

Tehtävä 1. Fysikot väittelevät kahvikupin äärellä siitä, pysyykö kahvi kuumempuna, jos siihen lisätään maitoa heti kassalla vai jos se lisätään vasta työhuoneessa muutaman minuutin kävelymatkan jälkeen. Käyttäen Newtonin jäähtymislakia (kts. esim. Wikipedia) ja merkiten selkeästi, mitä oletuksia teet, selvitä kumpi on oikeassa.

Vinkki: oleta ensin, että kupissa ei ole kantta ja että se on reunoilta eristetty, jolloin voit olettaa, ettei sen lämmönsiirto-ominaisuus riipu nesteen määrästä (lämpöä päästävä pinta-ala on vakio).

Vinkki 2: palaa vuoden 2012 ensimmäisen valmennuskirjeen tehtävän 3a tehtävänantoon (löytyy sivulta juu.fi/ipho/valmennus), josta saat apuja differentiaaliyhtälön käsittelyyn.

Ratkaisu: Listataanpa aluksi oletuksemme:

- Lämpöä päästävä pinta-ala on vakio.
- Lämmönsiirto-ominaisuudet eivät riipu nesteen määrästä.
- Kaikki tehtävän nesteet ovat oleellisesti vettä, ja niillä on sama ominaislämpökapasiteetti c .
- Sovitaan, että kahviin lisättävä maito on huoneenlämpöistä eli ympäristön kanssa samassa lämpötilassa. Oletus on järkevä, useissa kahviloissa maito löytyy kannusta kassan viereltä, eikä se ole jääkaappikylmää eli poikkeama huoneenlämmöstä on pieni. Tämän oletuksen varsinaisesti keksimme tehdä vasta myöhemmin laskun helpottamiseksi, mutta kirjataan se jo tähän. Tätä ei luonnollisesti ole pakko olettaa.

Tehtävänannossa oli pieni ongelma; suomenkielisen Wikipedian antama Newtonin jäähtymislaki on muotoa

$$\frac{dT}{dt} = -K(T - T_y), \quad (1)$$

missä T_y on ympäristön lämpötila. Tässä lämmönsiirto-ominaisuuden riippumattomuutta on vaikea ilmaista (kerroin K kun kattaa vain lämpötilan muutokseen vaikuttavat ominaisuudet).

Newtonin jäähtymislaki on kuitenkin diskreetti yleisty Fourierin jäähtymislaista, ja yleisimmin se esitetään muodossa

$$\frac{dQ}{dt} = -kA(T - T_y). \quad (2)$$

Nyt voidaan tutusta yhtälöstä $Q = cm\Delta T$ lainaten muuttaa jäähtymislaki muotoon $\frac{dT}{dt} = -\frac{kA}{cm}(T - T_y)$ ja tutkia kertoimia. Lämpöä siirtävä pinta-ala on tehtävänannon mukaan vakio, joten ala A voidaan sisällyttää vakioon k . Oletuksien mukaan ominaislämpökapasiteetti c on myös systeemissämme vakio ja sisällytetään k :hon.

Tutkittavan aineen massa m tuli tarkasteluun vasta siirtyessämme lämmönsiirrosta lämpötilaan, joten sitä ei sovi poistaa yhtälöstä. Wikipedian antamassa jäähtymislaissa massa on piiloutunut! Voit vielä miettiä, mitä eroa on lauseilla "Nesteen määrä ei vaikuta lämmön siirtymisen nopeuteen" ja "Nesteen määrä ei vaikuta lämpötilan muutosnopeuteen".

Tutkitaan saamaamme differentiaaliyhtälöä nyt vuoden 2012 1. valmennuskirjeen tehtävän 3a avulla.

$$T'(t) = -\frac{k}{m}(T(t) - T_y) \quad (3)$$

Ennustamme sille ratkaisuksi yhtälön $T(t) = A_1 + A_2 e^{A_3 t}$, missä A_1 , A_2 ja A_3 ovat joitain vakioita. Mikäli tämä tällainen $T(t)$ on tosiaan ratkaisu, sen derivaatta toteuttaa annetun differentiaaliyhtälön (3):

$$A_2 A_3 e^{A_3 t} = -\frac{k}{m}(A_1 + A_2 e^{A_3 t} - T_y) \quad (4)$$

Vaikuttaa siltä, että $A_1 = T_y$ ja $A_3 = -\frac{k}{m}$. Selvitämme vielä termin A_2 pohtimalla alkutilannetta $t = 0$. Tällöin kahvin alkulämpötila on jokin T_0 (esim. $T_0 = 96^\circ\text{C}$). Siispä

$$T(0) = A_1 + A_2 e^0 = T_y + A_2 = T_0 \quad (5)$$

Olemme selvittäneet kaikki vakiot ja ratkaistu yhtälö on $T(t) = T_y + (T_0 - T_y)e^{-\frac{k}{m}t}$. Havaitsemme, että kutakin lämpötilaa tarkastellaan sen ja ympäristön lämpötilan erotuksena. Merkintöjä helpottaa, jos

päätetään jatkossakin käsitellä kaikkia lämpötiloja erotuksena ympäristön lämpötilasta T_y ja kirjoitetaan yhtälö uudelle suurelle $\tilde{T} = T - T_y$ kaikille lämpötiloille T . Saamme

$$\tilde{T}(t) = \tilde{T}_0 e^{-\frac{k}{m}t} \quad (6)$$

Nyt voimme lopultakin tarkastella maidonlisäämisongelmaa, kun tiedämme, miten neste jäähtyy muuten ajan funktiona. Sovitaan, että kahvin massa on M ja lisättävän maidon massa m . Meillä on kaksi tilannetta vertailtavana:

- Maito lisätään ajanhetkellä $t = 0$ ja kahvi juodaan huoneessa ajanhetkellä t .
- Kahvi viedään huoneeseen, jossa maito lisätään ajanhetkellä t ja kahvi juodaan heti sen jälkeen.

Lasketaan ensimmäiselle vaihtoehdolle maitokahvin alkulämpötila. Myös tässä yhteydessä voimme käyttää lämpötilasuurettamme $\tilde{T}$ (mieti, miksi). Olkoon kuuman kahvin lämpötila $\tilde{T}_0$ ja maidon lämpötila edellä sovittu $\tilde{T}_y = 0$, ja yhteinen loppulämpötila $\tilde{T}_1$. Tällöin

$$Q_{kahvi} + Q_{maito} = 0 \leftrightarrow cM(\tilde{T}_1 - \tilde{T}_0) + cm(\tilde{T}_1 - 0) = 0 \leftrightarrow \tilde{T}_1 = \frac{M}{M+m}\tilde{T}_0 \quad (7)$$

Kun maitokahvi aloittaa jäähtymisen, sen massa on tietysti $M + m$ ja alkulämpötila $\tilde{T}_1$. Kirjoitetaan kassalla lisätylle maidolle yhtälö juomisajankohtana t .

$$\tilde{T}_{kassalla}(t) = \tilde{T}_1 e^{-\frac{k}{M+m}t} = \frac{M}{M+m}\tilde{T}_0 e^{-\frac{k}{M+m}t} \quad (8)$$

Jos kahvi lisätään vasta huoneessa, ajanhetkellä t ja ennen maidon lisäystä sen lämpötila on

$$\tilde{T}_1(t) = \tilde{T}_0 e^{-\frac{k}{M}t} \quad (9)$$

Lasketaan nyt sille maidon lisäyksen jälkeen saatu lämpötila $\tilde{T}_{huoneessa}$. Se saadaan kuten yhtälö (7) :

$$Q_{kahvi} + Q_{maito} = 0 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \tilde{T}_{huoneessa} = \frac{M}{M+m}\tilde{T}_1 = \frac{M}{M+m}\tilde{T}_0 e^{-\frac{k}{M}t} \quad (10)$$

Huomaa, että kahvi juodaan heti ajankohtana t eikä se ehdi jäähtyä sekoituksen jälkeen, jolloin perään tarvittaisiin uusi eksponenttifunktio (voit miettiä, miten siinä otettaisiin huomioon jäähtymisen alkaminen ajanhetkestä t ja se, että massa on nyt $m + M$).

Loppulämpötiloja $\tilde{T}_{kassalla}$ ja $\tilde{T}_{huoneessa}$ voi verrata silmämääräisesti tai laskea niiden erotuksen. Silmämääräisesti havaitsemme, että ainoa ero on eksponenttifunktiossa. Kassalla lisätylle maidolle negatiivinen eksponentti kasvaa hitaammin, jolloin se pienentää lämpötilaa kuvaavaa funktiota hitaammin. Maidon lisääminen heti hidastaa jäähtymistä, erityisesti, mikäli maitoa lisää paljon.

Tässä ratkaisussa on tietenkin tehty paljon erilaisia helpottavia oletuksia, silmiinpistävämpänä ehkä maidon huoneenlämpöisyys ja mokin täydellinen eristävyys. Jos maito lisätään jääkaapista, se on n. 10°C kylmempää kuin tässä oletetaan. Miten tehtävä muuttuisi tällöin? Entä, jos lämpöä siirtävä pinta-ala muuttuisi nesteen määrän mukana? Tuottaisivatko nämä tarkennukset malliimme pieniä vai suuria muutoksia?

Pieni internet-katsaus kertoo, että aihe pohdituttaa jatkuvasti niin maallikkoja kuin opiskelijoita. Turun yliopistossa tutkimus tehdään kokeellisena työnä kurssilla: *Luentodemo* Tiede-lehden keskustelupalstalla on asiaa mietitty vuonna 2009: *Keskusteluketju* StackExchangessa löytyy myös sama kysymys kesältä 2011: *Physics.StackExchange* Physics Forumsilla pyydetään apua tämän tehtävän variantteihin tämän tästä, kirjoitushetkellä tuorein osuma on marraskuulta 2011: *PhysicsForums*