Tehtävä 1. Newtonin toinen laki $\vec{F} = m\vec{a}$ pätee vain, kun kappaleen massa on vakio. Jos kappaleen massa muuttuu, on NII korvattava sen yleisemmällä versiolla

$$\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \vec{F}, \tag{1}$$

tai liikemäärän avulla kirjoitettuna

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}. \tag{2}$$

Huomaa erikoistapauksena, että jos voima F on vakio ja vaikuttaa aikavälin Δt, niin $\Delta\vec{p} = \Delta t\vec{F}$, mikä on lukiomekaniikasta tuttu impulssin ja liikemäärän yhteys.

Tässä siis merkitään liikemäärän derivaattaa ajan suhteen muodossa $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = \vec{p}'(t)$. Tarkastellaan tästä lähtien liikettä yhdessä ulottuvuudessa, jolloin voidaan unohtaa vektorimerkit, $\vec{p} = p$. Huomaa yhteys derivaatan geometriseen tulkintaan, sillä nyt $\mathrm{d}p$ on liikemäärän pieni muutos, kun aikaa kuluu pieni aikaväli $\mathrm{d}t$. Tämä suhdehan on käyrän $p = p(t)$ kulmakerroin (p, t)-tasossa.[1] Kertaa tarvittaessa derivaattaa ja differentiaaliyhtälöitä olympiavalmennuksen kotisivulta (www.jyu.fi/ipho/valmennus) löytyvästä Matemaattisia menetelmiä -luentomonisteesta.

Tarkastellaan nyt avaruusrakettia, joka kiertää maapalloa korkeudella h ympyräradalla. Raketti halutaan ampua pois maapallon vetovoiman vaikutuspiiristä, jolloin sen nopeus tulee kasvattaa pakonopeutta suuremmaksi[2]. Raketin ja polttoaineen massa on aluksi M_0, ja se kiihdyttää pakonopeuteen käyttämällä rakettimoottoria, josta purkautuu pakokaasua vakionopeudella u.

(a) Mikä on raketin nopeus $v_0 = v(t = 0)$ aluksi sen ollessa ympyräradalla korkeudella h?

(b) Kuinka suuri nopeus raketilla tulee olla, jotta se voi poistua maapallon painovoimakentästä?

(c) Tarkastellaan raketin kiihtymistä ajanhetkien t ja $t + \mathrm{d}t$ välillä (nyt siis $\mathrm{d}t$ on pieni aikaväli). Voimme tarkastella rakettia ja pakokaasua kokonaisuutena, johon ei kohdistu ulkoisia voimia, joten kokonaisliikemäärä P on vakio. Kun tarkasteltava aikaväli on pieni, voimme ajatella, että raketista poistuu yksi pakokaasualkio ja laskemme, miten se vaikuttaa raketin liikkeeseen.

Tarkastelujakson aluksi raketin nopeus on $v(t)$ ja massa $m(t)$. Tarkastelujakson aikana raketin nopeus kasvaa $\mathrm{d}v$:n verran ja massa vähenee $\mathrm{d}m$:llä (eli raketista poistuu pakokaasua massan $\mathrm{d}m$ verran).

Alkutilassa meillä ei ole pakokaasualkiota, joten systeemin kokonaisliikemäärä on $P(t) = m(t)v(t)$. Kirjoita koko järjestelmän liikemäärä lopuksi, $P(t + \mathrm{d}t)$, eli liikemäärä sen jälkeen, kun $\mathrm{d}m$-massainenpakokaasualkio on poistunut raketista raketin suhteen nopeudella u.

(d) Kun tarkasteltava aikaväli $\mathrm{d}t$ on lyhyt, ovat muutokset $\mathrm{d}v$ ja $\mathrm{d}m$ pieniä, joten muotoa $\mathrm{d}v \cdot \mathrm{d}m$ olevat termit voidaan jättää huomiotta (tarkemmin, esimerkiksi $|v(t)\mathrm{d}m| \gg |\mathrm{d}v\mathrm{d}m|$). Näytä, että nyt liikemäärän muutos on

$$\mathrm{d}P = P(t + \mathrm{d}t) - P(t) = m\mathrm{d}v + u\mathrm{d}m. \tag{3}$$

[1] Matematiikan kurssilta saattaa olla tuttu derivaatan määritelmä erotusosamäärän raja-arvona: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, joka siis on muotoa "$f$:n muutos"/"$x$:n muutos".

[2] Raketti voi toki poistua maan vetovoimakentästä myös kävelyvauhtia, mutta käytännössä paras tapa (kun huomioidaan käytettävissä oleva rajallinen polttoainemäärä) on kiihdyttää raketti ripeästi sopivalle radalle ja sammuttaa moottorit.

(e) Yhtälön (2) mukaisesti nyt $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t = 0$, koska rakettiin ei kohdistu ulkoisia voimia (gravitaatio on paljon heikompi kuin tehokkaan rakettimoottorin aiheuttama voima kiihdytyksen aikana, joten se voidaan jättää huomiotta). Siten yhtälön (3) nojalla (miksi?)

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}. \tag{4}$$

Tämä yhtälö on niin sanottu differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisuna saadaan raketin nopeusfunktio $v(t)$ kun alkuehto, eli nopeus hetkellä $t = 0$, tunnetaan. Totea, että yhtälön ratkaisufunktio on

$$v(t) = v_0 + u\ln\frac{M_0}{m(t)}. \tag{5}$$

Jos differentiaaliyhtälöiden käsittely on tuttua, voit myös ratkaista suoraan alkuperäisen differentiaaliyhtälön.

(f) Ylläoleva päättely olettaa, että pakokaasua poistuu vakiomassa aikayksikössä, ts. $m(t) = M_0 - kt$ jollakin k. Hahmottele funktion $v(t)$ käytös ajan hetkestä $t = 0$ lähtien. Miksi ratkaisufunktio käyttäytyy järjettömästi kun $t \to \infty$?

(g) Asetetaan nyt $m_0 = 500\ \mathrm{kg}$ massainen luotain maan kiertoradalle ja halutaan ampua se pois maan vetovoimakentästä. Kuinka paljon polttoainetta tarvitaan? Rakettimoottorista purkautuvan pakokaasun nopeus on tyypillisesti suuruusluokkaa $u = 2\ \mathrm{km/s}$.

Ratkaisu:

(a) Olkoon maan säde R ja massa M ja raketin (massa m) korkeus maan pinnalta mitattuna h. Raketin ollessa ympyräraradalla painovoima $F = GmM/(R+h)^2$ saa aikaan keskeiskiihtyvyyden $a = v^2/r$, joten Newtonin II lain nojalla $F = ma = mv^2/r$, josta

$$v = \sqrt{\frac{GMr}{(R+h)^2}} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}, \tag{6}$$

koska $r = R + h$.

(b) Aluksi raketin potentiaalienergia gravitaatiokentässä on $E_p = -GmM/(R+h)$. Raketilla tulee olla niin suuri nopeus, että se pääsee äärettömän kauas maapallolta, jolloin $E_p = 0$. Rajanopeus, jolla raketti nipin napin pääsee pois maapallon painovoimakentästä (eli jolloin nopeus$\to\ \infty$ äärettömän kaukana), saadaan energian säilymislailla: $1/2mv^2 = GmM/(R+h)$, josta ratkeaa

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}}. \tag{7}$$

(c) Pakokaasun nopeus maan pinnalla olevassa (tai missä tahansa ulkopuolisen havaitsijan) koordinaatistossa on $v(t) - u$ (huomaa, että nyt $u > 0$). Merkitään raketin massan muutosta $\mathrm{d}m$:llä, jolloin raketin massa kiihdytyksen jälkeen on $m + \mathrm{d}m$ (valitaan $\mathrm{d}m < 0$, koska massa vähenee). Nyt $P(t + \mathrm{d}t) = (m(t) + \mathrm{d}m)(v(t) + \mathrm{d}v) - \mathrm{d}m(v(t) - u)$. Tässä viimeinen miinusmerkki johtuu siitä, että pakokaasualkion massa on $|\mathrm{d}m| = -\mathrm{d}m$.

(d) Koska rakettiin ei vaikuta ulkoisia voimia (kiihdytyksen aikana gravitaatio voidaan jättää huomiotta), on oltava $P(t + \mathrm{d}t) - P(t) = 0$. Tästä saadaan

$$\mathrm{d}P = P(t + \mathrm{d}t) - P(t) = m(t)\mathrm{d}v + u\mathrm{d}m - \mathrm{d}v\mathrm{d}m, \tag{8}$$

missä $\mathrm{d}v\mathrm{d}m \approx 0$, $\mathrm{d}v$ ja $\mathrm{d}m$ ovat pieniä, jotan tämä tulo on korkeampaa kertalukua (pienten lukujen potensseissa) kuin muut yhtälön termit.

(e) Koska $\mathrm{d}P = 0$, on oltava

$$0 = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = m(t)\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + u\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{9}$$

mistä seuraa haluttu yhtälö (4).

Helpoin tapa ratkaista tällainen differentiaaliyhtälö on ratkaista suoraan yhtälö (8) asettalla $\mathrm{d}P = 0$ (katso matemaattisten menetelmien luentomateriaalia valmennuksen kotisivulta, (8) on separoituva differentiaaliyhtälö kun sijoitetaan $\mathrm{d}P = 0$) kirjoittamalla

$$\mathrm{d}v(t) = -u\frac{\mathrm{d}m}{m(t)}. \tag{10}$$

Integroimalla tämä puolittain saadaan

$$v(t) = -u\int\frac{\mathrm{d}m}{m(t)} = -u\ln m(t) + C, \tag{11}$$

missä C on integroimisvakio joka kiinnitetään alkuehdosta $v(t = 0) = v_0$. Tästä saadaan

$$C = v_0 + u\ln m(0) = v_0 + u\ln M_0 \tag{12}$$

jolloin

$$v(t) = -u\ln m(t) + u\ln M_0 + v_0 = v_0 + u\ln\frac{M_0}{m(t)}. \tag{13}$$

Todetaan vielä, että annettu ratkaisufunktio todella toteuttaa yhtälön (4):

$$m(t)\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = m(t)v'(t) = m(t)(v_0 + u\ln M_0 - u\ln m(t))' = -um(t)\frac{m'(t)}{m(t)} = -um'(t). \tag{14}$$

(f) Kaikkia lähtöarvoja ei oltu annettu tarkoituksella: ongelmia ratkaistaessa on monesti tärkeää osata arvioida järkevät lukuarvot joilla voi vähintäänkin varmistaa, onko saatu tulos järkevä.

Avaruuden rajana pidetään yleisesti n. 100 km korkeutta, joten asetetaan $h = 100\ \mathrm{km}$. Tällöin raketin nopeus aluksi saadaan yhtälöstä (6) ja nopeus, johon luotain on kiihdytettävä, yhtälöstä (7) (ajatellaan siis että luotaimeen kuuluu osana rakettimoottori jolla se kiihdyttää pois maan vetovoimakentästä). Olkoon polttoaineen massa m_p, jolloin kokonaismassa aluksi on $M_0 = m_0 + m_p$. Nyt m_p voidaan ratkaista yhtälöstä (13), sillä tiedämme, että $m(t = 0) = m_0 + m_p$ ja $m(t \to \infty = m_0)$, jolloin

$$\Delta v = v(t \to \infty) - v(t = 0) = u\ln\frac{m_0 + m_p}{m_0} + u\ln\frac{m_0 + m_p}{m_0 + m_p} = u\ln\frac{m_0 + m_p}{m_0}, \tag{15}$$

josta saamme

$$m_p = m_0 \left(e^{\Delta v/u} - 1\right), \tag{16}$$

mistä saamme myös luotaimen kokonaismassan aluksi,

$$M_0 = m_0 + m_p = m_0 e^{\Delta v/u}. \tag{17}$$

Toisaalta yhtälöistä (7) ja (6) saamme suoraan $\Delta v = 3250\ \mathrm{m/s}$. Siispä

$$M_0 = 2540\ \mathrm{kg} \Rightarrow m_p = 2040\ \mathrm{kg}. \tag{18}$$