

Tehtävä 1. Tutkitaan pyöreää ja homogeenista taivaankappaletta, jonka massa on M ja säde R . Laske, kuinka suuri on pakonopeus, eli pienin mahdollinen nopeus, jolla taivaankappaleen pinnalta lähtevä kappale pääsee gravitaatiokentästä vapaaksi. Taivaankappale ei pyöri ja lähtevään kappaleeseen kohdistuu (moottorin tai muun) työntövoima vain hyvin lyhyen aikaa sen lähtiessä liikkeelle.

Ratkaise R , jos pakonopeus on valonnopeus c . Jos taivaankappaleen säde on tätä sädettä pienempi, kappaletta sanotaan mustaksi aukoksi. Miksi?

Vaikka emme ottaneet suhteellisuusteoriaa lainkaan huomioon, saimme täsmälleen suhteellisuusteorian ennustaman tuloksen tälle kriittiselle säteelle, joka tunnetaan tavallisesti Schwarzschildin säteenä¹. Jos kappaleen massa on tätä pienemmän säteen sisässä, kaikki aine ja valo putoaa vääjäämättä yhä lähemmäksi massakeskipistettä.

Arvioi, kuinka suuri on sinun omaa massaasi vastaava Schwarzschildin säde ja totea, ettet ole vielä lähelläkään luhistumista – eikä kyllä kukaan muukaan.

Ratkaisu: Tutkitaan m -massaista kappaletta, joka lähtee taivaankappaleen pinnalta nopeudella v sen keskipisteestä pois päin. Sen potentiaalienergia on $-GMm/R$ (merkitseen Newtonin gravitaatiovakiota nyt G :llä; kaarevuustensoriin ei tarvitse tässä koskea) ja liike-energia $\frac{1}{2}mv^2$. Kaukana taivaankappaleen pinnalta potentiaalienergia on nolla ja liike-energia $\frac{1}{2}mu^2$, jos u on loppunopeus. Energian säilymlaki kertoo, että $GMm/R = \frac{1}{2}m(v^2 - u^2)$. Tämän yhtälön oikea puoli on korkeintaan $\frac{1}{2}mv^2$, joten $GMm/R \leq \frac{1}{2}mv^2$. Tästä epäyhtälöstä voidaan ratkaista, että on oltava $v \geq \sqrt{2GM/R}$. Siispä $\sqrt{2GM/R}$ on pakonopeus; sitä nopeammin lähtevä kappale pääsee vapaaksi, mutta hitaampi ei (sillä $u^2 \geq 0$).

Toinen hyvin mahdollinen lähestymistapa on tutkia kokonaisenergiaa $E = \frac{1}{2}mv^2 - GMm/R$ taivaankappaleen pinnalla olevalle kappaleelle. Rajatapaus, jossa se on pääsemäisillään vapaaksi, on $E = 0$, mikä johtaa yllä saatuun tulokseen. Huomaa, että taivaankappaleen pinnalta pääsee helpoiten pakoon lähtemällä siitä suoraan pois päin, joten minkäänlaista pyörimisliikettä ei ole tarpeen tutkia. Pakonopeus on eri asia kuin nopeus, jolla taivaankappaletta voisi kiertää ympyräradalla vain hieman pinnan yläpuolella. (Tällöin gravitaatio aiheuttaa keskeiskiihtyvyyden, joten $GMm/R^2 = ma = mv^2/R$, mistä tulee $v = \sqrt{GM/R}$. Tätä ei kuitenkaan tässä haettu.)

Jos $\sqrt{2GM/R} = c$, niin $R = 2GM/c^2$. Jos taivaankappaleen säde on tätäkin pienempi (mutta massa edelleen M), on pakonopeus suurempi kuin valonnopeus. Koska mikään ei liiku nopeammin kuin valo, ei mikään voi päästä pinnalta pakoon. Kun valokaan ei pääse ulos, näyttää kappale mustalta. Ja jos jotain sinne putoaa, se pysyy siellä. Musta aukko on siis varsin kuvaava nimitys.

Tavallisen ihmisen massa on suurin piirtein 100 kg (suuruusluokka-arvio riittää tässä hyvin, eikä tarkoituksenani myöskään ollut selvittää vastaajien massoja), joten sitä vastaava Schwarzschildin säde on $2GM/c^2 \approx 1,5 \times 10^{-25}$ m. Protonin säde on noin 10^{-15} m, joten vaikka pusertaisit itsesi yhden protonin kokoon, et olisi vielä lähelläkään luhistumista mustaksi aukoksi!

¹ Varsinaisesti pitäisi siis käyttää Newtonin mekaniikan sijasta Einsteinin kenttäyhtälöä $G = \frac{8\pi G_N}{c^4}T$, missä Einsteinin kaarevuustensori G kuvaa avaruuden ja ajan kaarevuutta sekä energia-impulssitensori T aineen ja energian liikettä. Newtonin gravitaatiovakio ja valonnopeus ovat G_N ja c . Tämän viattoman näköisen yhtälön ratkaiseminen on hirvittävän työlästä yksinkertaisissakin tilanteissa.