktioihin. Eräs näistä reaktioista on hiilisykli (CNO-sykli), jossa vety fuusioituu hiilen avulla heliumiksi yhtälöiden

$$^{12}\text{C} + ^1\text{H} \rightarrow ^{13}\text{N} + \gamma \quad (29)$$

$$^{13}\text{N} \rightarrow ^{13}\text{C} + e^+ + \nu_e \quad (30)$$

$$^{13}\text{C} + ^1\text{H} \rightarrow ^{14}\text{N} + \gamma \quad (31)$$

$$^{14}\text{N} + ^1\text{H} \rightarrow ^{15}\text{O} + \gamma \quad (32)$$

$$^{15}\text{O} \rightarrow ^{15}\text{N} + e^+ + \nu_e \quad (33)$$

$$^{15}\text{N} + ^1\text{H} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^4\text{He} \quad (34)$$

mukaan. Laske tästä hiilisyklistä vapautuva energia.

4 Vastauksia tehtäviin

Tehtävä 1

Nukleonin lukumäärätiheys saadaan massaluvun ja ytimen tilavuuden avulla yhtälön

$$\rho(^AX) = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (35)$$

mukaisesti. Ytimen AX säteeksi voidaan arvioida yhtälöä (2) käyttäen $R = R(^AX) = R_0 A^{1/3}$. Saadaan

$$\rho(^AX) = \frac{3A}{4\pi(R_0 A^{1/3})^3} = \frac{3A}{4\pi A R_0^3} = \frac{3}{4\pi R_0^3}, \quad (36)$$

mistä huomataan, että $\rho(^AX)$ ei riipu ytimen massaluvusta.

Tehtävä 2

$$\text{i) } 1 \text{ u} = 1.66053907 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 931.49 \frac{\text{MeV}}{c^2} \rightarrow 1 \text{ kg} = \frac{931.49 \frac{\text{MeV}}{c^2}}{1.66053907 \cdot 10^{-27}}$$

$$m(^{208}\text{Pb}) = 3.4535 \cdot 10^{-25} \text{ kg} = 3.4535 \cdot 10^{-25} \cdot \frac{931.49 \frac{\text{MeV}}{c^2}}{1.66053907 \cdot 10^{-27}} \approx 193726.3 \frac{\text{MeV}}{c^2}.$$

$$\text{ii) } 1 \text{ u} = 931.49 \frac{\text{MeV}}{c^2} \rightarrow \frac{\text{MeV}}{c^2} = \frac{u}{931.49}$$

$$m(^{208}\text{Pb}) = 193726.3 \frac{\text{MeV}}{c^2} = 193726.3 \cdot \frac{u}{931.49} \approx 207.974628 \text{ u}.$$

Tehtävä 3

$^{235}_{92}\text{U}$: sidosenergiaksi saadaan yhtälöä (3) käyttäen:

$$B(^{235}_{92}\text{U}) = (92 \cdot m(^1\text{H}) + (235 - 92) \cdot m_n - m(^{235}_{92}\text{U}))c^2$$

$$B(^{235}_{92}\text{U}) = (92 \cdot 1.00782503223 \text{ u} + 143 \cdot 1.00866491595 \text{ u} - 235.043931368 \text{ u}) \cdot 931.49 \frac{\text{MeV}}{u} \approx 1783 \text{ MeV}.$$

$^{235}_{92}\text{U}$:n protoni- ja neutroniluvut ovat molemmat parillisia, joten yhtälö (4) tulee muotoon:

$$B(^{235}_{92}\text{U}) = 15.5 \cdot 235 - 16.8 \cdot 235^{2/3} - 0.72 \cdot \frac{92(92-1)}{235^{1/3}} - 23 \cdot \frac{(235-2 \cdot 92)}{235} + 34 \cdot 235^{-3/4} \approx 1772 \text{ MeV}.$$

Yhtälöt (3) ja (4) antavat lähes samat tulokset, joten semi-empiristä massakaavaa voidaan pitää hyvänä approksimaationa.

Tehtävä 4

Yhtälöä (4) käyttäen:

$$B(^{208}\text{Pb}) = [82 \cdot m(^1\text{H}) + (208 - 82) \cdot m_n - m(^{208}\text{Pb})]c^2 = 1636.4238... \text{ MeV} \approx 1636.4 \text{ MeV}$$

$$B(^{209}\text{Pb}) = [82 \cdot m(^1\text{H}) + (209 - 82) \cdot m_n - m(^{209}\text{Pb})]c^2 = 1640.361129... \text{ MeV} \approx 1640.4 \text{ MeV}$$

$$S_n(^{209}\text{Pb}) = B(^{209}\text{Pb}) - B(^{208}\text{Pb}) = 3.937329... \text{ MeV} \approx 3.94 \text{ MeV}$$

Yhtälöä (5) käyttäen:

$$B(^{208}\text{Pb}) = 15.5 \cdot 208 - 16.8 \cdot 208^{2/3} - 0.72 \cdot \frac{82(82-1)}{208^{1/3}} - 23 \cdot \frac{(208-2 \cdot 82)}{208} + 34 \cdot 208^{-3/4} = 1613.6407... \text{ MeV} \approx 1613.6 \text{ MeV}.$$

$$B(^{209}\text{Pb}) = 15.5 \cdot 209 - 16.8 \cdot 209^{2/3} - 0.72 \cdot \frac{82(82-1)}{209^{1/3}} - 23 \cdot \frac{(209-2 \cdot 82)}{209} = 1619.1505... \approx 1619.1 \text{ MeV}.$$

$$S_n(^{209}\text{Pb}) = B(^{209}\text{Pb}) - B(^{208}\text{Pb}) = 5.509822... \text{ MeV} \approx 5.5 \text{ MeV}$$

Tehtävä 5

Protoni- ja neutroniluvut säilyvät, joten reaktioyhtälöt tulevat muotoon:

$$^{27}_{13}\text{Al} + ^1_1\text{H} \rightarrow ^{27}_{14}\text{Si} + n \quad (37)$$

$$^{32}_{14}\text{Si} + \alpha \rightarrow ^{36}_{16}\text{S} + \gamma \quad (38)$$

$$^{197}_{79}\text{Au} + ^{12}_6\text{C} \rightarrow ^{205}_{83}\text{At} + \alpha \quad (39)$$

$$^{56}_{28}\text{Ni} + ^1_1\text{H} \rightarrow ^{57}_{29}\text{Cu} + \gamma \quad (40)$$

Lasketaan Q arvot yhtälöä (11) käyttäen. Q arvot reaktioyhtälöille (37)-(40) ovat -5.5947 MeV, 9.0114 MeV, 1544.6593 MeV ja 0.6903 MeV. Yhtälön (37) mukainen reaktio on endoerginen. Sitä vastaavaksi kynnysenergiaksi saadaan yhtälöä (12) käyttäen:

$$E_{th} = -Q(1 + \frac{m(^1_1\text{H})}{m(^{27}_{13}\text{Al})}) \approx -(-5.5947 \text{ MeV}) \cdot (1 + \frac{1}{27}) \approx 5.8 \text{ MeV}.$$

Yhtälöiden (38)-(40) mukaiset reaktiot ovat eksoergisia, koska niiden Q arvot ovat positiiviset.

Tehtävä 6

Yhtälöitä (8) ja (10) käyttäen saadaan aktiivisuuksiksi

$$N_{La}(t) = \frac{A_0}{\lambda_{Ba}} \frac{\lambda_{Ba}}{\lambda_{La} - \lambda_{Ba}} (e^{-\lambda_{Ba}t} - e^{-\lambda_{La}t}) \quad (41)$$

$$A_{La}(t) = \lambda_{La} N_{La}(t) = \frac{A_0}{\lambda_{Ba}} \frac{\lambda_{Ba}}{\lambda_{La} - \lambda_{Ba}} (e^{-\lambda_{Ba}t} - e^{-\lambda_{La}t}) \quad (42)$$

$$\frac{A_{La}}{A_{Ba}} = \frac{\lambda_{Ba}}{\lambda_{La} - \lambda_{Ba}} \frac{e^{-\lambda_{Ba}t} - e^{-\lambda_{La}t}}{e^{-\lambda_{Ba}t}} \quad (43)$$

$$\frac{A_{La}}{A_{Ba}} = \frac{\lambda_{La}}{\lambda_{La} - \lambda_{Ba}} (1 - e^{(-\lambda_{La} + \lambda_{Ba})t}) \quad (44)$$

Pitkän ajan kuluessa ($t \rightarrow \infty$) termi $e^{(-\lambda_{La} + \lambda_{Ba})t} \rightarrow 0$, joten $\frac{A_{La}(t \rightarrow \infty)}{A_{Ba}(t \rightarrow \infty)} = \frac{\lambda_{La}}{\lambda_{La} - \lambda_{Ba}} \approx 1.13$.

Tehtävä 7

Reaktion Q arvo voidaan laskea yhtälöä (8) käyttäen:

$$Q[MeV] = (m(^{238}U) - m(^{234}Th) - m(^4He))c^2 \approx 4.267 \quad (45)$$

Emoydin on hajotessaan levossa. Liikemäärä säilyy systeemissä, joten

$$\vec{p}_U = \vec{p}_\alpha + \vec{p}_{Th} = \vec{0} \quad (46)$$

Reaktiotuotteet lähtevät vastakkaisiin suuntiin, joten:

$$p_\alpha - p_{Th} = 0 \quad (47)$$

$$m_\alpha v_\alpha = m_{Th} v_{Th} \quad (48)$$

$$v_\alpha = \frac{m_{Th} v_{Th}}{m_\alpha} \quad (49)$$

Myös energia säilyy alfahajoamisessa. Reaktiotuotteet saavat liike-energiansa reaktiossa vapautuvasta energiasta:

$$K_\alpha + K_{Th} = Q \quad (50)$$

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_{Th} v_{Th}^2 = Q \quad (51)$$

Sijoittamalla yhtälö (22) yhtälöön (24) saadaan

$$\frac{1}{2} m_\alpha \left(\frac{m_{Th} v_{Th}}{m_\alpha} \right)^2 + \frac{1}{2} m_{Th} v_{Th}^2 = Q \quad (52)$$

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \left(\frac{m_{Th}}{m_\alpha} + 1 \right) \approx K_{Th} \left(\frac{234}{4} + 1 \right) = Q \quad (53)$$

$$K_{Th} = \left(\frac{4}{238} \right) Q \quad (54)$$

Tästä saadaan ratkaistuksi $v_{Th} = \sqrt{\frac{2K_{Th}}{m_{Th}}} \approx 172 \frac{m}{s}$. Alfahiukkaselle $K_\alpha = Q - K_{Th} \approx 4.2$ MeV ja $v_\alpha = \sqrt{\frac{2K_\alpha}{m_\alpha}} \approx 10 \frac{km}{s}$.

Tehtävä 8

a. $E = \frac{1}{2}mv^2 = 5.5 \text{ MeV} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m_\alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5.5 \text{ MeV}}{4.002603 \cdot 931.49 \frac{\text{MeV}}{c^2}}} \approx 0.007 \text{ c}$. Tämä on selkeästi alle valonnopeuden, joten 5.5 MeVin alfahiukkasta voidaan pitää epärelativistisena.

b. Yksi ^{238}Pu :n hajoaminen tuottaa 5.5 MeV, joten 50 W:n tehon saavuttamiseksi on sekunnissa tapahtuttava $\frac{50 \text{ J}}{5.5 \text{ MeV}} = \frac{50 \text{ J}}{5.5 \cdot 10^6 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}}} \approx 5.6747 \cdot 10^{13}$ hajoamista. Tämä vastaa siis aktiivisuutta $A = 5.6747 \cdot 10^{13} \text{ Bq}$.

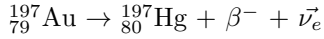
Määritetään vaadittava ^{238}Pu :n massa aktiivisuuden kaavasta

$$A = \lambda(^{238}\text{Pu})N(^{238}\text{Pu}) = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}(^{238}\text{Pu})} \frac{m(^{238}\text{Pu})}{M(^{238}\text{Pu})} N_{av} \quad (55)$$

^{238}Pu :lle $M(^{238}\text{Pu}) \approx 238 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ ja $T_{1/2} = 87.7$ vuotta. Massaksi $m(^{238}\text{Pu})$ saadaan noin 88 g.

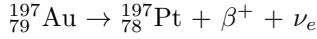
Tehtävä 9

β^- -hajoaminen:



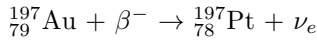
$$Q_{\beta^-} = (m(^{197}_{79}\text{Au}) - m(^{197}_{80}\text{Hg}))c^2 \approx 0.687 \text{ MeV}$$

β^+ -hajoaminen:



$$Q_{\beta^+} = (m(^{197}_{79}\text{Au}) - m(^{197}_{78}\text{Pt}) - 2m_e)c^2 \approx 0.484 \text{ MeV}$$

Elektronisieppaus (EC):



$$Q_{EC} = (m(^{197}_{79}\text{Au}) - m(^{197}_{78}\text{Pt}))c^2 - B_e(\text{Pt}) \approx 1.506 \text{ MeV} - B_e(\text{Pt})$$

K-kuoren elektronin sidosenergia Pt:ssa on 78.395 keV, joten

$$Q_{EC} = 1506 \text{ keV} - 78.395 \text{ keV} \approx 1428 \text{ keV} = 1.428 \text{ MeV}.$$

Tehtävä 10

a. Klassisen fysiikan mukaan $E = \frac{1}{2}mv_\beta^2 = 1.17563 \text{ MeV}$

$$\rightarrow v_\beta = \sqrt{\frac{2E}{m_\beta}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.17563 \text{ MeV}}{5.48579909 \cdot 10^{-4} \cdot 931.49 \frac{\text{MeV}}{c^2}}} \approx 6.44 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2.15 \text{ c}.$$

Tämä ei ole mahdollista, sillä mikään hiukkanen ei voi kulkea valoa nopeammin.

b.

$$Q_{\beta^-} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} m_\beta c^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} m_\beta c^2 \quad (56)$$

$$\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} = \frac{m_\beta c^2}{Q_\beta} \quad (57)$$

$$1 - \left(\frac{v}{c}\right) = \left(\frac{m_\beta c^2}{Q_\beta}\right)^2 \quad (58)$$

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \left(\frac{m_\beta c^2}{Q_\beta}\right)^2 \quad (59)$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_\beta c^2}{Q_\beta}\right)^2} \quad (60)$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{5.48579909 \cdot 10^{-4} \cdot 931.49 \text{ MeV}}{1.17564 \text{ MeV}}\right)^2} \approx 0.9 \quad (61)$$

Elektroni on siis relativistinen, koska sen nopeus on 90 % valonnopeudesta. Kuten a-kohdasta huomataan, ei elektronin nopeutta voida määrittää klassisen fysiikan keinoin.

Tehtävä 11

Yhtälöä (11) käyttäen:

$$Q[\text{MeV}] = (m_i - m_f)c^2 \quad (62)$$

$$Q[\text{MeV}] = (m(^{235}\text{U}) + m_n - m(^{141}\text{Ba}) - m(^{92}\text{Kr}) - 3m_n) \approx 173.28 \quad (63)$$

Tehtävä 12

Q-arvo:

$$Q[\text{MeV}] = (m(^4\text{He}) + m(^{14}\text{N}) - ^{17}\text{O} - ^1\text{H})c^2 \approx -1.1919 \quad (64)$$

Kynnysenergia:

$$E_{th}[\text{MeV}] = -Q[\text{MeV}]\left(1 + \frac{m(^4\text{He})}{m(^{14}\text{N})}\right) \approx 1.5324 \quad (65)$$

Tehtävä 13

Lasketaan Q arvot yhtäläiden (29)-(34) mukaisille reaktioille:

$$(29): Q_1 = (m(^{12}\text{C}) + m(^1\text{H}) - m(^{13}\text{N}))c^2 = 1.95 \text{ MeV}$$

$$(30): Q_2 = (m(^{13}\text{N}) - m(^{13}\text{C}) - 2m_e)c^2 = 2.22 \text{ MeV}$$

$$(31): Q_3 = (m(^{13}\text{C}) + m(^1\text{H}) - m(^{14}\text{N}))c^2 = 7.54 \text{ MeV}$$

$$(32): Q_4 = (m(^{14}\text{N}) + m(^1\text{H}) - m(^{15}\text{O}))c^2 = 7.35 \text{ MeV}$$

$$(33): Q_5 = (m(^{15}\text{O}) - m(^{15}\text{N}) - 2m_e)c^2 = 2.75 \text{ MeV}$$

$$(34): Q_6 = (m(^{15}\text{N}) + m(^1\text{H}) - m(^{12}\text{C}) - m(^4\text{He}))c^2 = 4.96 \text{ MeV}$$

Hiilisyklistä vapautuva kokonaisenergia: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 \approx 26.73 \text{ MeV}$