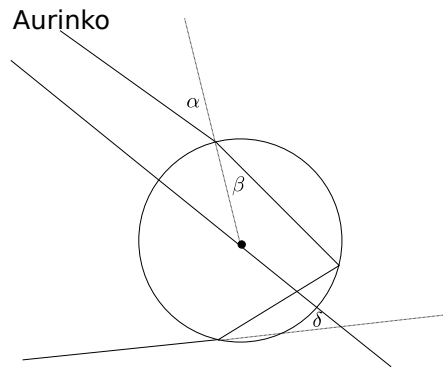




Kuva 1: Valon heijastuminen vesipisarasta



Kuva 2: Kaksi sateenkaarta.

Tehtävä 1. Sateenkaari.

Tarkastellaan sateenkaaren muodostumista, kun auringon valo siroaa ilmassa olevista vesipisaroista. Yritetään ymmärtää ensin, miten valo siroaa yhdestä vesipisarasta, ja tarkastellaan tämän jälkeen todellista tilannetta, jossa ilmassa on suuri määrä pisaroita.

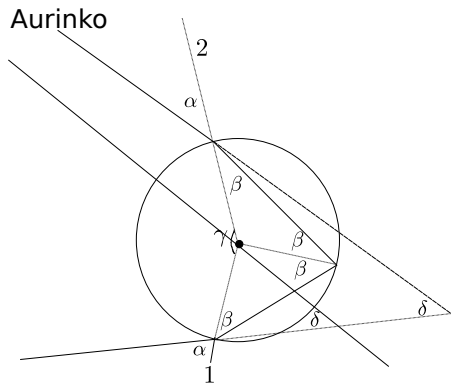
Kuvassa 1 on esitetty auringosta tulevan valonsäteen siroaminen yksittäisestä vesipisarasta. Aurinko on hyvin kaukana, joten pisaraan osuvat valonsäteet ovat käytännössä yhdensuuntaisia. Tarkastellaan valonsädettä, joka ei tule suoraan kohti pisaran keskipistettä, vaan sen tulokulma vesipisaran pinnan normaaliin nähden on α . Osa tästä valosta taibtuu pisaran sisään taitekulmalla β . Tämä valo heijastuu pisaran "takaseinästä", ja taibtuu tämän jälkeen ulos vesipisarasta. Olkoon δ ulosmenevän säteen ja vesipisaran keskipisteestä aurinkoon menevän suoran välinen kuva kuten kuvassa 1.

- Näytä, että $\delta = 4\beta - 2\alpha$.
- Punaiselle valolle veden taitekerroin on $n_p = 1,331$ ja siniselle $n_s = 1,343$. Määritä δ :n suurin mahdollinen arvo $\delta_{\max}$ punaiselle ja siniselle valolle. (Punaiselle $\approx 42,37^\circ$, siniselle $\approx 40,65^\circ$.)
- Piirrä kuva, josta käy ilmi, mihin suuntaan lähtee minkäkin väristä valoa, kun auringon valo osuu ilmassa olevaan vesipisaraan. Ilmaise kuvassa olevat kulmat suhteessa pisaran keskipisteestä aurinkoon menevään suoraan.
- Tarkastellaan sitten tilannetta, jossa ilmassa on useita vesipisaroita. Merkitään ihmisen katseen suunnan (katse pois päin auringosta) ja silmien kohdalta aurinkoon menevän suoran välistä kulmaa θ :lla. Mitä havaitsija näkee, kun θ on pieni? Miten kirkkaus eroaa tilanteesta, jossa θ on suuri? Missä järjestyksessä sateenkaaren eri värit näkyvät?
- Kuvassa 2 näkyy kaksi sateenkaarta samanaikaisesti. Miten selität ilmiön? (laskuja ei vaadita).

Ratkaisu: Katso myös YouTubeista aiheeseen hieman liittyvä luento:

<http://www.youtube.com/watch?v=FJVvtOy-ukE>.

(a)



Vertaa geometria yllä olevassa kuvassa: säteen heijastuskulma on sama kuin tulokulma, joten pisan sisälle muodostuu kaksi identtistä kolmiota. Näiden kolmioiden kolmas kulma on $180^\circ - 2\beta$, joten $\gamma = 4\beta$. Lisäksi koska keskipisteen kautta kulkeva suora ja auringosta tuleva valonsäde ovat yhdensuuntaiset, muodostaa myös tulevan säteen jatke kulman δ ulosmenevän säteen jatkeen kanssa.

Janojen 1 ja 2 välinen kulma on siten $\gamma = 4\beta$, ja kiertämällä molempia suoria kulman α verran kohti sisään tulevaa/ulosmenevää sädettä saadaan suorat, jotka ovat yhdensuuntaiset tulvan/menevän säteen kanssa. Siispä tulevan ja lähtevän säteen välinen kulma $\delta = 4\beta - 2\alpha$.

(b) Taantumislain nojalla (Snellin laki)

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{p,s}, \quad (1)$$

sillä ilman taitekerroin on 1 ja $n_{p,s}$ viittaa taitekertoimeen punaiselle/siniselle valolle. Ratkaisemalla tästä β ja sijoittamalla se δ :n lausekkeeseen saadaan

$$\delta(\alpha) = 4 \sin^{-1}(n_{s,p}^{-1} \sin \alpha) - 2\alpha. \quad (2)$$

Haetaan sitten tämän funktion suurin arvo. Derivoimalla δ :n lauseke saadaan

$$\delta'(\alpha) = -2 + \frac{4 \cos \alpha}{n_{s,p} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n_{s,p}^2}}}. \quad (3)$$

Ääriarvopisteen löytämiseksi tarvitsemme derivaatan nollakohdan/nollakohdat. Nämä saadaan ratkaistua yhtälöstä

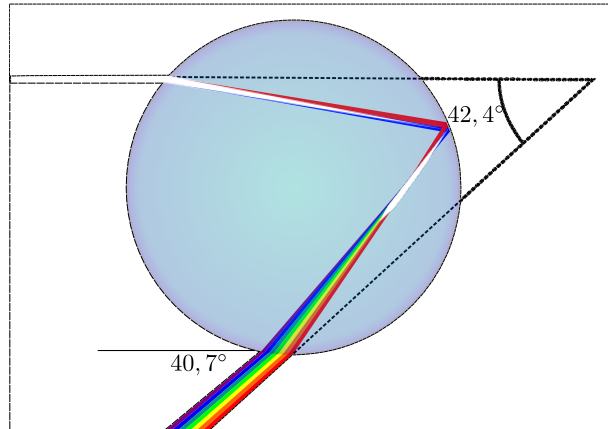
$$\cos \alpha = \frac{1}{2} n_{s,p} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n_{s,p}^2}}, \quad (4)$$

mikä voidaan ratkaista esimerkiksi neliöimällä (koska α on välillä $0 \dots 90^\circ$, ovat yhtälön vasen ja oikea puoli positiiviset) ja kirjoittamalla $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ Ratkaisuna saadaan

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{4} (n_{s,p}^2 - 1). \quad (5)$$

Punaiselle valolle saamme tästä ratkaistua $\alpha_{\max} = 59,5^\circ$ ja siniselle $\alpha_{\max} = 58,8^\circ$. Sijoittamalla ratkaisut δ :n lausekkeeseen saadaan halutut maksimiarvot δ :lle.

(c)

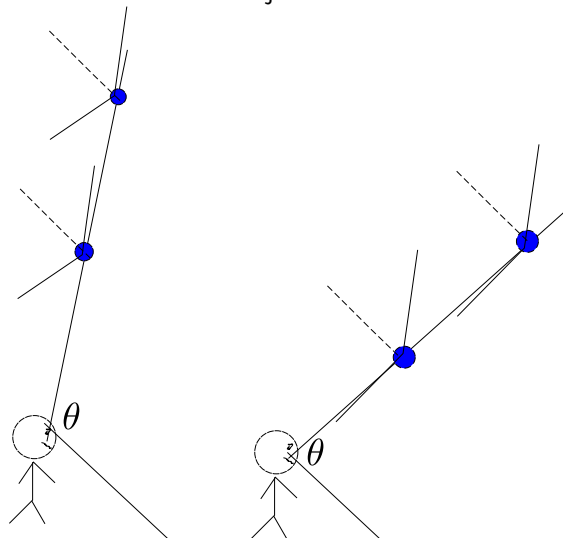


missä aurinko on vaakasuoraan vasemmalle.

- (d) Katseen linjalla olevista pisaroista lähtee valoa vain kartioon, jonka määrää pisarasta aurinkoon menevä suora ja tämän ympärille aukeaa kartio siten, että aukeamiskulma punaiselle valolle on $42,37^\circ$ ja siniselle $40,65^\circ$. Nyt kun katsotaan suurella kulmalla, ei kartioista pääse tulemaan lainkaan valoa katsojan silmään. Kun kulmaa pienennetään, nähdään ensimmäisenä punaista valoa, johon tulee lopulta mukaan muitakin värejä.

Kun katseen ja aurinkoon menevän suoran välinen kulma θ on alle $\sim 40^\circ$, tulee pisaroista kaikenväristä valoa katsojan silmiin, jolloin taivas näyttää kirkkaammalta sateenkaaren alapuolella! (tarkista tämä omilla silmilläsi kun seuraavan kerran näet sateenkaaren; oletko kiinnittänyt tähän ennen huomiota?)

Vertaa oikeeseen kuvaan: siniset pallot kuvaavat vesipisaroita ja katkoviivat osoittavat kohti aurinkoa. vasemmanpuoleisessa kuvassa pisaroista heijastuva valo ei osu katsojan silmään, ja taivas näyttää tummalta. Oikeanpuoleisessa kuvassa nähdään juuri sateenkaaren reuna.



- (e) Tällöin tapahtuu vielä yksi heijastuminen pisteessä, jossa edellä valonsäde taittui ulos pisarasta. Koska suurin osa valosta on tällöin jo poistunut pisarasta, on tämä toinen sateenkari paljon himmeämpi, mutta se on kyllä aina periaatteessa olemassa.