

Tehtävä 1. Monesti fysikaalisissa malleissa on mahdollista korvata hankala järjestelmä yksinkertaisemmalla ilman, että järjestelmän käytös muuttuu. Tutkitaan tätä ideaalisten jousien tapauksessa.

- (a) Tutkitaan kuvan 1 mukaisia jousisysteemejä, joiden päässä roikkuu samanlainen punnus. Oletetaan, että systeemit käyttäytyvät samoin, eli jos punnuksia poikkeutetaan tasapainoasemastaan yhtä paljon, niihin kohdistuu yhtä suuri voima. Osoita, että tässä tilanteessa yksinkertaistetun systeemin (jossa on vain yksi jousi) jousivakiolle pätee

$$k = k_1 + k_2. \quad (1)$$

Tarkastellaan sitten kuvan 2 mukaisia systeemejä samalla tavoin. Osoita, että nyt pätee

$$k = (k_1^{-1} + k_2^{-1})^{-1}. \quad (2)$$

Yleistetään sitten kuvan 1 tapausta niin, että rinnakkain on n joustaa, joiden jousivakiot ovat $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ ja k_n . Perustele, miksi tässäkin tilanteessa systeemi voidaan korvata yhdellä jousella, ja että sen jousivakioksi tulee

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1} + k_n. \quad (3)$$

Yleistetään vastaavasti kuvan 2 tilannetta. Perustele, että korvaaminen onnistuu nytkin ja jousivakioksi saadaan

$$k = (k_1^{-1} + k_2^{-1} + \dots + k_{n-1}^{-1} + k_n^{-1})^{-1}. \quad (4)$$

- (b) Edellä laskettujen yksinkertaistusmenetelmien avulla voidaan korvata monimutkaisinkin näköisiä jousisysteemejä yhdellä ainoalla jousella. Tämä onnistuu vaiheittain korvaamalla osasysteemejä yksinkertaisemmilla.

Tutkitaan kuvan 3 mukaista jousisysteemiä, jossa jokaisen yksittäisen jousen (niitä on 10) jousivakio on q . Päättele, että tämäkin systeemi voidaan korvata yhdellä jousella, ja laske, mikä on tämän jousen jousivakio k . Ilmaise tulos jousivakion q avulla.

Ratkaisu:

- (a) Kuva 1: Tarkastellaan vasemmanpuoleista systeemiä. Poikkeutetaan punnusta x :n verran tasapainoasemastaan (ja pidetään sitä siinä paikallaan), jolloin jousi 1 kohdistaa siihen voiman $-k_1x$ ja jousi 2 voiman $-k_2x$. Yhteensä siihen kohdistuu siis jousivoima $-k_1x - k_2x = -(k_1 + k_2)x$. Jos sama tehdään oikeanpuoleiselle systeemille, kohdistuu siihen jousivoima $-kx$. Näiden täytyy olla samat (tätähän se tarkoittaa, että systeemit käyttäytyvät samoin), joten $k = k_1 + k_2$.

Jos punnuksia on vierekkäin kolme (jousivakiot k_1, k_2 ja k_3), voidaan ensin kaksi ensimmäistä korvata yllä todetun periaatteen nojalla yhdellä jousella, jonka jousivakio on $k_1 + k_2$. Tämän korvauksen jälkeen rinnakkain on kaksi joustaa, jotka voidaan yhdistää yhdeksi, jolloin jousivakioksi tulee $(k_1 + k_2) + k_3 = k_1 + k_2 + k_3$. Vastaava päättely useammalle jouselle antaa yhtälön (3). Toki myös kahdelle jouselle tehdyn päättelyn voi suoraan yleistää useammalle jouselle, mikä johtaa samaan päätelmään.

Kuva 2: Toimitaan samoin kuin edellä, eli poikkeutetaan punnusta x :n verran. Olkoon ylemmän jousen pituuden muutos x_1 ja alemman x_2 , jolloin $x = x_1 + x_2$. Joustien välissä oleva osa asettuu lepoon (kun pidämme joustaa paikallaan). Jousi 1

vaikuttaa siihen voimalla $-k_1x_1$ ja jousi 2 voimalla k_2x_2 . Kokonaisvoima on nolla, joten $-k_1x_1 + k_2x_2 = 0$, joten $x_1 = \frac{k_2}{k_1}x_2$, ja vieläpä $x = x_1 + x_2 = \frac{k_2}{k_1}x_2 + x_2 = (1 + \frac{k_2}{k_1})x_2$. Jousisysteemi kohdistaa tällöin punnukseen voiman $-k_2x_2 = -k_2(1 + \frac{k_2}{k_1})^{-1}x = -(k_1^{-1} + k_2^{-1})^{-1}x$. Täten vastaavan yksittäisen jousen jousivakio on $k = (k_1^{-1} + k_2^{-1})^{-1}$.

Useammalle jouselle voidaan edetä kuten rinnakkaisten jousien tapauksessa. Kolmen jousen (jousivakiot k_1 , k_2 ja k_3) tilanteessa voidaan ensin yhdistää kaksi ensimmäistä joustia, jolloin peräkkäin onkin enää kaksi joustia, joiden jousivakiot ovat $(k_1^{-1} + k_2^{-1})^{-1}$ ja k_3 . Nämä yhdistämällä saadaan jousivakio $k = \{[(k_1^{-1} + k_2^{-1})^{-1}]^{-1} + k_3^{-1}\}^{-1} = (k_1^{-1} + k_2^{-1} + k_3^{-1})^{-1}$. Vastaavasti voidaan tehdä useamman jousen tapauksessa, ja saadaan yhtälön (4) tulos.

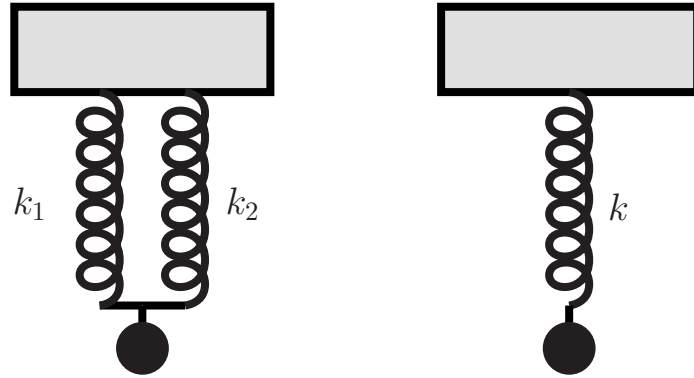
Huomaa, ettei missään vaiheessa ole tehty oletusta, että jousivakiot ovat keskenään samat. Toki tulos pätee silloinkin, mutta myös täysin yleisessä tilanteessa.

- (b) Edetään yksinkertaistuksessa vaiheittain etsimällä jousisysteemistä paikkoja, jossa jousia on yksinkertaisella tavalla (kuten (a)-kohdassa) rinnakkain tai peräkkäin, ja korvataan nämä yksinkertaiset jousiryhmät yksittäisillä jousilla edellä saatujen periaatteiden mukaisesti. Näin jousisysteemi vaiheittain yksinkertaistuu.

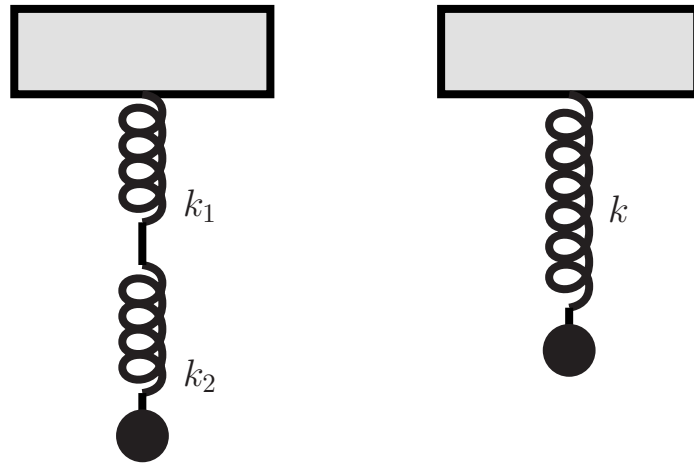
Tarkastellaan ensin oikean reunan viiden jousen rykelmää. Näistä kaksi rinnakkain olevaa voidaan korvata yhdellä jousella, jonka jousivakio on $2q$. Tämän jälkeen peräkkäin on neljä joustia, jotka voi korvata yhdellä jousella, jonka jousivakio on $(q^{-1} + q^{-1} + (2q)^{-1} + q^{-1})^{-1} = \frac{2}{7}q$.

Siirrytään sitten vasemmalle puolelle. Sieltä löytyy kaksi rinnakkaista joustia; niiden tilalle voidaan laittaa yksi jousi, jonka jousivakio on $2q$. Tämän jousen yläpuolella on yksi jousi; sen jousivakio on q , joden nämä voidaan yhdistää, jolloin saadaan jousivakio $(q^{-1} + (2q)^{-1})^{-1} = \frac{2}{3}q$. (Tähän jouseen on nyt siis yhdistetty kuvan 3 kolme vasemmanpuoleisinta joustia.) Tämän jousen vierellä on yksi alkuperäinen jousi, ja yhdistäminen antaa jousivakion $\frac{2}{3}q + q = \frac{5}{3}q$. Nyt vasemmalla puolella ovat peräkkäin enää yksi alkuperäinen jousi ja yksi neljää alkuperäistä joustia korvaava jousi, jotka yhdistämällä saadaan punnuksen vasemmalle puolelle yksi jousi, jonka jousivakio on $((\frac{5}{3}q)^{-1} + q^{-1})^{-1} = \frac{5}{8}q$.

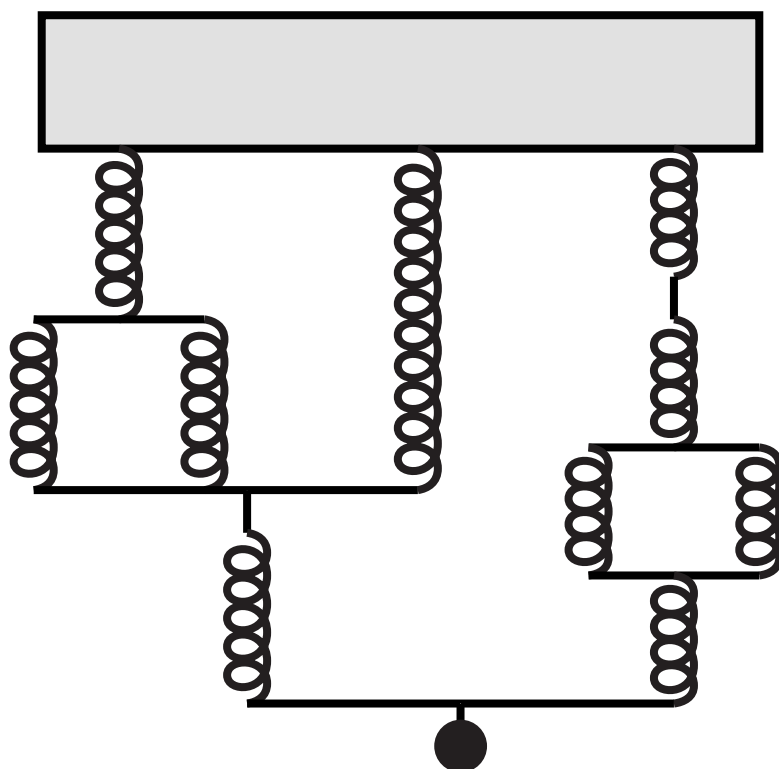
Nyt punnus riippuu enää kahdesta rinnakkain olevasta jousesta, joiden jousivakiot ovat $\frac{2}{7}q$ ja $\frac{5}{8}q$. Siispä koko jousisysteemi voidaan lopulta korvata yhdellä jousella, jonka jousivakio on $k = \frac{2}{7}q + \frac{5}{8}q = \frac{51}{56}q$.



Kuva 1: Kaksi rinnakkain olevaa jouta toimii samoin kuin yksi yksinäinen jousi, kunhan jousivakio k on valittu sopivasti.



Kuva 2: Kaksi peräkkäin olevaa jouta toimii samoin kuin yksi yksinäinen jousi, kunhan jousivakio k on valittu sopivasti.



Kuva 3: Tämäkin hirvitys voidaan korvata yhdellä jousella.