

Tehtävä 1. Erilaiset energiaperiaatteet ovat fysiikassa yleisiä. Tutustumme tässä tehtävässä yhteen: Levossa olevan (riittävän nestemäisen) kappaleen pinnalla potentiaalienergiatiheys on vakio. Kappaleen kokonaisenergia on pienimmillään juuri tässä tilanteessa.

Esimerkiksi veden tapauksessa tämä tarkoittaa sitä, että jos annamme veden asettua lasissa paikoilleen ja siirrämme yhtä vesipisaraa veden pinnalla toiseen paikkaan (lepoon), sen kokonaisenergia ei muutu. Tämä johtaa siihen yllätyksyttömään tulokseen, että veden pinta asettuu vaakatasoon. Erikoisemmissa tapauksissa saadaan kuitenkin aikaiseksi erikoisempia muotoja.

- (a) Tarkastellaan m -massaista hiukkasta tasaisesti pyörivässä koordinaatistossa, ja olkoon r sen kohtisuora etäisyys pyörimisakselista. Olkoon tämän koordinaatiston kulmanopeus ω . Jos hiukkanen on tässä pyörivässä koordinaatistossa levossa, kuinka suuri liike-energia K sillä on ulkoisessa koordinaatistossa (jonka suhteen pyörivä koordinaatistomme pyörii)? Entä pyörivässä koordinaatistossa?

Oletetaan, että hiukkasella on ulkoisessa koordinaatistossa mitattuna potentiaalienergia V . Pyörivässä koordinaatistossa levossa olevan hiukkasen potentiaalienergia on $U = V - K$. Perustele, miksi näin on. Jos tämä tuntuu yleisessä tapauksessa vaikealta, voit tarkastella vaikkapa vaakatasossa pyörivää levyä ja sen päällä liikuskelevaa hiukkasesta. Jo erikoistapaus, jossa hiukkanen liikkuu kitkatta (ja siis vakionopeudella) ulkoisessa koordinaatistossa pyörimisakselista pois päin, valottaa pyörivässä koordinaatistossa tarkasteltuna, miksi K :n etumerkki on $-$ eikä $+$.

Jos kappale, jonka pinnan muotoa yritämme selvittää, on levossa pyörivässä koordinaatistossa, täytyy tutkia juuri tässä koordinaatistossa hiukkasella olevaa potentiaalienergiaa U . Kirjoita pyörivässä koordinaatistossamme levossa olevan hiukkasen energian U lauseke suureiden m , ω , r ja V avulla.

Ratkaisu: Pyörivässä koordinaatistossa hiukkanen on paikallaan, joten sen liike-energia on nolla. Ulkoisessa koordinaatistossa se pyörii nopeudella ωr pyörimisakselin ympäri (vakioetäisyydellä r). Tällöin sen liike-energia on $\frac{1}{2}m(\omega r)^2$.

Tarkastellaan pyörivässä koordinaatistossa levossa olevaa hiukkasta. Jotta hiukkanen pysyisi pyörivässä koordinaatistossa paikallaan, on siihen kohdistettava ulkoinen voima. Jos vaikkapa koordinaatisto on piirretty tasaisella kulmanopeudella pyörivän levyn päälle, voi hiukkasen naulata levyyn kiinni. Oletetaan tämä levy niin liukkaaksi, että kaikki vastusvoimat voidaan unohtaa. Jos tätä voimaa ei olisi, ei hiukkanen pysyisi levossa; hiukkaseen vaikuttaa siis pyörivässä koordinaatistossa eräänlainen näennäisvoima, joka työntää sitä pyörimisakselista ulos päin. Tämä on keskipakoisvoima. (Keskipakoisvoima esiintyy siis pyörivässä koordinaatistossa, joka ei ole inertiaalinen eivätkä Newtonin lait siten siellä sellaisinaan päde. Keskipakoisvoiman kumoamiseen tarvitaan keskihakuisvoima, jonka tässä aiheuttaa naula, ja joka vaaditaan pyörivässä koordinaatistossa hiukkasen pitämiseen levossa ja vastaavasti ulkoisessa koordinaatistossa hiukkasen pitämiseen ympyräradalla.)

Jos hiukkasta liikutetaan kauemmas akselista, liikutaan keskipakoisvoiman suuntaan. Kun liikutaan voiman suuntaan, vähenee tähän voimaan liittyvä potentiaalienergia. (Samoin putoava kappale menettää potentiaalienergiaansa.) Potentiaalienergia pyörivässä koordinaatistossa siis vähenee. Sen sijaan ulkoisen koordinaatiston kannalta kulmanopeus pysyy vakiona ja pyörimissäde kasvaa, joten liike-energia kasvaa. Nämä energian muutokset ovat yhtä suuret, kun hiukkanen on siirron alussa ja lopussa levossa (ne ovat sama asia eri koordinaatistoissa). Täten keskipakoisvoimaan

liittyvä potentiaalienergia on $-K$ (pyörivässä koordinaatistossa), missä K on ulkoisessa koordinaatistossa mitattu liike-energia.

Jos hiukkaseen kohdistuu muita voimia (vaikkapa painovoima), niiden potentiaalienergiat käyttäytyvät normaalisti. Siispä $U = V - K = V - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$.

- (b) Tutkitaan nyt hyvin ohutta (mutta kuitenkin korkeaa ja leveää) suorakulmion mallista lasiastiaa, joka on asetettu tasaisella kulmanopeudella ω pyörivän pöydän päälle siten, että pyörimisakseli kulkee astian läpi. Astiaan kaadetaan vettä (mieluiten värjättyä, jotta se näkyy hyvin) ja annetaan sen asettua lepoon astian suhteen. Kun h on pöydän pinnasta mitattu korkeus ja r etäisyys pyörimisakselista, osoita, että veden pinnalla toteutuu yhtälö

$$\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - gh = \text{vakio}. \quad (1)$$

Mihin muotoon veden pinta asettuu? Selkeimmän kuvan tilanteesta antanee korkeuden h esittäminen etäisyyden r funktiona. Hahmottele kuva vedestä astiassa.

Ratkaisu: Nyt ulkoisessa koordinaatistossa m -massaisen vesihiukkasen (atomi tai pisara tai jotain muuta pientä) potentiaalienergia on $V = mgh$. Vesi asettuu ennen pitkää pyörivän astian suhteen lepoon (ei lainehdi tai virtaa sen sisällä), joten tämä hiukkanen on pyörivässä koordinaatistossa levossa. Täten edellisen kohdan perusteella sen kokonaisenergia pyörivässä koordinaatistossa on sen potentiaalienergia $U = V - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = mgh - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$.

Tehtävänannon alussa esitetyn periaatteen mukaan U on vakio tälle hiukkaselle, jos sitä liikutellaan veden pinnalla. Siten myös $-U/m$ on vakio, eli $\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - gh$ on vakio. Jos tälle vakiolle annetaan nimi A , niin saadaan $h = (\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - A)/g$. Veden pinta muodostaa siis ylöspäin aukevan paraabelin, jonka symmetria-akseli on täsmälleen astian pyörimisakseli.

Kun ohut astia pyörii, veden pinta pyörii tietenkin pitkin paraabelin pyörähdyskappaletta, pyörähdysparaboloidia. Jos astia olisikin ollut pyöreä, ei vesi kuitenkaan asettuisi tällaiseen paraboloidimuotoon. Vesi pääsee tällöin pyörimään suhteessa astiaan ja tilanteesta tulee hyvin monimutkainen. Jos kuitenkin pyörittelet juomaa lusi-kalla mukissa, muistuttaa nesteen pinnan muoto paraboloidia juuri tässä tehtävässä tutkitusta syystä, mutta tarkalleen siihen muotoon neste ei asetu.

- (c) Tarkastellaan nyt koko Maapalloa. Voimme tulkita koko planeettamme pinnan nesteeksi; muutaman miljardin vuoden aikana näinkin kiinteä kappale on ehtinyt asettua melko tarkasti sellaiseen muotoon, joka minimoi kokonaisenergian.

Käytetään pallokoordinaatteja R , ϕ ja θ , joissa pisteen koordinaatit määräytyvät seuraavasti: R on pisteen etäisyys Maapallon keskipisteestä, ϕ on pituuspiiri ja θ leveyspiiri. Voimme rajata koordinaatit vaikkapa niin, että $R \geq 0$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ja $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.¹

Tarkastelemalla nyt m -massaista hiukkasta (vaikkapa kiveä) Maapallon pinnalla osoita, että Maan pinnalla toteutuu yhtälö

$$\frac{1}{2}\omega^2 R^2 \cos^2(\theta) + \frac{GM}{R} = \text{vakio}, \quad (2)$$

¹ Jos nämä koordinaatit eivät tunnu selviltä miettimällä ja kartta(pallo)a tutkimalla, voit käydä vilkaisemassa kuvaa osoitteessa <http://mathworld.wolfram.com/SphericalCoordinates.html>, jossa tosin kulmat ϕ ja θ on määritelty päin vastoin kuin tässä.

missä M on Maan massa, G Newtonin gravitaatiovakio ja ω Maan kulmanopeus. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että Maan massa on keskittynyt keskipisteeseen. Tämä oletus ei vaikuta lainkaan, jos Maapallo on homogeeninen pallo.

Maan napasäde R_n on etäisyys Maan keskipisteestä pohjois- tai etelänavalle ja ekvaatorisäde R_e etäisyys keskipisteestä päiväntasaajalle. Käyttäen yhtälöä (2) ratkaistaan napasäde muuttujien R_e , M , G ja ω avulla. Kirjoita samoja muuttujia käyttäen lauseke $R_e - R_n$:lle, ja sijoita siihen lukuarvot $R_e = 6,3781 \times 10^6$ m, $M = 5,9736 \times 10^{24}$ kg, $G = 6,6738 \times 10^{-11}$ kg⁻¹m³s⁻² ja $\omega = 2\pi/24$ h = 43200⁻¹π s⁻¹. Vertaa saamaasi tulosta todelliseen arvoon, joka on noin 6378,1 km – 6356,8 km = 21,3 km. Jos tulokset eroavat toisistaan, mistä ero johtuu?

Ratkaisu: Pallokoordinaateissa pisteen (R, ϕ, θ) etäisyys pyörimisakselista on $r = R \cos(\theta)$. Gravitaatiopotentiaalienergia on m -massaiselle kivelle $V = -GMm/R$, joten saamme edellä esitettyyn tapaan vakion $-U/m = GM/R + \frac{1}{2}\omega^2 R^2 \cos^2(\theta)$.

Päiväntasaajalla $\theta = 0$ ja pohjoisnavalla $\theta = \pi/2$ (tai $-\pi/2$, jos kulmaa θ mitataan eri suuntaan, mutta sillä ei ole mitään merkitystä nyt). Siispä R_e :tä vastaa $\theta = 0$ ja R_n :ää taas $\theta = \pi/2$. Siispä saadaan $GM/R_e + \frac{1}{2}\omega^2 R_e^2 \cos^2(0) = GM/R_n + \frac{1}{2}\omega^2 R_n^2 \cos^2(\pi/2)$. Tästä saadaan $1/R_e + \frac{1}{2GM}\omega^2 R_e^2 = 1/R_n$ ja edelleen $R_n = (1/R_e + \omega^2 R_e^2 / 2GM)^{-1}$.

Täten $R_e - R_n = R_e - (1/R_e + \omega^2 R_e^2 / 2GM)^{-1} = R_e / (1 + \frac{2GM}{\omega^2 R_e^3})$. (Nyt $\frac{2GM}{\omega^2 R_e^3} \approx 581$, johon verrattuna ykkönen on mitättömän pieni. Siispä $R_e - R_n \approx \frac{\omega^2 R_e^4}{2GM}$.) Sijoittamalla saadaan $R_e - R_n \approx 10,9$ km. Tämä tulos on oikeassa kokoluokassa, mutta hieman väärin. (Ei ehkä ole intuitiivisesti selvää, onko säteiden erotuksessa kyse metreistä, sadoista metreistä vai kymmenistä kilometreistä, mutta onneksi tämä asia on mitattu kokeellisesti.) Virhe johtuu enimmäkseen Maan massan jakautumisesta. Oletimme tässä, että massajakauma on pallosymmetrinen, jolloin sen voi korvata yksinkertaisuuden vuoksi keskipisteeseen sijoitetulla pistemassalla. Maa on hyvin pallomainen (kuten tulos osoittaa), joten suhteellinen virhe on pienehkö, mutta kuitenkin olemassa. Lisäksi Maa on muutenkin hieman muhkurainen. Muhkuraisuus liittyy oleellisesti siihen, ettei Maa ole nestemäinen, vaikka niin oletimme – tuloksesta päätellen tämä oletus oli kuitenkin melko hyvä!