

Tehtävän ratkaisu ei ole vaikea, mutta vaatii lukiofysiikan ylittävää tietämystä ja perustuu kilpailutehtäville varsin tyypilliseen tapaan tehtävätyypille ominaisen kikan käyttöön. Tehtävä on näin ollen erittäin hyvä esimerkki kilpailutehtävästä. Valinta oli valmennuksen kannalta erittäin onnekas, sillä tehtävän (b)-kohta esiintyi sellaisenaan kyseisen vuoden olympiatehtävässä.

Osoittaksemme valmennustehtävien hyödyllisyyden, valitsemme vuoden 2010 valmennuskirjeessä esiintyneen potentiaaliongelman:

Tehtävä 1. Määritä kentän muoto seuraavissa tapauksissa.

(a) pistevaraus q etäisyydellä d maadoitetusta johdetasosta

(b) pistevaraus q etäisyydellä d R -säteisen maadoitetun johdepallon keskipisteestä.

Riittää antaa tilannetta vastaava tunnettu varausjakauma. (Vihje: peilivarausyrite)

Ratkaisu:

Tehtävän ratkaisu perustuu vinkin mukaiseen peilivaraustemppuun. Peilivarausten menetelmässä etsitään kentän muoto sijoittamalla tilanteeseen kuviteltuja peilivarauksia, jotka yhdessä aidon varauksen kanssa antavat reunaehdot toteuttavan potentiaalilin. Koska reunaehdot toteuttava potentiaali on yksikäsitteinen, saadaan tehtävän ratkaisu keksiä mielivaltaisella tavalla.

(a) Tämä on varsin helppo arvata. Sijoitetaan levyn vastakkaiselle puolelle varaus $-q$ etäisyydelle d . Tode-
taan, että tämä antaa sähkökentän, joka on kohtisuorassa levyä vastaan. Lisäksi levyn potentiaali on
nolla. Tarkimpien sensoreiden iloksi voimme tarkastaa myös äärettömyyteen sijoitetun kuvitteellisen
reunan saavan potentiaalilin 0.

(b) Voimme arvata peilivarauksen sijaitsevan toisella puolella pallon pintaa pallon keskipisteen ja varauksen
yhdistysjanelle.

Olkoon peilivarauksen suuruus q' ja etäisyys b . Potentiaaliksi saadaan

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\|\mathbf{r}-\mathbf{d}\|} + \frac{q'}{\|\mathbf{r}-\mathbf{b}\|} \right) \quad (1)$$

Tarkastellaan potentiaalia pisteissä, joissa yhdistysjana leikkaa pallon. Pisteissä potentiaali saa
muodon

$$\frac{q'}{b-R} + \frac{q}{R-d} = 0 \quad (2)$$

ja

$$\frac{q'}{b+R} + \frac{q}{R+d} = 0 \quad (3)$$

Yhtälöt eivät riipu siitä, onko todellinen varaus pallon sisä- vai ulkopuolella. Tässä varauksen on
ajateltu olevan sisäpuolella, jolloin peilivaraus on sijoitettava ulkopuolelle.

Ratkaistaan ensin peilivarauksen paikka:

$$\frac{q'}{b-R}(R-d) = -q \Rightarrow q' \left(\frac{1}{b+R} - \frac{R-d}{b-R} \frac{1}{d+R} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{b+R} = \frac{R-d}{b-R} \frac{1}{d+R} \Rightarrow \frac{d+R}{b+R} = \frac{R-d}{b-R} \quad (5)$$

Ristiin kertomalla ja sieventämällä saamme ratkaisun

$$b = \frac{R^2}{d} \quad (6)$$

Peilivarauksen suuruus saadaan sijoittamalla:

$$q' = -\frac{q}{R-d}(b-R) = -\frac{q}{R-d} \left(\frac{R^2}{d} - R \right) = -\frac{q}{R-d} \frac{d}{R} \frac{R}{d} \left(\frac{R^2}{d} - R \right) = \quad (7)$$

$$-\frac{q}{R-d} \frac{R}{d} (R-d) = -q \frac{R}{d}$$

Oikeastaan tämä riittäisi, mikäli olemme vakuuttuneita, että yrite on oikeaa muotoa. Ratkaisu on
kiinnitetty, joten sen täytyy olla oikea, jos ongelma on ratkaistavissa yhdellä peilivarauksella.

On kuitenkin hyvä tarkastaa, että ratkaisu antaa oikean potentiaalin kaikkialla.

$$\frac{q}{\|r-d\|} + \frac{q'}{\|r-b\|} = q \left(\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\frac{R}{d}}{\sqrt{(x-\frac{R^2}{d})^2 + y^2 + z^2}} \right) \quad (8)$$

Avataan sulut:

$$q \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2xd + d^2}} - \frac{\frac{R}{d}}{\sqrt{r^2 - 2\frac{R^2}{d}x + \frac{R^4}{d^2}}} \right) \quad (9)$$

Otetaan jälkimmäisen termin osoittaja nimittäjään käänteislukuna

$$q \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2xd + d^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{d^2}{R^2}r^2 - 2xd + R^2}} \right) \quad (10)$$

Jos nyt $r=R$, saadaan $U=0$, eli ehto toteutuu kaikkialla pallon pinnalla. Lisäksi äärettömässä potentiaali on nolla. Näin ollen ratkaisu toteuttaa annetut reunaehdot. Tilanteessa potentiaali ja sähkökenttä saadaan siis oheisesta varausjakaumasta. Todellisuudessa varaus on tietenkin pallon pinnalla, eli pallo polarisoituu. Todellinen varausjakauma voidaan määrittää pelivarauksen avulla saadusta kentästä laskemalla.