IPhO-materiaalia: Klassinen mekaniikka

Joonas Ilmavirta

Versio 3
7.12.2012

Sisältö

1 Alkusanat **3**
1.1 IPhO . . . 3
1.2 Pari sanaa fysiikan luonteesta . . . 3
1.3 Lukijalle . . . 4
1.4 Tämä teos on kesken . . . 5

2 Johdatus klassiseen mekaniikkaan **6**
2.1 Newtonin liikelait . . . 6
2.1.1 Nopeus ja kiihtyvyys . . . 7
2.1.2 Newtonin ensimmäinen laki . . . 9
2.1.3 Newtonin toinen laki . . . 10
2.1.4 Newtonin kolmas laki . . . 11
2.1.5 Konservatiiviset voimat . . . 14
2.1.6 Esimerkkejä . . . 17
2.2 Koordinaatisto ja sen vaihtaminen . . . 21
2.2.1 Galilei-muunnos . . . 21
2.2.1.1 Muunnos ja käänteismuunnos . . . 25
2.2.1.2 Dopplerin ilmiö . . . 25
2.2.2 Koordinaatistosta riippuvat ja riippumattomat suureet . . . 26
2.2.3 Hiukkasjärjestelmät . . . 27
2.2.4 Avaruusaika . . . 30
2.3 Pyörimismekaniikka . . . 30
2.3.1 Pyörimiskinematiikka . . . 31
2.3.2 Pyörimisdynamiikka . . . 35
2.3.2.1 Pyörivä jäykkä pistejoukko . . . 36
2.3.2.2 Mitä pyöriminen tarkoittaa eri ulottuvuuksissa? . . . 36
2.3.2.3 Pistemekaniikan ja pyörimismekaniikan vertailua . . . 36
2.3.3 Pyöriminen eri akseleiden ympäri . . . 36
2.3.3.1 Hitausmomentti eri akseleiden suhteen . . . 36
2.3.3.2 Prekessio . . . 36
2.3.4 Esimerkkejä . . . 36
2.4 Taivaanmekaniikka . . . 37
2.4.1 Newtonin gravitaatiolaki . . . 37
2.4.2 Keplerin lait . . . 37
2.4.3 Laajeneva maailmankaikkeus . . . 37
2.4.4 Esimerkkejä . . . 37

2.5 Pyörivä koordinaatisto 37
2.5.1 Epäinertiaalinen koordinaatisto 37
2.5.2 Liike Maapallon pinnalla 37
2.5.3 Johdattelua yleiseen suhteellisuusteoriaan 37
2.5.4 Esimerkkejä 37
2.6 Jatkuvat kappaleet 39
2.6.1 Summasta integraaliin 39
2.6.1.1 Kolmiulotteiset kappaleet 39
2.6.1.2 Yksi- ja kaksiulotteiset kappaleet 39
2.6.2 Gravitaatio 39
2.6.2.1 Gaussin laki gravitaatiolle 39
2.6.2.2 Pallomaisen kappaleen gravitaatio 39
2.6.3 Esimerkkejä 39
2.7 Mekaniikkaa ilman voimaa 40
2.7.1 Yleistetyt koordinaatit 40
2.7.2 Hamiltonin mekaniikkaa 40
2.7.3 Lagrangen mekaniikkaa 40
2.7.3.1 Hamiltonin ja Lagrangen mekaniikan yhteys 40
2.7.4 Voima kvanttifysiikassa 40
2.7.5 Epäkonservatiiviset voimat? 40
2.7.6 Esimerkkejä 40
2.8 Symmetriat ja liikevakiot 40
2.9 Staattiset ja vakaat systeemit 40
2.10 Dimensioanalyysi 40
2.10.1 Fysikaalisten suureiden yksiköt 41
2.10.2 Dimensioanalyysin perusteet 41
2.10.3 Luonnolliset yksiköt 41
2.10.4 Planckin yksiköt 41
2.10.5 Esimerkkejä 41
2.11 Tarkastelua vielä lopuksi 41
2.12 Puutteita 42

3 Lopuksi **43**
3.1 IPhO-syllabus 43
3.2 Vastauksia harjoitustehtäviin 47

Luku 1

Alkusanat

1.1 IPhO

Tämä opetusmateriaali on tarkoitettu fysiikkaolympialaisiin (IPhO) valmistautumista varten, mutta sopii myös muille kiinnostuneille lukijoille. Lukijan oletetaan tutustuneen fysiikkaan aiemmin, mutta se ei kuitenkaan ole täysin välttämätöntä.

Kisoja varten tarvittava syllabus on listattu kilpailun kotisivulla: `http://ipho.phy.ntnu.edu.tw/syllabus.html`. Tässä käsitellään klassista mekaniikkaa kuitenkin laajemmin kuin olisi kilpailun kannalta välttämätöntä, jotta tarvittavalle osaamiselle saadaan kunnollinen perusta. Lisäksi lukija aikonee jatkaa fysiikan opintoja lukion jälkeenkin, joten lähempi tutustuminen fysiikkaan ei ole ajan hukkaa.

1.2 Pari sanaa fysiikan luonteesta

Näyttää kovasti siltä, että ympäröivässä maailmassa on jotain säännöllisyyttä. Esimerkiksi kaikki ylös heittämäni esineet ovat aina pudonneet maahan[1], ja vieläpä hyvin samankaltaisella tavalla. Tämän esiintyvän säännöllisyyden tutkiminen on kaiken tieteen ydin.

Luonnontieteeksi ja tarkemmin fysiikaksi tämä tutkiminen rajautuu, kun rajoitutaan tarkastelemaan vain joitain ilmiöitä. Erilaiset ilmiöt vaativat erilaista lähestymistapaa: tuskin kukaan yrittää soveltaa täysin samoja työkaluja tutkiessaan spin-ratavuorovaikutusta atomiytimissä kuin tutkiessaan ruotsin kielen sivulauseiden sanajärjestystä. Joitain havaittavia ilmiöitä voi selittää yksinkertaisemmilla ilmiöillä; esimerkiksi molekyylien rakennetta voi selittää sähköisillä vuorovaikutuksilla.

Fysiikkaa voisi luonnehtia niiden ilmiöiden tutkimiseksi, joita ei voi selittää enää ”perustavamman tason” ilmiöillä tai joiden kohdalla näitä selittäviä ilmiöitä ei tunneta. Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että fyysikot olisivat muita luonnontieteilijöitä parempia; muiden alojen tutkimus ei ole yleisesti helpompaa, vähemmän kiinnostavaa tai käyttökelvottomampaa, vaan vain erilaisiin ilmiöihin keskittyvää. Fysiikkakaan ei ole tarkkaan rajattu ala, eikä kaikesta tarvitsekaan pystyä sanomaan, mihin tieteenalaan (tai -aloihin) se kuuluu.

[1] Minulta ei siis ole koskaan karannut ilmapalloa.

Kutsumme tästä eteenpäin kaikkea ympärillämme olevaa ja tapahtuvaa *luonnoksi*[2]. Seuraavat nimitykset eivät ole vakiintuneet, mutta selkeyden vuoksi käytän niitä juuri tässä merkityksessä. Luonnossa olevia lainalaisuuksia kutsun luonnonlaeiksi. Luonnonlait kokoelmana voi mieltää myös vain yhdeksi luonnonlaiksi. Ne siis kuvaavat kaikkea, mikä on, ja sitä, miten se on.

Tavoitteena fysiikassa on, että nämä luonnonlait saadaan selville. Näitä lakeja emme voi koskaan varmasti tietää, mutta hyviä arvauksia voimme esittää. Näitä arvauksia tai luonnonlakien jäljittely-yritelmiä kutsun fysiikan laeiksi. Fysiikan lakeja voi siis rikkoa; se vain tarkoittaa, että arvaus luonnonlaista on (ainakin hieman) epäonnistunut. Luonnonlakeja sen sijaan ei voi rikkoa; koko käsite on määritelty niin, että kaikki tapahtuva noudattaa luonnonlakeja. Mitään yliluonnollista ei myöskään ole olemassa tai tapahdu; kaikki oleva ja tapahtuva on *määritelty* luonnolliseksi.

Tässä materiaalissa saamme muotoiltua jonkinlaisen määrän fysiikan lakeja. Kaikilla niillä on rajoittunut pätevyysalueensa, ja tiedetään, etteivät ne sellaisinaan päde kaikissa olosuhteissa. Käytännössä ne kuitenkin useissa yleisissä tilanteissa erinomaisia kuvauksia luonnosta.

1.3 Lukijalle

Erillisten merkittävien kohtien kuten määritelmien tai huomautusten päättyminen merkitään symbolilla $\triangle$ tähän tapaan:

Laki 1.1 (Pallolaki)**.** Pallo on pyöreä. $\triangle$

Määritelmä 1.2. Luku 2 määritellään siten, että $1 + 1 = 2$. $\triangle$

Harjoitustehtäviin (HT) on listattuna vastauksia aivan teoksen lopussa. Jos silmiesi edessä on sähköinen versio, tehtävän lopussa olevaa kolmiota klikkaamalla pääsee vastauksen ääreen ja sieltä tehtävän numeroa klikkaamalla takaisin. Näiden, kuten muidenkin linkkien, pitäisi näkyä punaisella laatikolla korostettuina. Vastaukset muutamiin tehtäviin on piilotettu, sillä tehtäviä käytetään osana fysiikan olympiavalmennuskirjeitä.

HT 1.1. Miksi juuri sinä, lukija, olet kiinnostunut fysiikasta? $\triangle$

Joidenkin lakien jälkeen esitetään perustelu todistuksen muodossa, ja todistus päättyy matematiikasta tuttuun tapaan symboliin $\square$. Nämä todistukset eivät ole matemaattisessa mielessä täysin aukottomia tai järkeviä, mutta fysiikan kannalta riittäviä.

Määritelmien ja lakien korostamisen tarkoituksena on auttaa löytämään tekstin seasta oleellisimmat kohdat nopeasti. Näiden oleellisten kohtien numerointi on yhteinen ja juokseva, samoin näistä omilla riveillään olevien riippumatta yhtälöiden. Tämän on tarkoitus helpottaa etsityn numeroidun kohdan löytämistä.

[2]Eri aloilla tämä sana tulkitaan hyvinkin eri tavoin. Biologi ei varmastikaan olisi tästä määritelmästä samaa mieltä.

1.4 Tämä teos on kesken

Tämä materiaali ei ole valmis. Mikäli keksit siihen minkäänlaista huomauttamista tai muita ideoita, ilmoita siitä kirjoittajalle sähköpostitse osoitteeseen joonas.ilmavirta@jyu.fi.

Puuttuvia mutta suunnitteilla olevia tai muuten keskeneräisiä osia on merkitty näin: [**TODO: tähän jotain suhteellisuusteoriasta**]. Lisäksi samaan suuntaan vihjaavat otsikot, joiden alla ei ole tekstiä.

Luku 2

Johdatus klassiseen mekaniikkaan

Tämän luvun huolelliselta lukijalta odotetaan tuntemusta differentiaali- ja integraalilaskennan perusteista kolmiulotteisessa avaruudessa. Teknisimpiä osia lukuun ottamatta voi tätä kuitenkin huoletta lukea yksiulotteisten taitojen varassa. Jos vektori, derivaatta ja integraali ovat tuttuja laitteita, eteenpäin voi hyvin jatkaa. Fysiikan aiempi tuntemus on hyödyksi ja jossain määrin oletettu, mutta ei välttämätön.

Matematiikkaa tunteville lukijoille huomautettakoon, ettei tämä yritäkään olla matemaattisesti täysin konsistentti esitys. Kielenkäyttö on huolimatonta, ja kaikkien funktioiden oletetaan olevan riittävän siistejä. Näin siistä syystä, että tarkoitus on tuoda myös fysiikka esiin kaiken teknisen pyörityksen takaa.

Klassisen mekaniikan teoria on rakenteeltaan yksinkertainen. Oletamme lähtökohdaksi Newtonin lait (jotka havaintojen perusteella ovat hyvin tarkkoja fysiikan lakeja), ja kaikki muu seuraa niistä. Liikemäärän, pyörimismäärän ja energian säilymislait seuraavat suoraan näistä laeista, ja näin syntyy yllättävänkin laaja kokoelma fysiikan lakeja, joiden avulla mekaniikkaa voi ymmärtää ja mekaniikkaan liittyviä ongelmia ratkaista.

2.1 Newtonin liikelait

Klassisen mekaniikan perustan luovat Newtonin liikelait. Ennen kuin ryntäämme julistamaan ne, käymme läpi tarvittavia perusteita.

Tarkastelemme pistemäisiä hiukkasia, jotka liikuskelevat avaruudessa. Näiden hiukkasten välillä on vuorovaikutuksia, jotka vaikuttavat niiden liikkeisiin. Nimenomaan vuorovaikutus on hyvin perustavanlaatuinen tutkimuksen kohde fysiikassa. Newtonin mekaniikassa esiintyvä voima on yksi tapa kuvailla vuorovaikutusta, mutta kaikkien vuorovaikutusten kuvailuun se ei sovi. Vaikkapa heikko vuorovaikutus voi muuttaa W^--bosonin elektroniksi e ja elektronin antineutriinoksi $\bar{\nu}_e$, mutta tällaista vuorovaikutusta ei voi oikein kuvata voiman käsitteellä[1].

Muita kuin pistemäisiä hiukkasia käsittelemme kohdassa 2.6 ja mekaniikkaa ilman voiman käsitettä kohdassa 2.7.

Ensimmäinen tutkimuskohde on pistehiukkasen kinematiikka eli liikkeen kuvailu. Sen jälkeen voimme Newtonin lakien (lait 2.8, 2.10 ja 2.14) myötä siirtyä dynamiikkaan eli

[1] Tämän vuorovaikutuksen kuvailuun tarvitaan kvanttikenttäteoriaa, johon ei kannata yrittää tunkeutua sisään ennen kuin klassinen mekaniikka sujuu vaivatta.

liikkeen perusteluun. Huomaa, että Newtonin toinen ja kolmas laki kaikkine seurauksineen pätevät vain ensimmäisen lain mukaisissa koordinaatistoissa.

2.1.1 Nopeus ja kiihtyvyys

Tarkastellaan hiukkasen liikettä yksiulotteisessa avaruudessa eli reaaliakselilla $\mathbb{R}$. Hiukkasen paikka x riippuu ajasta (joka on reaaliluku), eli paikka on ajan funktio: $x = x(t)$. Oletamme, että tämä funktio on riittävän siisti[2].

Tutkitaan hiukkasen paikkaa hetkillä t ja $t + h$, missä $h > 0$. Hiukkasen paikan muutosta tällä välillä keskinopeus tällä välillä, joksi määritellään

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h}. \tag{2.1.1}$$

Tämä on kuitenkin siitä ikävä määritelmä, että siinä tarvitaan kahta eri ajanhetkeä t ja $t + h$, kun taas tyypillisesti hiukkasen liikkumista halutaan tarkastella ”yhdellä hetkellä kerrallaan”. Siispä hiukkasen nopeudeksi $v(t)$ määritellään raja-arvo, kun $h \to 0$:

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}. \tag{2.1.2}$$

Tämä on täsmälleen derivaatan määritelmä, joten $v(t) = x'(t)$. Derivaattaa ajan suhteen merkitään monesti pisteellä, jolloin siis $v(t) = \dot{x}(t)$.

Vastaavalla tavalla kuin paikan muuttumista kuvaa paikan aikaderivaatta, nopeuden muuttumista kuvaa nopeuden aikaderivaatta. Tästä käytetään nimitystä kiihtyvyys a. Siispä $a(t) = v'(t) = x''(t)$.

Tätä pidemmälle ei kuitenkaan tarvitse jatkaa. Toki myös kiihtyvyydestä voi ottaa aikaderivaatan ja jatkaa vieläkin pidemmälle, mutta se ei ole tarpeen. Osoittautuu nimittäin, ettei toista kertalukua korkeampia derivaattoja (juuri koskaan) tarvita. Tämä vaikuttaa olevan fysiikassa yleistä, mutta mitään syytä, miksi näin on, ei tarkkaan ottaen tunneta.

Esimerkki 2.1. Jos hiukkasen paikkaa kuvaa funktio $x(t) = t \sin(t^2)$, niin sen nopeus saadaan derivoimalla:

$$v(t) = x'(t) = \sin(t^2) + 2t^2 \cos(t^2). \tag{2.1.3}$$

Kiihtyvyys saadaan derivoimalla toisen kerran:

$$a(t) = v'(t) = 6t \cos(t^2) - 4t^3 \sin(t^2). \tag{2.1.4}$$

Riippumatta siitä, miten hankala ajan funktio paikka on, derivoimalla saa aina nopeuden ja kiihtyvyyden. $\triangle$

Esimerkki 2.2. Tunnetaan hiukkasen kiihtyvyys $a(t) = 12t^2$ ja lisäksi alkuhetkellä oleva nopeus $v(0) = 5$. Tästä voidaan laskea nopeus milloin tahansa.

[2]Tätä ei ole tarpeen määritellä tarkemmin, mutta ainakin jatkuvuus ja derivoituvuus (ainakin kahdesti) oletetaan. Näin oletetaan kaikista funktioista jatkossa.

Analyysin peruslauseen mukaan pätee[3]

$$v(t) - v(0) = \int_0^t v'(s)\mathrm{d}s. \tag{2.1.5}$$

Käyttäen kiihtyvyyden määritelmää saadaan siis

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(s)\mathrm{d}s = 5 + \int_0^t 12s^2\mathrm{d}s = 5 + 4t^3. \tag{2.1.6}$$

Yleisemminkin pätevät laskusäännöt

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(s)\mathrm{d}s \quad \text{ja} \quad x(t) = x(0) + \int_0^t v(s)\mathrm{d}s, \tag{2.1.7}$$

joiden avulla laskeminen on helppoa. △

HT 2.1. Jos edellisen esimerkin tilanteessa on lisäksi $x(0) = 1$, niin määritä paikka ajan funktiona. △

Huomautus 2.3. Yksi mahdollisuus ratkaistaessa nopeutta kiihtyvyydestä tai paikkaa nopeudesta on laskea määräämätön integraali:

$$x(t) = \int v(t)\mathrm{d}t. \tag{2.1.8}$$

Lausekkeeseen ilmestyvä integroimisvakio saadaan ratkaistua, jos tiedetään paikka jollain hetkellä. Yhtä hyvin voi käyttää tätä metodia tai yllä esitettyä määrättyä integraalia. △

Esimerkki 2.4. Jos hiukkasen nopeus on $v(t) = \cos(2t)$ ja $x(\pi) = 3$, niin $x(t)$ voidaan ratkaista seuraavasti: Integroidaan määräämättömästi:

$$x(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = \int \cos(2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin(2t) + C. \tag{2.1.9}$$

Integroimisvakio C määräytyy ehdosta $x(\pi) = 3$:

$$3 = x(\pi) = \frac{1}{2}\sin(2\pi) + C = C, \tag{2.1.10}$$

joten

$$x(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) + 3. \tag{2.1.11}$$

Sama onnisuu myös näin: Vastaavalla tavalla kuin edellä analyysin peruslauseesta lähtien saadaan

$$v(t) = v(a) + \int_a^t a(s)\mathrm{d}s \quad \text{ja} \quad x(t) = x(b) + \int_b^t v(s)\mathrm{d}s, \tag{2.1.12}$$

olivatpa a ja b mitä ajanhetkiä tahansa.

Siispä

$$x(t) = x(\pi) + \int_\pi^t \cos(2s)\mathrm{d}s = 3 + \frac{1}{2}\sin(2t). \tag{2.1.13}$$

Sama tulos tuli, kuten toki pitikin. △

[3] Myös s merkitsee tässä aikaa. Turvallisuussyistä on parempi käyttää integroimismuuttujana jotain sellaista, mikä ei esiinny ylä- tai alarajana integraalissa.

HT 2.2. Jos hiukkasen kiihtyvyys on $a(t) = 1 + 4t$ sekä nopeudelle ja paikalle tiedetään $v(2) = 3$ ja $x(-1) = -1$, määritä $x(t)$. △

Jos liike tapahtuu kolmiulotteisessa avaruudessa, on paikka $\bar{x}$ vektori avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Vektoriarvoisen funktion derivaatta määritellään aivan samoin kuin tavallisenkin funktion, joten nopeudeksi määritellään

$$\bar{v}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{x}(t+h) - \bar{x}(t)}{h} = \bar{x}'(t) \tag{2.1.14}$$

ja kiihtyvyydeksi

$$\bar{a}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{v}(t+h) - \bar{v}(t)}{h} = \bar{v}'(t) = \bar{x}''(t). \tag{2.1.15}$$

Kokoamme nämä määritelmät vielä yhteen:

Määritelmä 2.5. Hiukkasen paikka ajan funktiona on vektori $\bar{x}(t)$. Hiukkasen *nopeus* on paikan ensimmäinen aikaderivaatta ja *kiihtyvyys* toinen:

$$\bar{v}(t) = \bar{x}'(t) \quad \text{ja} \quad \bar{a}(t) = \bar{v}'(t) = \bar{x}''(t). \tag{2.1.16}$$

Huomaa, että paikka, nopeus ja kiihtyvyys riippuvat koordinaatistosta, jossa ne mitataan. △

2.1.2 Newtonin ensimmäinen laki

Koordinaatisto voidaan valita monella tavalla. Jos vaikkapa koordinaatiston origo kiinnitetään oravaan, joka liikuu monimutkaisella ja nopealla tavalla paikasta toiseen, on liikkeen kuvailu tässä koordinaatistossa hyvin vaikeaa. Etsitään sopiva koordinaatisto, jossa mekaniikan teoria voidaan muotoilla mahdollisimman yksinkertaisesti.

Hiukkasta koordinaatistossa kuvaa funktio $\bar{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, missä siis $\bar{x}(t)$ on hiukkasen paikka hetkellä t. Paikka riippuu luonnollisesti siitä, miten koordinaatisto on valittu (eli mihin on sovittu origo ja mihin suuntiin yksikkövektorit $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ osoittavat). Seuraavat määritelmät luonnehtivat koordinaatistoa ja hiukkasten liikettä koordinaatistossa.

Määritelmä 2.6. Hiukkasen liikettä koordinaatistossa kuvaa ajasta riippuva paikka $\bar{x}(t)$. Sanomme, että hiukkanen on *tasaisessa liikkeessä*, jos sen paikalle pätee $\bar{a}(t) = 0$ kaikilla ajanhetkillä t eli $\bar{x}''(t) = 0$ kaikilla t. △

HT 2.3. Jos hiukkanen on tasaisessa liikkeessä ja sille pätee $\bar{v}(0) = \bar{v}_0$ ja $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$, mikä on sen paikka ajan funktiona? Jos vektorit tuntuvat vaikeilta, ajattele asiaa ensin yksiulotteisena. △

Määritelmä 2.7. Sanomme, että koordinaatisto on *inertiaalinen*, jos sellainen hiukkanen, joka ei vuorovaikuta minkään muun hiukkasen kanssa, on tasaisessa liikkeessä. △

Tässä määrittelyssä on ongelma: Mistä voimme tunnistaa, ettei hiukkanen vuorovaikuta minkään kanssa? Tämä ongelma ei ole aivan yksinkertainen, mutta sivuutamme sen pohdiskelun tässä. Jos kiinnitämme koordinaatiston origon vaikkapa huoneen nurkkaan ja yksikkövektorit osoittamaan huoneen särmien suuntaisesti sekä poistamme taianomaisesti gravitaatiovuorovaikutuksen kokonaan, on saatava koordinaatisto erinomaisella tarkkuudella inertiaalinen. Tässä koordinaatistossa voidaan sitten puhua voimasta (joka määritellään pian) ja tarkastella gravitaatiovuorovaikutusta. Näin gravitaatio palaa kuvaan, ja koordinaatisto on yhä inertiaalinen.

Toistamme nyt määritelmän 2.7, mutta tällä kertaa nimeämme sen (fysiikan) laiksi. Tämä on ensimmäinen Newtonin laeista.

Laki 2.8 (Newtonin ensimmäinen laki)**.** Koordinaatisto on *inertiaalinen* eli *inertiaalikoordinaatisto*, jos sellainen hiukkanen, joka ei vuorovaikuta minkään muun hiukkasen kanssa, on tasaisessa liikkeessä. △

Tämä laki on sinänsä hyvinkin sisällötön. Sen oleellisuus piilee siinä, että se luo pohjan, jolle muut lait rakennetaan. Newtonin toinen ja kolmas laki nimittäin pätevät juuri inertiaalikoordinaatistoissa.

2.1.3 Newtonin toinen laki

Hiukkasella on (ajasta riippuvan) paikan lisäksi toinen keskeinen ominaisuus: massa m. Myös massa voi riippua ajasta, jolloin merkitään $m = m(t)$. Useissa sovelluksissa massa on vakio, mutta aina näin ei kuitenkaan ole. Kertomalla massa ja nopeus keskenään saadaan liikemäärä:

Määritelmä 2.9. Jos hiukkasen nopeus on $\bar{v}(t)$ ja massa $m(t)$, niin hiukkasen *liikemäärä* on $\bar{p}(t) = m(t)\bar{v}(t)$. △

Liikemäärän käsitteen avulla voidaan esittää Newtonin toinen laki, joka samalla sisältää voiman määritelmän:

Laki 2.10 (Newtonin toinen laki)**.** Tarkastellaan hiukkasta inertiaalikoordinaatistossa. Jos hiukkanen vuorovaikuttaa toisen hiukkasen kanssa, tätä vuorovaikutusta kuvaa *hiukkaseen kohdistuva voima* $\bar{F}(t)$, jolle pätee

$$\bar{F}(t) = \bar{p}'(t), \tag{2.1.17}$$

missä $\bar{p}(t)$ on hiukkasen liikemäärä. Sanotaan myös, että $\bar{F}(t)$ on toisen hiukkasen tarkasteltavaan hiukkaseen kohdistama voima.

Jos hiukkanen vuorovaikuttaa usean muun hiukkasen kanssa ja kuhunkin vuorovaikutukseen liittyy voima $\bar{F}_i(t)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$, kun muita hiukkasia on n kappaletta), niin hiukkaseen kohdistuva kokonaisvoima on

$$\bar{F}(t) = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i(t). \tag{2.1.18}$$

Tälle kokonaisvoimalle pätee edelleen $\bar{F}(t) = \bar{p}'(t)$.

Voima voi myös riippua paikasta, mutta tätä emme nyt merkitse näkyviin, sillä paikkariippuvuus sisältyy tavallaan aikariippuvuuteen. (Kullakin hetkellä hiukkanen on jossain paikassa, joten paikkariippuvuus voidaan muuttaa pelkäksi aikariippuvuudeksi, jos $x(t)$ tunnetaan.) Samoin voima voi riippua myös nopeudesta. △

Huomautus 2.11. Edellä saatiin siis Newtonin laki muodossa $\bar{F} = \bar{p}'$. (Aikariippuvuus ei ole kirjoitettuna näkyviin, jotta yhtälöt olisivat vähemmän sotkuisia.) Juuri tämä on Newtonin laki oikeassa muodossaan. Liikemäärän määritelmää ja tulon derivointisääntöä käyttäen saadaan

$$\bar{F} = \bar{p}' = (m\bar{v})' = m'\bar{v} + m\bar{v}' = m'\bar{v} + m\bar{a}. \tag{2.1.19}$$

Siispä Newtonin toisen lain yhtälön $\bar{F}(t) = \bar{p}'(t)$ voi lausua myös yhtäpitävässä muodossa

$$\bar{F}(t) = m'(t)\bar{v}(t) + m(t)\bar{a}(t). \tag{2.1.20}$$

Jos hiukkasen massa pysyy vakiona, on $m'(t) = 0$ kaikilla t, joten saadaan tutumpi (mutta yleisessä tapauksessa epäpätevä!) yhtälö $\bar{F}(t) = m\bar{a}(t)$. △

Newtonin toinen laki antaa siis yhtälön, josta hiukkasen liikkeen voi ratkaista, jos tunnetaan voima ajan funktiona sekä hiukkasen paikka ja nopeus jollain alkuhetkellä. Yhtälö (2.1.20) on tarkkaan ottaen differentiaaliyhtälö, ja juuri Newtonin toisen lain vuoksi päädytään mekaniikassa helposti tilanteisiin, jossa differentiaaliyhtälö pitäisi osata ratkaista.

HT 2.4. Jos vakiomassaiseen hiukkaseen vaikuttaa vakiovoima, sen kiihtyvyys on vakio. Jos hiukkasen kiihtyvyys on vakio $\bar{a}$ sekä alkuhetkellä tiedetään $\bar{v}(0) = \bar{v}_0$ ja $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$, mikä on sen paikka ajan funktiona? Jos vektorit tuntuvat vaikeilta, ajattele asiaa ensin yksiulotteisena. △

Newtonin toisesta laista saadaan myös impulssiperiaate (yksi muotoilu sille):

Laki 2.12 (Impulssiperiaate)**.** Olkoon $t_1 < t_2$ jotkin kaksi ajanhetkeä. Tutkitaan hiukkasta, johon vaikuttaa voima $\bar{F}(t)$. Aikavälillä $t_1 \dots t_2$ hiukkasen liikemäärän muutos on

$$\bar{p}(t_2) - \bar{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}(t)\mathrm{d}t. \tag{2.1.21}$$

Erityisesti törmäystilanteessa, jossa voima poikkeaa nollasta vain lyhyellä aikavälillä $t_1 \dots t_2$, on hiukkasen liikemäärän muutos koko törmäysprosessin aikana $\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}(t)\mathrm{d}t$. △

Todistus. Käyttämällä analyysin peruslausetta[**TODO: Onko opetettu?**] saadaan

$$\bar{p}(t_2) - \bar{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \bar{p}'(t)\mathrm{d}t. \tag{2.1.22}$$

Tulos seuraa nyt Newtonin toisesta laista. □

Esimerkki 2.13. [**TODO: Laskuesimerkkejä.**] Voima ja massa tunnetaan → liike. Liike ja voima tunnetaan → massa. △

2.1.4 Newtonin kolmas laki

Tarkastellaan kahta hiukkasta (nimiltään 1 ja 2, joiden paikat ovat $\bar{x}_1(t)$ ja $\bar{x}_1(t)$ sekä nopeudet, kiihtyvyydet, massat ja liikemäärät vastaavasti), jotka vuorovaikuttavat. Newtonin toisen lain mukaan hiukkanen 2 kohdistaa hiukkaseen 1 voiman; merkitään tätä

$\bar{F}_{2\to 1}(t)$. Vastaavasti hiukkasen 1 hiukkaseen 2 kohdistamaa voimaa merkitään $\bar{F}_{1\to 2}(t)$. Oletetaan, ettei muita vuorovaikutuksia ole. Tällöin Newtonin toisen lain nojalla

$$\bar{F}_{2\to 1}(t) = \bar{p}_1'(t) \quad \text{ja} \quad \bar{F}_{1\to 2}(t) = \bar{p}_2'(t). \tag{2.1.23}$$

Newtonin ensimmäisen ja toisen lain perusteella näille voimille ei saada mitään yhteyttä. Tällainen yhteys kuitenkin on, ja se kuuluu yksinkertaisuudessaan seuraavasti:

Laki 2.14 (Newtonin kolmas laki)**.** Tarkastellaan hiukkasta inertiaalikoordinaatistossa. Kun hiukkaset 1 ja 2 vuorovaikuttavat keskenään, kohdistaa hiukkanen 2 hiukkaseen 1 voiman $\bar{F}_{2\to 1}(t)$ ja hiukkanen 1 hiukkaseen 2 voiman $\bar{F}_{1\to 2}(t)$. Näille voimille pätee

$$\bar{F}_{1\to 2}(t) = -\bar{F}_{2\to 1}(t), \tag{2.1.24}$$

eli voimat ovat yhtä suuret ja vastakkaismerkkiset. △

Tästä seuraa heti, ettei hiukkanen voi "liikuttaa itseään", sillä $\bar{F}_{1\to 1}(t) = -\bar{F}_{1\to 1}(t)$:

Huomautus 2.15. Inertiaalikoordinaatistossa hiukkasen itseensä kohdistama voima on nolla. △

Näin on Newtonin mekaniikan pohja valettu Newtonin lakien 2.8, 2.10 ja 2.14 muodossa. Näitä lakeja ei voi johtaa toisistaan, mutta sen sijaan näistä laiesta voi päätellä lisää lakeja, joista on paljon hyötyä. Erityisen oleellisia ovat säilymislait 2.16 ja 2.21 (myös 2.23 ja omaksi periaatteekseen yleistetty yleinen energian säilymislaki 2.26), jotka johdetaan seuraavaksi.

Laki 2.16 (Liikemäärän säilymislaki)**.** Tarkastellaan inertiaalikoordinaatistossa hiukkasjoukkoa, jossa on n hiukkasta, jotka on nimetty luvuilla $1, 2, \ldots, n$. Merkitään hiukkasten liikemäärien summaa eli kokonaisliikemäärää $\bar{P}$:llä

$$\bar{P}(t) = \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i(t). \tag{2.1.25}$$

Jos hiukkaset vuorovaikuttavat vain keskenään, eli *hiukkasjoukkoon ei kohdistu ulkoisia voimia*, niin kokonaisliikemäärä on vakio (eli ei riipu ajasta). △

Todistus. Merkitään hiukkasen j hiukkaseen i kohdistamaa voimaa (Newtonin toisen lain mukaan tällainen löytyy) $\bar{F}_{j\to i}(t)$. Hiukkaseen i kohdistuva kokonaisvoima on Newtonin toisen lain mukaan

$$\bar{F}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{j\to i}(t), \tag{2.1.26}$$

missä siis huomautuksen 2.15 nojalla $\bar{F}_{i\to i}(t) = 0$.

Newtonin toinen laki kertoo, että

$$\bar{p}_i'(t) = \bar{F}_i(t), \tag{2.1.27}$$

joten (summan derivaatta on derivaattojen summa)

$$\begin{aligned}\bar{P}'(t) &= \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i'(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_{j\to i}(t).\end{aligned} \tag{2.1.28}$$

Kaikilla $i, j = 0, 1, \ldots, n$ esiintyy voima $\bar{F}_{j\to i}(t)$ tasan yhden kerran yllä olevassa summassa. Toisaalta Newtonin kolmannen lain nojalla $\bar{F}_{j\to i}(t) + \bar{F}_{i\to j}(t) = 0$, joten ryhmittelemällä summa sopivasti pareiksi saadaan[4] $\bar{P}'(t) = 0$. Koska näin on kaikilla t, on $\bar{P}$ vakio. □

Huomaa, että edellä saatu tulos ei riipu siitä, muuttuvatko hiukkasten massat ajan mittaan vai ovatko ne vakioita.

Joskus liikemäärä säilyy vain "osittain", mutta siitäkin tiedosta voi olla iloa. Valaistaan tätä muutamalla esimerkillä.

Esimerkki 2.17. Unohdetaan gravitaatio hetkeksi. Pallo törmää raskaaseen ja suoraan seinään (joka siis pysyy hyvin tarkasti paikallaan), seinä kohdistaa kosketuksen aikana palloon voiman, joka on kohtisuorassa seinää vastaan. Oletetaan, ettei pallo vuorovaikuta minkään muun kuin seinän kanssa. Newtonin toisen lain (tai impulssiperiaatteen 2.12) mukaan pallon liikemäärän muutos on täten myöskin kohtisuorassa seinää vastaan. Täten liikemäärän seinän suuntainen komponentti (eli liikemäärän projektio seinään) pysyy vakiona. △

Esimerkki 2.18. Maan pinnan lähellä gravitaatio toimii oleellisesti siten, että jokaiseen hiukkaseen kohdistuu alaspäin suuntautuva voima, joka on verrannollinen hiukkasen massaan. Tätä tutkitaan lähemmin kohdassa 2.4.1. Tarkastellaan joukkoa hiukkasia, jotka heitetään maan pinnalta ylös ja jotka vuorovaikuttavat keskenään. Niihin ei kohdistu gravitaation lisäksi ulkoisia voimia.

---

[4] Voi päätellä näinkin: Merkitään lyhyesti $\bar{F}_{j\to i}(t) = F_{ji}$. Summausjärjestystä vaihtamalla saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} F_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} F_{ji}. \tag{2.1.29}$$

Vaihtamalla summausindeksien nimet[**TODO: Onko tätä perusteltu matemaattisten apuvälineiden prujussa?**] saadaan toisaalta

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} F_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} F_{ij}. \tag{2.1.30}$$

Koska Newtonin kolmannen lain mukaan $F_{ij} = -F_{ji}$, niin yhdistämällä yllä olevat tulokset saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} F_{ji} = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} F_{ji}, \tag{2.1.31}$$

joten kyseinen summa on nolla.

Tällöin toistamalla lain 2.16 todistuksessa esitetty päättely pienin muutoksin nähdään, että kokonaisliikemäärän vaakasuuntainen komponentti (eli liikemäärän projektio maan pinnalle, jos maa on tasainen) säilyy. Sen sijaan pystysuuntainen kokonaisliikemäärä ei säily, sillä hiukkasjoukkoon vaikuttaa ulkoisia pystysuuntaisia voimia. △

Lisäksi saadaan odotettu tulos:

Laki 2.19 (Massan säilymislaki yhdelle hiukkaselle)**.** Inertiaalikoordinaatistossa hiukkasen, johon ei kohdistu vuorovaikutuksia, massa on vakio. △

Todistus. Vuorovaikutusten puuttuessa on Newtonin ensimmäisen lain mukaan hiukkasen nopeus vakio ja Newtonin kolmannen lain mukaan liikemäärä vakio. Siispä myös massa on vakio. □

2.1.5 Konservatiiviset voimat

Newtonin laeissa ei asetettu rajoituksia sille, millainen hiukkaseen kohdistuva voima voi olla. Tarkastellaan nyt oleellista erikoistapausta.

Määritelmä 2.20. Hiukkaseen kohdistuva voima $\bar{F}$ on *ajasta riippumaton konservatiivinen voima*, jos $\bar{F}$ riippuu vain paikasta eli $\bar{F} = \bar{F}(\bar{x})$ ja on olemassa sellainen funktio $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, että

$$\bar{F}(\bar{x}) = -\nabla U(\bar{x}). \tag{2.1.32}$$

Funktiota U sanotaan voiman $\bar{F}$ *potentiaaliksi.* △

Laki 2.21 (Energian säilymislaki yhdelle hiukkaselle)**.** Tarkastellaan inertiaalikoordinaatistossa vakiomassaista hiukkasta, johon vaikuttava kokonaisvoima on ajasta riippumaton konservatiivinen voima, jonka potentiaali on U. Määritellään hiukkasen *kokonaisenergia*

$$E(t) = U(\bar{x}(t)) + \frac{1}{2}m\,|\bar{v}(t)|^2\,. \tag{2.1.33}$$

Tällöin $E'(t) = 0$ eli hiukkasen kokonaisenergia säilyy. △

Todistus. Newtonin toinen laki voidaan nyt kirjoittaa muotoon

$$m\bar{v}'(t) = -\nabla U(\bar{x}(t)). \tag{2.1.34}$$

Otetaan molemmista puolista pistetulo vektorin $\bar{v}(t) = \bar{x}'(t)$ kanssa, jolloin saadaan

$$m\bar{v}(t)\cdot\bar{v}'(t) = -\bar{x}'(t)\cdot\nabla U(\bar{x}(t)). \tag{2.1.35}$$

Tulon derivointisäännön [**TODO: Onko kerrottu vektorimuodossa?**] mukaan

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\bar{v}(t)|^2 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{v}(t)\cdot\bar{v}(t))\\ &= \bar{v}'(t)\cdot\bar{v}(t) + \bar{v}(t)\cdot\bar{v}'(t)\\ &= 2\bar{v}(t)\cdot\bar{v}'(t)\end{aligned} \tag{2.1.36}$$

ja toisaalta sisäkkäisten funktioiden derivointisäännön (eli ketjusäännön) [**TODO: Onko kerrottu vektorimuodossa?**] mukaan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(\bar{x}(t)) = \bar{x}'(t) \cdot \nabla U(\bar{x}(t)). \tag{2.1.37}$$

Sijoittamalla nämä yhtälöön (2.1.35) saadaan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\left|\bar{v}(t)\right|^2\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(\bar{x}(t)), \tag{2.1.38}$$

joten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\left|\bar{v}(t)\right|^2 + U(\bar{x}(t))\right) = 0. \tag{2.1.39}$$

Vertaamalla kokonaisenergian määritelmään huomaa, että tässä lukeekin $E'(t) = 0$. Kokonaisenergia siis säilyy □

Samaan tapaan saadaan oleellinen tulos:

Huomautus 2.22. Tutkitaan kahta vakiomassaista hiukkasta (nimiltään 1 ja 2), jotka vuorovaikuttavat vain keskenään. Oletetaan, että

$$\bar{F}_{1\to 2}(t) = +\nabla U(\bar{x}_1(t) - \bar{x}_2(t)) \tag{2.1.40}$$

ja

$$\bar{F}_{2\to 1}(t) = -\nabla U(\bar{x}_1(t) - \bar{x}_2(t)), \tag{2.1.41}$$

missä U on jokin potentiaali[5].

Merkitään $U(t) = U(\bar{x}_1(t) - \bar{x}_2(t))$ sekä $K_1(t) = \frac{1}{2}m_1\left|\bar{v}_1(t)\right|^2$ ja $K_2(t) = \frac{1}{2}m_1\left|\bar{v}_2(t)\right|^2$. Tällöin kokonaisenergia

$$E(t) = U(t) + K_1(t) + K_2(t) \tag{2.1.42}$$

säilyy. △

Todistus. Merkintöjen siistimiseksi jätetään nyt aikariippuvuudet merkitsemättä.

Newtonin toisen lain mukaan on nyt

$$\nabla U(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \bar{p}_2' \tag{2.1.43}$$

ja kolmannen lain mukaan $\bar{p}_2' + \bar{p}_1' = 0$.

Lasketaan:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \\
&= (\bar{x}_1' - \bar{x}_2') \cdot \nabla U(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \\
&= (\bar{x}_1' - \bar{x}_2') \cdot \bar{p}_2' \\
&= (\bar{x}_1' - \bar{x}_2') \cdot (\bar{p}_2' - 0) \\
&= (\bar{x}_1' - \bar{x}_2') \cdot (\bar{p}_2' - \frac{1}{2}(\bar{p}_2' + \bar{p}_1')) \\
&= \frac{1}{2}(\bar{x}_1' - \bar{x}_2') \cdot (\bar{p}_2' - \bar{p}_1') \\
&= \frac{1}{2}(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \cdot (m_2\bar{a}_2 - -m_1\bar{a}_1).
\end{aligned} \tag{2.1.44}$$

[5]Etumerkkiero johtuu siitä, että kun derivoidaan muuttujan $\bar{x}_2$ suhteen funktiota $U(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$, saadaan sisäfunktion derivaatasta miinusmerkki. Huomaa, että Newtonin kolmas laki pätee: $\bar{F}_{1\to 2}(t) = -\bar{F}_{2\to 1}(t)$.

Toisaalta

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K_1 + K_2) = \frac{1}{2}m_1' \left|\bar{v}_1\right|^2 + \frac{1}{2}m_2' \left|\bar{v}_2\right|^2 . \tag{2.1.45}$$

Yhdistämällä yhtälöt (2.1.44) ja (2.1.45) saadaan

$$\begin{aligned} 2E' &= (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \cdot (m_2\bar{a}_2 - m_1\bar{a}_1) \\ &\quad + 2m_1\bar{v}_1 \cdot \bar{a}_1 + 2m_2\bar{v}_2 \cdot \bar{a}_2 \\ &= m_1\bar{a}_1 \cdot (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + m_2\bar{a}_2 \cdot (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) \\ &= (m_1\bar{a}_1 + m_2\bar{a}_2) \cdot (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) \\ &= (\bar{p}_1' + \bar{p}_2') \cdot (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.1.46}$$

Siispä kokonaisenergia todella säilyy. □

Edellisen huomautuksen tulos pätee useammankin hiukkasen järjestelmälle, kunhan hiukkasten väliset vuorovaikutukset ovat kyseistä muotoa. Tästä saadaan hiukkasjärjestelmälle energian säilymislaki:

Laki 2.23 (Energian säilymislaki hiukkasjärjestelmälle)**.** Tarkastellaan inertiaalikoordinaatistossa n:n vakiomassaisen hiukkasen järjestelmää, jossa hiukkasten väliset voimat ovat muotoa

$$\bar{F}_{i\to j}(t) = -\nabla U_{ij}(\bar{x}_j(t) - \bar{x}_i(t)), \tag{2.1.47}$$

missä potentiaaleille U_{ij} pätee $\nabla U_{ij}(\bar{y}) + \nabla U_{ji}(\bar{y}) = 0$ ja $U_{ii}(\bar{y}) = 0$. Järjstelmän kineettisen kokonaisenergian

$$K(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}m_i \left|\bar{v}_i(t)\right|^2 \tag{2.1.48}$$

ja potentiaalienergian

$$U(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} U_{ij}(\bar{x}_j(t) - \bar{x}_i(t)) \tag{2.1.49}$$

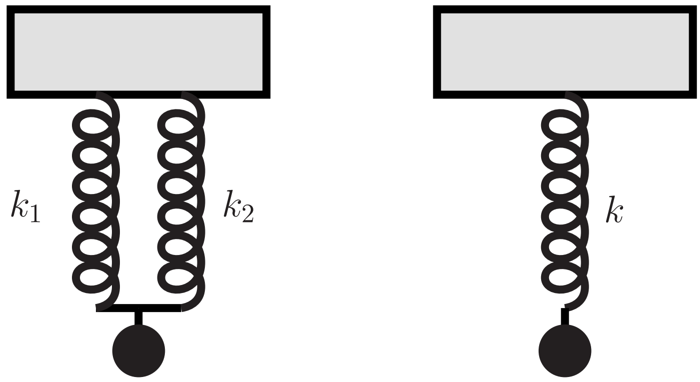
summa $E(t) = K(t) + U(t)$ eli kokonaisenergia säilyy. △

Edellisten tulosten valossa näyttää siltä, että seuraavasta määritelmästä voi olla hyötyä:

Määritelmä 2.24. Hiukkasen, jonka nopeus on $\bar{v}(t)$ ja massa $m(t)$, *liike-energia* on $K(t) = \frac{1}{2}m(t)\left|\bar{v}(t)\right|^2$. △

Esimerkki 2.25. Gravitaatiovuorovaikutus (ks. kohta 2.4.1) on juuri laissa 2.23 olevaa muotoa, joten kokonaisenergia säilyy. △

Edellä johdettiin lait 2.21 ja 2.23 lähtien Newtonin laeista. Tavallisissa mekaniikana sovelluksissa nämä lait riittävät hyvin energiatarkasteluiden tekemiseen, joten energian säilymislakia ei tarvitse erikseen vaatia. Kuitenkin näyttää, että energia säilyy aina, joten julistetaan seuraava (jota *ei* voi johtaa Newtonin laeista):



Kuva 2.1: Kaksi rinnakkain olevaa jousta toimii samoin kuin yksi yksinäinen jousi, kunhan jousivakio k on valittu sopivasti.

Laki 2.26 (Energian säilymislaki)**.** Inertiaalikoordinaatistossa ja ulkoisten voimien puuttuessa hiukkasjärjestelmän kokonaisenergia säilyy. △

Ongelmana tässä laissa on, ettemme osaa määritellä kokonaisenergiaa yleisessä tilanteessa. Emme kuitenkaan anna tämän häiritä; kun energia määritellään sopivasti, näyttää energian säilymislaki todellakin aina pätevän.

Newtonin mekaniikan tavallisesti kuvaamat ilmiöt voidaan useimmiten selitttää kahdella perusvuorovaikutuksella: gravitaatiolla ja sähköisellä vuorovaikutuksella (sisältäen mm. kaikki kosketusvoimat kuten kitkat ja tukivoimat). Näitä vuorovaikutuksia voi kuvata voimalla, joka saadaan edellä esitettyyn tapaan potentiaalista, joten kokonaisenergia liike-energian ja potentiaalienergian summana todella aina säilyy. Osa liike-energiasta voi siirtyä esimerkiksi kitkan vuoksi tutkittavalta esineeltä pinnan ja ilman molekyyleihin, ja tässä muodossa oleva liike-energia on monesti mukavampi tulkita lämmöksi.

2.1.6 Esimerkkejä

[**TODO: Esimerkkejä.**] muuttavamassainen raketti, harmoninen värähtelijä, kitka, efektiivinen liikelaki ($F = Cv$, voiko $F = ma$ olla efektiivinen?), jouset (systeemin korvaaminen yksinkertaisemmalla)...

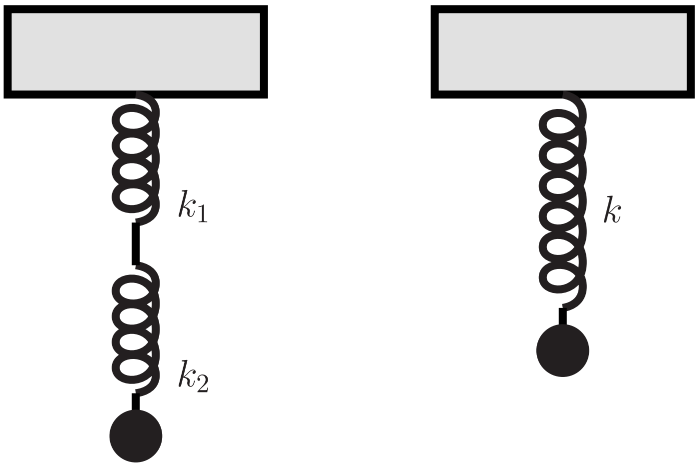
Monesti fysikaalisissa malleissa on mahdollista korvata hankala järjestelmä yksinkertaisemmalla ilman, että järjestelmän käytös muuttuu. Tutkitaan tätä ideaalisten jousien tapauksessa.

HT 2.5. Tutkitaan kuvan 2.1 mukaisia jousisysteemejä, joiden päässä roikkuu samanlainen punnus. Oletetaan, että systeemit käyttäytyvät samoin, eli jos punnuksia poikkeutetaan tasapainoasemastaan yhtä paljon, niihin kohdistuu yhtä suuri voima. *Osoita*, että tässä tilanteessa yksinkertaistetun systeemin (jossa on vain yksi jousi) jousivakiolle pätee

$$k = k_1 + k_2. \tag{2.1.50}$$

Tarkastellaan sitten kuvan 2.2 mukaisia systeemejä samalla tavoin. *Osoita*, että nyt päteekin

$$k = (k_1^{-1} + k_2^{-1})^{-1}. \tag{2.1.51}$$



Kuva 2.2: Kaksi peräkkäin olevaa jousta toimii samoin kuin yksi yksinäinen jousi, kunhan jousivakio k on valittu sopivasti.

Yleistetään sitten kuvan 2.1 tapausta niin, että rinnakkain on n jousta, joiden jousivakiot ovat k_1, k_2, $\ldots$, k_{n-1} ja k_n. *Perustele*, miksi tässäkin tilanteessa systeemi voidaan korvata yhdellä jousella, ja että sen jousivakioksi tulee

$$k = k_1 + k_2 + \ldots k_{n-1} + k_n. \tag{2.1.52}$$

Yleistetään vastaavasti kuvan 2.2 tilannetta. *Perustele*, että korvaaminen onnistuu nytkin ja jousivakioksi saadaan

$$k = (k_1^{-1} + k_2^{-1} + \ldots k_{n-1}^{-1} + k_n^{-1})^{-1}. \tag{2.1.53}$$

$\triangle$

HT 2.6. Edellä laskettujen yksinkertaistusmenetelmien avulla voidaan korvata monimutkaisenkin näköisiä jousisysteemejä yhdellä ainoalla jousella. Tämä onnistuu vaiheittain korvaamalla osasysteemejä yksinkertaisemmilla.

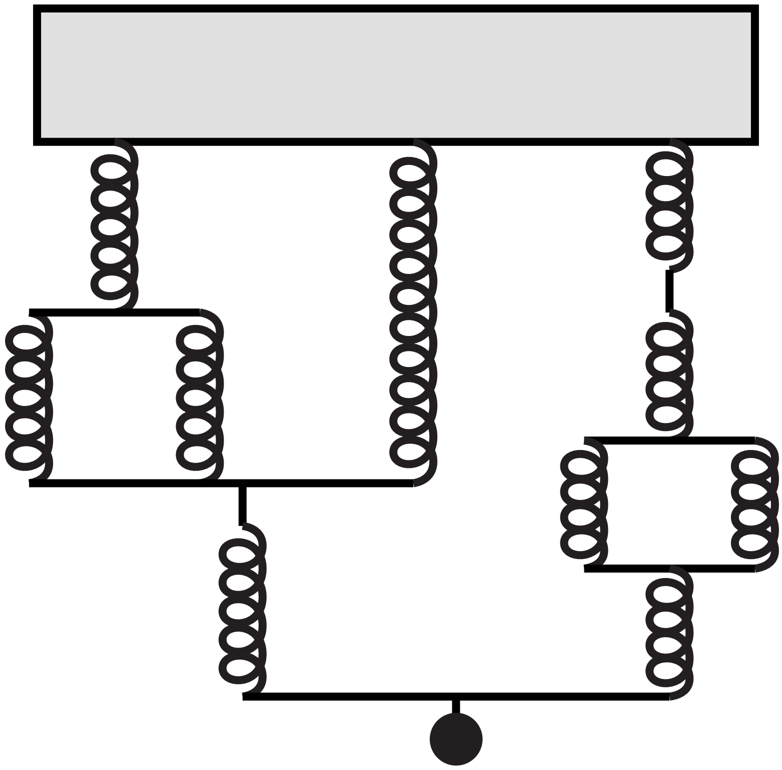
Tutkitaan kuvan 2.3 mukaista jousisysteemiä, jossa jokaisen yksittäisen jousen (niitä on 10) jousivakio on q. *Päättele*, että tämäkin systeemi voidaan korvata yhdellä jousella, ja *laske*, mikä on tämän jousen jousivakio k. Ilmaise tulos jousivakion q avulla. $\triangle$

Kappaleen, jonka massa on m, liikettä kuvailee Newtonin mekaniikassa tuttu laki[6] (Newtonin toinen laki)

$$F = ma, \tag{2.1.54}$$

missä F on kappaleeseen kohdistuva voima ja a sen kiihtyvyys. Voima on siis suoraan verrannollinen liikutettavan kappaleen kiihtyvyyteen. Arkikokemus taas monissa tilanteissa näyttää, että voima on jollain tavalla verrannollinen nopeuteen: esimerkiksi vedessä liikkuva kappale näyttää putoavan alaspäin vakionopeudella tasaisen kiihtymisen sijaan. Yritämme nyt ymmärtää, miksi näin käy.

[6] Tutkimme tilannetta yksinkertaisuuden vuoksi nyt yhdessä ulottuvuudessa.



Kuva 2.3: Tämäkin hirvitys voidaan korvata yhdellä jousella.

HT 2.7. Nesteessä hitaasti liikkuvaan kappaleeseen vaikuttaa vastusvoima

$$F_v = -Cv, \tag{2.1.55}$$

missä C on jokin kappaleen muodosta ja koosta sekä nesteen ominaisuuksista riippuva positiivinen vakio. Jos vastusvoiman lisäksi kappaleeseen vaikuttaa jokin ulkoinen voima F_u, saadaan yhdistämällä yhtälöt (2.1.54) ja (2.1.55) yhtälö $ma = -Cv + F_u$. Jos sekä nopeus että kiihtyvyys riippuvat ajasta mutta F_u on vakio, kirjoitamme edellisen muotoon $ma(t) = -Cv(t) + F_u$.

Kiihtyvyys on määritelmän mukaan nopeuden aikaderivaatta[7]: $a(t) = v'(t)$. Näin ollen saamme differentiaaliyhtälön

$$mv'(t) = -Cv(t) + F_u. \tag{2.1.56}$$

Seuraavaksi ratkaisemme tämän differentiaaliyhtälön, eli etsimme sellaisen funktion $v(t)$, joka toteuttaa ehdon (2.1.56). Lisäksi vaadimme ratkaisulta, että alkuhetkellä $t = 0$ nopeus on jokin annettu v_0. Kun siis tiedämme kappaleen nopeuden hetkellä $t = 0$ olevan tasan v_0, yritämme yhtälöä (2.1.56) käyttäen päätellä, mikä nopeus on myöhemmin. Teemme valistuneen arvauksen, että ratkaisu on muotoa

$$v(t) = A_1 + A_2 e^{A_3 t}, \tag{2.1.57}$$

[7] Lukiokursseilla on mahdollisesti määritelty keskikiihtyvyys aikavälillä $t_1 \dots t_2$ erotusosamääräksi $\frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}$. Ottammalla raja-arvo $t_2 \to t_1$ saadaan suoraan derivaatan määritelmä: $v'(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}$, joka on tuttu matematiikan kursseilta.

missä A_1, A_2 ja A_3 ovat joitain vakioita. *Laske* tämän funktion derivaatta ja *laske* lausekkeen $mv'(t) + Cv(t) - F_u$ arvo. Jotta funktiomme todella olisi ratkaisu differentiaaliyhtälöön (2.1.56), on tämän lausekkeen oltava nolla kaikilla t. *Päättele* tästä sekä tiedosta $v(0) = v_0$ vakioiden A_1, A_2 ja A_3 arvot. (Hyvää harjoitusta on myös ratkaista yhtälö (2.1.56) alkuehdon $v(0) = v_0$ kanssa käyttämättä yritettä (2.1.57), jos satut tuntemaan jonkin tähän sopivan menetelmän.) △

HT 2.8. Edellisen kohdan lopputuloksena saamme siis ratkaistua nopeuden $v(t)$. Tuloksen pitäisi näyttää tältä:

$$v(t) = \frac{F_u}{C} + (v_0 - \frac{F_u}{C})e^{-Ct/m}. \tag{2.1.58}$$

Perustele, miksi nopeus lähestyy arvoa $v_r = F_u/C$ eli $\lim_{t\to\infty} v(t) = v_r$.

Vertaillaan tätä tulosta yhtälöön (2.1.56), jonka kirjoitamme nyt muotoon $ma = -Cv + F_u$. *Millä* nopeuden v arvolla kiihtyvyys a on nolla? *Miten ja miksi* tämä liittyy edellä laskettuun raja-arvoon?

Tehdään lisäksi tärkeä oletus: nesteen aiheuttama vastusvoima on hyvin suuri, jolloin siis C on suuri. Edellä todettiin, että $\lim_{t\to\infty} v(t) = v_r$. *Perustele* (mahdollisesti sopivin lisäoletuksin), miksi olettamassamme tilanteessa $v(t) \approx v_r$ on hyvinkin tarkka arvio, jo melko pienillä ajoilla. (Tässä ei odoteta tarkkoja laskuja, vaan osoitus siitä, että ymmärrät, mistä on kyse.)

Näin saamme siis yhtälön

$$v \approx F_u/C. \tag{2.1.59}$$

△

HT 2.9. Edellä oletimme, että ulkoinen voima $F_u(t)$ on vakio. Nyt annamme sen muuttua, mutta vain hitaasti. Koska nopeus lähestyy arvoa v_r hyvinkin nopeasti, voimme siis olettaa, että $v \approx v_r$ koko ajan, vaikka v_r muuttuukin. Saamme siis yhtälön $v(t) \approx F_u(t)/C$, jonka voimme (unohtaen likiarvoisuuden) kirjoittaa muotoon

$$F_u(t) = Cv(t). \tag{2.1.60}$$

Jos olisimmekin olettaneet, että vastusvoimaa kuvaava kerroin C on mitättömän pieni (tai jopa $C = 0$), olisimmekin saaneet tutun yhtälön (tässä siis F_u tarkoittaa kappaleeseen vaikuttavia ulkoisia voimia poislukien väliaineen vastuksen tai kitkan):

$$F_u(t) = ma(t). \tag{2.1.61}$$

Vertaile näitä kahta liikeyhtälöä seuraavissa tapauksissa. Millä tavoin kappale putoaa painovoiman vaikutuksesta, kun F_u on vakio? Mitä tapahtuu kappaleelle, joka heitetään ylöspäin? Jos kaksi samanmassaista kappaletta pudotetaan yhtä aikaa samalta korkeudelta, putoaako toinen nopeammin? Jos kyllä, missä tilanteessa molemmat putoavat yhtä nopeasti?

Näyttää siltä, että jos kappale noudattaa liikeyhtälöä (2.1.60), sen liike-energian ja potentiaalienergian summa (siis kokonaisenergia) ei olekaan vakio. *Keksi* esimerkkitilanne, jossa näin käy. *Miksi* energia ei näytä säilyvän? △

HT 2.10. Liikevastus voi olla edellä kuvatun kaltainen muutenkin kuin nesteissä. Myös ilmanvastus ja kitka voivat toimia kuvatulla tavalla. Jos vastusvoima riippuukin nopeudesta jotenkin toisin, esimerkiksi yhtälön $F_v = -K|v|v$ mukaisesti, muuttuu liikeyhtälö (2.1.60) hieman, mutta oleellinen tulos on sama: voima aiheuttaa nopeuden, ei kiihtyvyyttä[8].

Keksi kaksi esimerkkiä arkisista tilanteista, joissa liikeyhtälö (2.1.60) (tai jokin sen kaltainen yhtälö) kuvaa tilannetta paremmin, ja toiset kaksi, joissa liikeyhtälö (2.1.61) on sopivampi. *Keksi* vielä kaksi sellaista tilannetta, jossa kumpikin on huono. Jos tuntuu tarpeelliselta, voit jaotella kappaleeseen vaikuttavat voimat ulkoiseen ja vastusvoimaan F_u ja F_v haluamallasi tavalla. Voit tutkia myös useampiulotteista liikettä; tällöin yllä esitetyt liikeyhtälöt tulevat muotoihinn $\bar{F}_u(t) = C\bar{v}(t)$ ja $\bar{F}_u(t) = m\bar{a}(t)$, kuten voi odottaa. △

2.2 Koordinaatisto ja sen vaihtaminen

Newtonin ensimmäinen laki (laki 2.8 sivulla 10) kertoo, että Newtonin toinen ja kolmas laki pätevät nimenomaan inertiaalikoordinaatistossa. Epäinertiaalisia koordinaatistoja tutkitaan kohdassa 2.5.

2.2.1 Galilei-muunnos

Inertiaalikoordinaatistoja voi olla (ja osoittautuu olevan) useita. Kaikissa niissä voi Newtonien lakien mukaan kuvailla mekaniikkaa. Selvitetään nyt, miten tämä mekaniikan kuvailu voidaan siirtää koordinaatistosta toiseen.

Koordinaatistolla tarkoitetaan tapaa liittää kuhunkin avaruuden pisteeseen koordinaatit ja kuhunkin ajanhetkeen aikakoordinaatti. Hiukkasen paikka ajan funktiona liittyy siis kiinteästi koordinaatiston valintaan. Kun paikka ja aika on määritetty koordinaatistossa K, merkitään paikkaa $\bar{x}_K(t_K)$, ja vastaavasti koordinaatistoa osoittava alaindeksi pidetään mukana nopeuden, kiihdtyvyyden, voiman ja kaikkien muiden suureiden merkinnässä.

Tarkastellaan nyt kahta eri koordinaatistoa K ja L. Molemmissa koordinaatistoissa jokaiselle paikalle ja ajalle löytyy yksikäsitteiset koordinaatit, joten koordinaatiston K paikka ja aika vastaavat yksikäsitteisesti koordinaatiston L paikkaa ja aikaa (joskaan koordinaatit eivät välttämättä ole samat). Tämä vastaavuus voidaan muotoilla funktioiksi: $\bar{x}_K = \bar{x}_K(\bar{x}_L, t_L)$ ja $t_K = t_K(\bar{x}_L, t_L)$. Tutkiaan nyt, millaisia nämä funktiot voivat olla, jos K ja L ovat inertiaalikoordinaatistoja.

Ensimmäinen lähtökohta koskee ajan luonnetta Newtonin mekaniikassa:

Laki 2.27 (Ajan universaalisuus)**.** Aika etenee kaikissa koordinaatistoissa samalla tavalla. Täsmällisemmin, jos muutosta koordinaatistosta L koordinaatistoon K kuvaavat funktiot $\bar{x}_K = \bar{x}_K(\bar{x}_L, t_L)$ ja $t_K = t_K(\bar{x}_L, t_L)$, niin t_K riippuu vain ajasta t_L eli $t_K = t_K(t_L)$ ja lisäksi $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_L} t_K(t_L) = 1$. △

Ajan universaalisuudesta voidaan päätellä, että

$$t_K = t_K(\bar{x}_L, t_L) = t_L + \tau, \tag{2.2.1}$$

[8] Tässä tilanteessa saamme vastaavin oletuksin $F_u(t) = -K|v(t)|v(t)$.

missä τ on jokin vakio. Näin ollen siis aikakoordinaatit t_K ja t_L riippuvat toisistaan siten, että $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_L}t_K = 1$ ja $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_K}t_L = 1$, eikä kumpikaan riipu paikkakoordinaateista lainkaan. Tästä johtuu erityisesti, että kaikille suureille f pätee $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_K}f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_L}f$, eli on yhdentekevää, kumman ajan suhteen derivoidaan. Toteamus, että jokin asia ei riipu ajasta, ei siis muutu siirryttäessä koordinaatistosta toiseen.

Seuraava lähtökohta kuvailee paikkakoordinaattien käyttäytymistä muunnoksissa:

Laki 2.28 (Pituuden universaalisuus)**.** Etäisyys ei riipu koordinaatistosta, jossa se mitataan. Täsmällisemmin, jos muutosta koordinaatistosta L koordinaatistoon K kuvaavat funktiot $\bar{x}_K = \bar{x}_K(\bar{x}_L, t_L)$ ja $t_K = t_K(\bar{x}_L, t_L)$, niin kahdelle millä tahansa hetkellä paikkavektoreille[9] $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ eri koordinaatistoissa mitattuna pätee

$$|\bar{x}_K(\bar{x}_L, t_L) - \bar{y}_K(\bar{y}_L, t_L)| = |\bar{x}_L - \bar{y}_L|\,. \tag{2.2.2}$$

Matemaattisemmin ilmaistuna siis koordinaatistonmuunnoksen antava funktio $\bar{x}_K(\bar{x}_L, t_L)$ riippuu muuttujasta $\bar{x}_L$ isometrisesti eli osittaiskuvaus $\bar{x}_K(\,\cdot\,, t_L)$ on isometria kaikilla t_L. △

Huomautus 2.29. Samaan tapaan kuin pituuden kohdalla isometrian avulla voitaisiin ajan universaalisuus kuvailla sanomalla, että kaikki aikavälit ovat koordinaatistosta riippumattomat (sen lisäksi, ettei aika riipu muista koordinaateista). Tällöin ainoiksi vaihtoehdoiksi jäävät $t_K = t_L + \tau$ ja $t_K = -t_L + \tau$, missä τ on jokin vakio. Ensimmäinen tapaus on ajan universaalisuus laissa 2.27 esittämässämme muodossa. Toinen vaihtoehto vastaa sellaista tilannetta, että aika kulkee "yhtä nopeasti" koordinaatistoissa K ja L, mutta *eri suuntiin.* Esittämämme ajan universaalisuus pitää sisällään siis sekä aikavälien pituuden että ajan suunnan universaalisuuden. △

Seuraava tarkastelu on varsin tekninen, joten sen voi sivuuttaa, jos asia tuntuu liian hankalalta. Tämä päättely esitetään tässä, koska sen tuloksena saatava laki 2.30 (erityisesti määritelmän 2.31 muodossa) on oleellinen. Turhautumisen välttämiseksi on hyvin mahdollista hypätä suoraan määritelmään 2.31.

On mahdollista todistaa, että jos kuvaus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on isometria (eli $|\bar{x} - \bar{y}| = |f(\bar{x}) - f(\bar{y})|$ kaikilla vektoreilla $\bar{x}$ ja $\bar{y}$), niin löytyy sellainen vektori $\bar{c}$ ja sellainen kierto[10] $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, että $f(\bar{x}) = \bar{c} + R(\bar{x})$ kaikilla vektoreilla $\bar{x}$.

Näin ollen saadaan pituuden universaalisuuslaista pääteltyä, että kullakin ajanhetkellä t_L löytyy sellainen vektori $\bar{c}(t_L)$ ja kierto R_{t_L}, että

$$\bar{x}_K(\bar{x}_L, t_L) = \bar{c}(t_L) + R_{t_L}(\bar{x}_L). \tag{2.2.3}$$

Kuvaus R_{t_L} riippuu siis ajasta t_L. Merkitsemme tämän kuvauksen aikaderivaattaa lyhyesti R'_{t_L}. Huomaa, että tavallisesti derivoitaessa on funktion arvona luku tai vektori, mutta tässä funktion arvona on funktio. Tämä aikaderivaatta voidaan määritellä siten, että

$$R'_{t_L}(\bar{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{R_{t_L+h}(\bar{x}) - R_{t_L}(\bar{x})}{h} \tag{2.2.4}$$

[9] Koordinaatiston muunnossääntö toimii samoin kaikille paikkavektoreille, joten $\bar{y}_K = \bar{y}_K(\bar{y}_L, t_L)$.

[10] Kierto on siis funktio eli kuvaus. Se on vieläpä lineaarikuvaus. Tämä kuvaus siis yksinkertaisesti kiertää koordinaattiakseleita pitäen niiden välillä suorat kulmat. Sallimme tässä, että kierto tekee myös peilauksen. Kiertojen olemukseen emme nyt kuitenkaan paneudu, koska tarvittavien työkalujen kehittäminen olisi tarpeettoman työlästä.

kaikilla $\bar{x}$.[11]

Kun hiukkanen liikkuu koordinaatistossa L siten, että sen paikka on $\bar{x}_L = \bar{x}_L(t_L)$, niin sen nopeus koordinaatistossa K on[12]

$$\begin{aligned} \bar{v}_K(t_K) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_K}\bar{x}_K(t_K) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_l}(\bar{c}(t_L) + R_{t_L}(\bar{x}_L(t_L))) \\ &= \bar{c}'(t_L) + R'_{t_L}(\bar{x}_L) + R_{t_L}(\bar{v}_L(t_L)). \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Jos sekä K että L ovat inertiaalikoordinaatistoja eikä vuorovaikutuksen olemassaolo luonnollisestikaan riipu koordinaatistosta, on Newtonin ensimmäisen lain mukaan tilanne tämä: hiukkanen on koordinaatistossa K tasaisessa liikkeessä jos ja vain jos se on koordinaatistossa L tasaisessa liikkeessä. Siispä $\bar{v}_K$ ei riipu ajasta jos ja vain jos $\bar{v}_L$ ei riipu ajasta. Yllä saatua nopeuksien yhtälöä tutkimalla näkee[13], että $R'_{t_L}(\bar{x}) = 0$ kaikilla $\bar{x}$ (eli kierto R'_{t_L} ei sittenkään riipu ajasta) ja että $\bar{c}'(t_L)$ ei riipu ajasta. Koska kierto ei siis riipu ajasta, merkitään sitä lyhyesti pelkällä R:llä, ja merkitään $\bar{u} = \bar{c}'(t_L)$ (tämäkään ei siis riipu ajasta, joten jätämme ajan kirjoittamatta siihen).

Palataan nyt yhtälöön (2.2.3). Koska $\bar{c}'(t_L) = \bar{u}$ on vakio, niin $\bar{c}(t_L) = \bar{\xi} + t_L\bar{u}$, missä $\bar{\xi}$ on jokin (ajasta riippumaton) vektori. Lisäksi kierto R ei riipu ajasta, joten saamme yhtälön (2.2.3) yksinkertaisempaan muotoon

$$\bar{x}_K = \bar{x}_K(\bar{x}_L, t_L) = \bar{\xi} + t_L\bar{u} + R(\bar{x}_L). \tag{2.2.6}$$

Saimme siis pääteltyä, että koordinaatistonmuunnos toteuttaa yhtälöt (2.2.1) ja (2.2.6). Derivoimalla yhtälöä (2.2.6) (kumman tahansa) ajan suhteen saadaan

$$\bar{v}_K = \bar{u} + R(\bar{v}_L). \tag{2.2.7}$$

Derivoimalla vielä tätäkin saadaan

$$\bar{a}_K = R(\bar{a}_L). \tag{2.2.8}$$

Yhdistetään nyt saadut tulokset koordinaatistonmuunnoslaiksi.

Laki 2.30 (Koordinaatiston muuntaminen)**.** Jos K ja L ovat inertiaalikoordinaatistoja, ja koordinaatistonmuunnosta kuvailevat funktiot $\bar{x}_K = \bar{x}_K(\bar{x}_L, t_L)$ ja $t_K = t_K(\bar{x}_L, t_L)$,

[11]Kierron R_{t_L} (joka siis on lineaarikuvaus) voi ajatella 3×3-matriisiksi, jolloin sen elementit riippuvat ajasta t_L. Kierron aikaderivaatta R'_{t_L} on myös lineaarikuvaus, ja sen elementit ovat R_{t_L}:n elementtien aikaderivaattoja.

[12]Kierron lineaarisuudesta johtuu, että $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_l}R_{t_L}(\bar{x}_L) = R'_{t_L}(\bar{x}_L) + R_{t_L}(\bar{x}'_L(t_L))$.

[13]Esimerkiksi näin: Jos $\bar{x}_L = 0$ on vakio, niin koordinaatistossa L hiukkanen on varmasti tasaisessa liikkeessä. Derivoimalla saadaan $\bar{v}_L = 0$ myös vakioksi, joten $\bar{v}_K(t_K) = \bar{c}'(t_L)$. Koska tämä ei nyt saa riippu ajasta, on vektorin $\bar{c}'(t_L)$ oltava vakio. Jos $\bar{x}_L$ on nollasta poikkeava vakio, niin taas $\bar{v}_L = 0$, joten $\bar{v}_K(t_K) = \bar{c}'(t_L) + R'_{t_L}(\bar{x}_L)$. Jotta tämä olisi vakio, on vektorin $R'_{t_L}(\bar{x}_L)$ oltava vakio, ja koska näin käy riippumatta vakiovektorin $\bar{x}_L$ valinnasta, ei lineaarikuvaus R'_{t_L} riipu ajasta. Täten on olemassa lineaarikuvaukset R ja A siten, että $R_{t_L} = R + t_LA$. Jotta tämä olisi kierto kaikilla ajanhetkillä t_L, on oltava $A = 0$.

niin on olemassa luku τ, vektorit $\bar{\xi}$ ja $\bar{u}$ sekä kierto[14] R siten, että[15]

$$\begin{cases} t_K = t_L + \tau \\ \bar{x}_K = \bar{\xi} + t_L \bar{u} + R(\bar{x}_L) \\ \bar{v}_K = \bar{u} + R(\bar{v}_L) \\ \bar{a}_K = R(\bar{a}_L). \end{cases} \tag{2.2.9}$$

Muunlaiset koordinaatistonmuunnokset eivät säilytä inertiaalisuutta. △

Määritelmä 2.31. Inertiaalikoordinaatistojen K ja L välinen koordinaatistonmuunnos on *Galilei-muunnos*, jos lain 2.30 mukainen kierto R ei tee mitään eli $R(\bar{x}) = \bar{x}$ kaikilla vektoreilla $\bar{x}$. Tällöin laki 2.30 voidaan lausua muodossa

$$\begin{cases} t_K = t_L + \tau \\ \bar{x}_K = \bar{\xi} + t_L \bar{u} + \bar{x}_L \\ \bar{v}_K = \bar{u} + \bar{v}_L \\ \bar{a}_K = \bar{a}_L \end{cases} \tag{2.2.10}$$

sopivilla vakioilla τ, $\bar{\xi}$ ja $\bar{u}$. △

Huomautus 2.32. Yleinen koordinaatistonmuunnos saadaan yhdistämällä Galilei-muunnos ja kierto. Joskus lain 2.30 mukaista muunnosta sanotaan Galilei-muunnokseksi, mutta yksinkertaisuuden vuoksi varaamme tämän nimityksen kierrottomaan tapaukseen. △

Galilei-muunnoksen yhteydessä vakioille τ, $\bar{\xi}$ ja $\bar{u}$ löytyy helposti fysikaalinen tulkinta. Eri koordinaatistoissa kello käy samaan tahtiin, mutta toisessa kello voi olla toista edellä. Vakio τ kertoo, mikä on aika koordinaatistossa K kun aika koordinaatistossa L on nolla. Vektori $\bar{\xi}$ on koordinaatiston L origon sijainti koordinaatistossa K hetkellä $t_L = 0$ (eli $t_K = \tau$). Nopeuden muunnoslaista $\bar{v}_K = \bar{u} + \bar{v}_L$ tulkitaan, että $\bar{u}$ on koordinaatiston L nopeus koordinaatiston K suhteen. Tämän tulkinnan vuoksi otimme käyttöön nämä merkinnät Galilei-muunnokseen liittyville vakioille; kirjain 'u' muistuttaa kirjainta 'v' sekä kreikan kirjaimet 'τ' (tau) ja 'ξ' (ksii) vastaavat latinalaisia kirjaimia 't' ja 'x'.

Huomautus 2.33. Ajan ja pituuden univirsaalisuus näyttäisivät pitävän suurella tarkkuudella paikkansa. Suurilla nopeuksilla (samaa kokoluokkaa valonnopeuden kanssa) liikuttaessa tai voimakkaassa gravitaatiokentässä nämä lait eivät enää pidäkään paikkansa. Yksi suppean suhteellisuusteorian lähtökohdista on *olla olettamatta* ajan tai pituuden unversaalisuutta. Suppeassa ja yleisessä suhteellisuusteoriassa aika muuntuu koordinaatiston vaihdoksissa paljon monimutkaisemmin, eikä aika tai pituus ole enää universaalinen[16]. △

[14] Sallien myös peilaukset. Tarkka ehto on $R \in O(3)$. Ortogonaalista ryhmää $O(3)$ emme ryhdy tutkimaan tässä enempää.

[15] Oikeastaan kaksi jälkimmäistä seuraavat kahdesta ensimmäisestä.

[16] Jotain universaalia sentään on suppeassa suhteellisuusteoriassakin. Tarkastellaan kahta tapahtumaa (eli paikka- ja aikakoordinaateista muodostettua paria) $(\bar{x}, t)$ ja $(\bar{x} + \Delta\bar{x}, t + \Delta t)$. Yllä annettujen universaalisuuslakien nojalla pitäisi Δt:n pysyä koordinaatiston muunnoksessa vakiona ja samoin $|\Delta\bar{x}|$:n. Suppeassa suhteellisuusteoriassa näin ei yleensä käy, mutta sen sijaan lausekkeen $c^2(\Delta t)^2 - |\Delta\bar{x}|^2$ arvo pysyy vakiona. Tässä c on valonnopeus.

2.2.1.1 Muunnos ja käänteismuunnos

Koordinaatiston muunnoslaissa 2.30 ja sitä seuraten Galilei-muunnoksen määritelmässä 2.31 esitettiin koordinaatiston K koordinaatit koordinaatiston L koordinaattien avulla. Tämä onnistuu toki myös toisinpäin; jos koordinaatistoilla K ja L on lain 2.30 mukainen yhteys, niin

$$\begin{cases} t_L = t_K - \tau \\ \bar{x}_L = \tau R^{-1}(\bar{u}) - R^{-1}(\bar{\xi}) - t_K R^{-1}(\bar{u}) + R^{-1}(\bar{x}_K) \\ \bar{v}_K = -R^{-1}(\bar{u}) + R^{-1}(\bar{v}_K) \\ \bar{a}_K = R^{-1}(\bar{a}_K). \end{cases} \tag{2.2.11}$$

Käänteismuunnos on siis samanmuotoinen kuin itse muunnos. Näin pitää ollakin, jotta muunnoslaissa olisi järkeä. Muunnoksesta päästään siis käänteismuunnokseen tekemällä seuraavat muutokset:

$$\begin{cases} \tau \rightsquigarrow -\tau \\ \bar{\xi} \rightsquigarrow \tau R^{-1}(\bar{u}) - R^{-1}(\bar{\xi}) \\ \bar{u} \rightsquigarrow R^{-1}(\bar{u}) \\ R \rightsquigarrow R^{-1}. \end{cases} \tag{2.2.12}$$

Yksinkertaisemmassa Galilei-muunnoksen tapauksessa tämä kääntämisperiaate saa muodon

$$\begin{cases} \tau \rightsquigarrow -\tau \\ \bar{\xi} \rightsquigarrow \tau\bar{u} - \bar{\xi} \\ \bar{u} \rightsquigarrow \bar{u}, \end{cases} \tag{2.2.13}$$

joten Galilei-käänteismuunnos on

$$\begin{cases} t_L = t_K - \tau \\ \bar{x}_L = \tau\bar{u} - \bar{\xi} - t_K\bar{u} + \bar{x}_K \\ \bar{v}_K = -\bar{u} + \bar{v}_K \\ \bar{a}_K = \bar{a}_K. \end{cases} \tag{2.2.14}$$

HT 2.11. *Sijoita* Galilei-muunnoksen yhtälöiden oikealla puolella esiintyviin lausekkeisiin $t_L + \tau$ ja $\bar{\xi} + t_L\bar{u} + \bar{x}_L$ yllä saadut yhtälöt $t_L = t_K - \tau$ ja $\bar{x}_L = \tau\bar{u} - \bar{\xi} - t_K\bar{u} + \bar{x}_K$. Mitä saat ja miksi? △

HT 2.12. Tarkastele yhtälössä (2.2.13) (tai lisähaasteeksi yhtälössä (2.2.12)) esitettyä muunnosperiaatetta, jossa Galilei-muunnoksen parametrit $(\tau, \bar{\xi}, \bar{u})$ muunnetaan toiseen suuntaan menevän muunnoksen vastaaviksi parametreiksi. *Näytä*, että käänteismuunnoksen käänteismuunnoksen parametrit ovat täsmälleen alkuperäisen muunnoksen parametrit. (Täytyyhän toki olla niin, että kun siirrytään koordinaatistosta L koordinaatistoon K ja sitten koordinaatistosta K koordinaatistoon L, päädytään takaisin alkuperäiseen koordinaatistoon L!) △

2.2.1.2 Dopplerin ilmiö

(huomaa koordinaatistojen eriarvoisuus; vrt. suppea suhteellisuusteoria)

2.2.2 Koordinaatistosta riippuvat ja riippumattomat suureet

Olemme saaneet kohdassa 2.2.1 luonnehdittua inertiaalikoordinaatistojen välisen yhteyden: mistä hyvänstä inertiaalikoordinaatistosta pääsee toiseen tekemällä lain 2.30 mukaisen muunnoksen ja toisaalta tämän muunnoslain mukainen laki muuntaa aina inertiaalikoordinaatiston inertiaalikoordinaatistoksi. Tämä laki kuvaa kinematiikan siirtämistä koordinaatistosta toiseen. Lisäksi tarvitaan yksi uusi universaalisuusperiaate ennen kuin päästään siirtämään mekaniikkaa koordinaatistosta toiseen:

Laki 2.34 (Massan universaalisuus)**.** Massa ei riipu koordinaatistosta. Täsmällisemmin, kahden inertiaalikoordinaatiston K ja L välinen muunnos on lain 2.30 mukainen. Kun siis $t_K = t_L + \tau$, niin koordinaatistossa K mitattu massa voidaan lausua koordinaatistossa L mitatun massan avulla näin: $m_K(t_K) = m_L(t_L) = m_L(t_K - \tau)$. △

Huomautus 2.35. Massa on universaali myös suppeassa suhteellisuusteoriassa. (Hiukkasen massa on vakio; se, mitä joskus sanotaan liikemassaksi, on varsinaisesti kokonaisenergia jaettuna valonnopeuden neliöllä.) Jos hiukkasen energia on E ja liikemäärä $\bar{p}$, pätee relaatio

$$c^4 m^2 = E^2 + c^2 |\bar{p}|^2 . \tag{2.2.15}$$

Sen sijaan energia ja liikemäärä riippuvat suppeassa suhteellisuusteoriassa koordinaatistosta kuten Newtoninkin mekaniikassa. △

Jos siis massa riippuu ajasta, täytyy aikariippuvuus muuntaa muunnoslain 2.30 mukaan, kuten odottaa saattaa. Muutoin massa ei riipu koordinaatistosta, erityisesti vakiomassaisen hiukkasen massa on sama vakio kaikissa koordinaatistoissa.

Olemme nyt kuvailleet ajan, paikan, nopeuden, kiihtyvyyden ja massan käyttäytymisen Galilei-muunnoksissa. Tähän mennessä esitellyistä suureista ovat jäljellä liikemäärä, voima ja liike-energia.

Tutkitaan taas koordinaatistoja K ja L. Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi tilannetta, jossa $\tau = 0$; valitsemalla ajan nollahetki toisessa koordinaatistossa uudelleen päästään tähän tilanteeseen. Merkitään yhteistä aikaa lyhyesti t:llä: $t = t_K = t_L$. Tällöin voidaan myös massaa merkitä lyhyesti $m(t)$:llä, sillä se ei riipu koordinaatistosta. Rajoitutaan lisäksi Galilei-muunnoksiin (määritelmä 2.31).

Liikemäärä koordinaatistossa K on määritelmän mukaan $\bar{p}_K(t) = m(t)\bar{v}_K(t)$. Galilei-muunnoksen mukaan

$$\begin{aligned} \bar{p}_K(t) &= m(t)\bar{v}_K(t) \\ &= m(t)(\bar{u} + \bar{v}_L(t)) \\ &= m(t)\bar{u} + \bar{p}_L(t). \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

Derivoimalla yhtälö (2.2.16) ajan suhteen ja käyttämällä Newtonin toista lakia saadaan hiukkaseen kohdistuvalle kokonaisvoimalle

$$\bar{F}_K(t) = m'(t)\bar{u} + \bar{F}_L(t). \tag{2.2.17}$$

Vastaavasti liike-energialle saadaan

$$\begin{aligned} K_K(t) &= \frac{1}{2}m(t)\left|\bar{v}_K(t)\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}m(t)\left|\bar{u}+\bar{v}_L(t)\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}m(t)\left|\bar{u}\right|^2 + m(t)\bar{u}\cdot\bar{v}_L(t) + K_L(t). \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Kootaan nämä tulokset vielä yhteen:

Laki 2.36 (Liikemäärän, voiman ja liike-energian muuntuminen Galilei-muunnoksessa)**.** Määritelmän 2.31 mukaisessa muunnoksessa tilanteessa $\tau = 0$ hiukkasen liikemäärä, voima ja liike-energia muuntuvat seuraavasti:

$$\begin{cases} \bar{p}_K(t) = m(t)\bar{u} + \bar{p}_L(t) \\ \bar{F}_K(t) = m'(t)\bar{u} + \bar{F}_L(t) \\ K_K(t) = \frac{1}{2}m(t)\left|\bar{u}\right|^2 + m(t)\bar{u}\cdot\bar{v}_L(t) + K_L(t). \end{cases} \tag{2.2.19}$$

Erityisesti ne siis riippuvat koordinaatistosta. △

Huomautus 2.37. Yhtälöstä (2.2.17) nähdään, että vakiomassaiselle hiukkaselle hiukkaseen vaikuttava kokonaisvoima ei muutu Galilei-muunnoksessa. Yleisessä koordinaatistonmuunnoksessa (laki 2.30) käy vakiomassaisessa tilanteessa niin, että $\bar{F}_K(t) = R(\bar{F}_L(t))$, kun $\tau = 0$. Jos koordinaatisto kierretään toiseksi, kiertyy luonnollisesti myös voima, mutta tämän lisäksi ei siis voima riipu koordinaatistosta, ellei $m'(t) \neq 0$. △

HT 2.13. Tarkastellaan Galilei-muunnosta kahden inertiaalikoordinaatiston välillä. Olkoon tutkittavana hiukkanen, johon kohdistuu vuorovaikutuksia, mutta jonka massa on vakio. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että $\tau = 0$. Mitkä seuraavista hiukkasen ominaisuuksista riippuvat koordinaatistosta: paikka, nopeus, kiihtyvyys, massa, liikemäärä, liike-energia ja hiukkaseen vaikuttava kokonaisvoima? △

2.2.3 Hiukkasjärjestelmät

Tarkastellaan vielä koordinaatiston vaihtamista useasta hiukkasesta koostuvan hiukkasjärjestelmän kannalta. Aloitetaan ensin yllätyksettömästä laista, joka on kuitenkin yllättävä sikäli, että se on seurausta aiemmista laeista. Tämä tulos on hyvin samankaltainen kuin laki 2.19.

Laki 2.38 (Massan säilymislaki hiukkasjärjestelmälle)**.** Inertiaalikoordinaatistossa hiukkasjärjestelmän, jolla ei ole ulkoisia vuorovaikutuksia, kokonaismassa on vakio. △

Todistus. Olkoon tutkittava inertiaalikoordinaatisto nimeltään K. Siirrytään tästä koordinaatistosta Galilei-muunnoksella koordinaatistoon L siten, että $\bar{u}$ ei ole nolla ja $\tau = 0$. (Vakiolla $\bar{\xi}$ ei tässä ole mitään merkitystä.) Galilei-muunnos muuntaa inertiaalikoordinaatiston inertiaalikoordinaatistoksi, joten L on inertiaalinen.

Olkoon tutkittavassa järjestelmässä n hiukkasta, ja merkitään hiukkasen i ($i = 1, 2, \ldots, n$) liikemäärää koordinaatistossa K merkinnällä $\bar{p}_{K,i}(t)$. Käytetään kokonaisliike-energialle tässä koordinaatistossa merkintää $\bar{P}_K(t)$. Vastaavasti koordinaatistossa L käytetään alaindeksiä L ja massaa merkitään odotetusti $m_i(t)$:llä.

Lain 2.36 liikemäärän muunnosominaisuuden mukaan

$$\begin{aligned}\bar{P}_K(t) &= \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{K,i}(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (m(t)\bar{u} + \bar{p}_L(t)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} m(t)\right)\bar{u} + \bar{P}_L(t).\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

Derivoimalla tätä yhtälöä ajan suhteen saadaan

$$\bar{P}'_K(t) = \bar{u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} m(t)\right) + \bar{P}'_L(t). \tag{2.2.21}$$

Liikemäärän säilymislaki 2.16 pätee molemmissa koordinaatistoissa, joten $\bar{P}'_K(t) = \bar{P}'_L(t) = 0$. Koska lisäksi $\bar{u}$ eroaa nollasta, niin on on oltava

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} m(t)\right) = 0, \tag{2.2.22}$$

eli kokonaismassa säilyy. Tämä pätee molemmissa koordinaatistoissa. □

Huomautus 2.39. Edellä saatu massan säilymislaki on seurausta ajan ja massan universaalisuudesta sekä liikemäärän säilymislaista (lait 2.16, 2.27 ja 2.34). Sitä ei siis tarvitse erikseen olettaa. △

Tarkastellaanpa vielä hiukkasjärjestelmän kokonaisliike-energian riippuvuutta koordinaatistosta. Olkoon inertiaalikoordinaatistossa K hiukkasia n kappaletta, ja erotellaan hiukkaset tuttuun tapaan indeksillä i. Oletetaan, ettei järjestelmällä ole ulkoisia vuorovaikutuksia.

Suoritetaan tästä koordinaatistosta Galilei-muunnos toiseen koordinaatistoon L siten, että määritelmän 2.31 merkinnöin on $\tau = 0$. Valitsemalla erilaiset vektorit $\bar{\xi}$ ja $\bar{u}$ saadaan erilainen koordinaatisto, joten merkitään $L = L(\bar{\xi}, \bar{u})$. Tällä merkinnällä on luonnollisesti $L(0, 0) = K$.

Merkitään $K(\bar{\xi}, \bar{u})(t)$:lla hiukkasjärjestelmän kokonaisliike-energiaa koordinaatistossa $L(\bar{\xi}, \bar{u})$. Merkitään hiukkasjärjestelmän kokonaismassaa $M = \sum_{i=1}^{n} m_i(t)$, joka ei lain 2.38 mukaan riipu ajasta. Käytetään kokonaisliikemäärälle koordinaatistossa K merkintää $\bar{P}_K$

(tämäkään ei riipu ajasta). Yhtälöä (2.2.18) hyödyntäen saadaan pienellä laskulla

$$\begin{aligned}
K(\bar{\xi},\bar{u})(t) &= \sum_{i=1}^{n} K_{L(\bar{\xi},\bar{u}),i}(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(K_{K,i}(t) - \frac{1}{2} m_i(t) \left|\bar{u}\right|^2 - m_i(t)\bar{u}\cdot \bar{v}_{L(\bar{\xi},\bar{u}),i}(t) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(K_{K,i}(t) - \frac{1}{2} m_i(t) \left|\bar{u}\right|^2 - m_i(t)\bar{u}\cdot (\bar{v}_{K,i}(t) - \bar{u}) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(K_{K,i}(t) + \frac{1}{2} m_i(t) \left|\bar{u}\right|^2 - m_i(t)\bar{u}\cdot \bar{v}_{K,i}(t) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} K_{K,i}(t) + \frac{1}{2}\left|\bar{u}\right|^2 \sum_{i=1}^{n} m_i(t) - \bar{u}\cdot \left(\sum_{i=1}^{n} m_i(t)\bar{v}_{K,i}(t) \right) \\
&= K(0,0)(t) + \frac{1}{2}\left|\bar{u}\right|^2 M - \bar{u}\cdot \bar{P}_K \\
&= K(0,0)(t) - \frac{\left|\bar{P}_K\right|^2}{2M} + \frac{1}{2}\left|\bar{u} - \frac{\bar{P}_K}{M}\right|^2 .
\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

Tämä kokonaisliike-energia ei siis riipu lainkaan vektorista $\bar{\xi}$. Se on pienemmillään, kun $\bar{u} = \bar{P}_K/M$ ja millä tahansa muulla $\bar{u}$:n arvolla tätä suurempi. Koordinaatiston K liike-energia on $\frac{\left|\bar{P}_K\right|^2}{2M}$:n verran tätä minimiä suurempi.

Näyttää siis vähän siltä, että $\bar{P}_K/M$ on ikään kuin hiukkasjärjestelmän nopeus koordinaatistossa K; jos nimittäin laitamme koordinaatiston L liikkumaan tällä nopeudella koordinaatiston K suhteen, on järjestelmän kokonaisliike-energia pienin mahdollinen juuri koordinaatistossa L. Koska ulkoisten vuorovaikutusten puuttuessa sekä kokonaisliikemäärä että massa säilyvät (lait 2.16 ja 2.38), on nopeus $\bar{P}_K/M$ vakio, ja kyseinen koordinaatistonmuunnos on siis Galilein muotoa (määritelmä 2.31). Missä mielessä $\bar{P}_K/M$ on sitten järjestelmän nopeus koordinaatistossa K?

Määritelmä 2.40. Hiukkasjoukon (n hiukkasta, indeksinä i) *massakeskipiste(en sijainti)* on

$$\bar{X}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i(t)\bar{x}_i(t)}{\sum_{i=1}^{n} m_i(t)}. \tag{2.2.24}$$

Massakeskipisteen sijainti on siis hiukkasten sijaintien massoilla painotettu keskiarvo. Massakeskipisteen nopeus $\bar{V}(t)$ ja kiihtyvyys $\bar{A}(t)$ määritellään massakeskipisteen paikan aikaderivaattoina määritelmän 2.5 tapaan. △

Massa siis kuvaa jollain tavalla hiukkasen tärkeyttä osana pistejoukkoa. Paremmin massan luonnetta päästään tutkimaan Newtonin gravitaatiolain esittämisen jälkeen huomautuksessa 2.53.

Jos hiukkasjärjestelmän kokonaismassa M säilyy (kuten on ulkoisten vuorovaikutusten puuttuessa (laki 2.38)), niin saadaan määritelmästä 2.40 derivoimalla massakeskipisteen nopeudeksi

$$\bar{V}(t) = \bar{X}'(t) = \bar{P}(t)/M, \tag{2.2.25}$$

missä

$$\bar{P}(t) = \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i(t) \tag{2.2.26}$$

on järjestelmän kokonaisliikemäärä. Siispä massakeskipisteen nopeus on täsmälleen edellä tehdyssä pohdinnassa löydetty ”hiukkasjärjestelmän nopeus” $\bar{P}_K/M$. Lisäksi ulkoisten vuorovaikutusten puutteessa tämä nopeus on vakio. Näin saadaan hyvä havainto:

Huomautus 2.41. Jos hiukkasjärjestelmään ei kohdistu ulkoisia vuorovaikutuksia, niin sen massakeskipiste on tasaisessa liikkeessä eli massakeskipisteen nopeus $\bar{V}$ on vakio. Kun lisäksi vertaa lakeja 2.19 ja 2.38, näyttää siltä, että hiukkasjärjestelmän voi jossain määrin ajatella yhdeksi hiukkaseksi, joka sijaitsee järjestelmän keskipisteessä, jonka massa on järjestelmän kokonaismassa ja liikemäärä järjestelmän kokonaisliikemäärä. △

Hiukkasjärjestelmiä tutkitaan lisää kohdassa 2.3, kun tarkastellaan kappaleiden pyörimistä.

Hiukkasjärjestelmiin liittyy myös ennen tätä kappaletta saatuja tuloksia: liikemäärän säilymislaki (laki 2.16) ja energian säilymislaki (lait 2.21, 2.23 ja 2.26).

2.2.4 Avaruusaika

[TODO: Sijainti ajan funktiona vs. maailmanviiva; valmisteluna suhteellisuusteoriaan.]

2.3 Pyörimismekaniikka

Siirrymme seuraavaksi tarkastelemaan pyörimistä. Edellä lähtökohtana oli yhden hiukkasen tarkastelu, ja hiukkasjoukoille todettiin samankaltaisia ominaisuuksia kuin yksittäisille hiukkasille. Yksi pistemäinen hiukkanen ei voi pyöriä; jos hiukkasen kokoa kasvattaa tai käytettävää matemaattista koneistoa laajentaa, voi hiukkasenkin saada pyörimään, mutta tämä ei ole klassisen mekaniikan kannalta oleellista. Sen sijaan tutkimme hiukkasjoukkoa ja nimitämme sitä kappaleeksi, kun hiukkaset ovat edes jossain määrin sitoutuneet yhteen. Rajoitumme tarkastelemaan jäykkää kappaletta, jossa ”yhteen sitoutuminen” on matemaattisesti yksinkertaisesti ilmaistavissa.

Kun hiukkasjoukko on jäykkä (määrittelemme tämän kohta) ja yksittäiset hiukkaset liikkuvat eri suuntiin, on luontevaa ajatella joukon pyörivän. Tällaisen liikkeen kuvailemiseksi luomme pyörimiskinematiikan (pyörimisliikkeen kuvailu) ja pyörimisdynamiikan (pyörimisliikkeen syiden tutkiminen) eli yhdessä pyörimismekaniikan alkeet. Tämä kuvailu perustuu täysin aiemmin tehtyyn pistehiukkasten ja niistä koostuvien hiukkasjoukkojen mekaniikkaan; mitään uutta fysiikkaa tai perustavanlaatuisia uusia lakeja ei siis ole tulossa, vaan vain uudentyyppisten ilmiöiden kuvailuun paremmin sopiva kieli.

Määritelmä 2.42. Hiukkasjoukko muodostaa *jäykän kappaleen*, jos kunkin hiukkasparin keskinäinen etäisyys pysyy vakiona. Pituuden universaalisuuden (laki 2.28) perusteella jäykkä kappale on jäykkä kappale kaikissa koordinaatistoissa, olivatpa ne inertiaalisia tai eivät. △

Lähdemme liikkeelle Newtonin laeista ja tutkimme, miten pyörimistä voi matemaattisesti kuvailla ja mitä fysikaalisia ilmiöitä siihen liittyy. Yhtään perustavanlaatuista uutta lakia emme pyörimisen yhteydessä esitä, vaan kaikki on seurausta aiemmin esitetyistä laeista. Tutkimme pyörimistä kolmiulotteisessa avaruudessa ja palaamme kohdassa 2.3.2.2 miettimään, miten muissa ulottuvuuksissa käy.

2.3.1 Pyörimiskinematiikka

Pistehiukkasen mekaniikan lähtökohtana oli kuvata hiukkasen paikka ajan funktiona. Pyörimismekaniikassa vastaava lähtökohta on kuvailla jäykän kappaleen asento ajan funktiona.

Mielivaltaisen pyörimisliikkeen kuvailu on jokseenkin mutkikasta, emmekä mene siihen. Rajoitumme tarkastelemaan pyörimisliikettä, jossa pyöriminen tapahtuu muuttumattoman akselin ympäri.

Huomautus 2.43. Rajoittuminen pyörimisliikkeeseen jonkin akselin ympäri ei ole lopulta kovin rajoittavaa. Sopivin oletuksin voidaan osoittaa, että jäykän kappaleen liike näyttää millä hyvänsä hetkellä näyttää pyörimiseltä jonkin akselin ympäri tai tasaiselta liikkeeltä (jossa hiukkasten nopeus ei muutu). Tämän väitteen tarkka sisältö ja todistus sivuutetaan. Tämä olkoon kuitenkin muistutuksena siitä, että valitsemassamme erikoistilanteessa tehdyt tarkastelut ovat avain myös paljon monimutkaisemman liikkeen tutkimiseen. $\triangle$

Mitä sitten tarkoittaa pyöriminen jonkin akselin ympäri? Oletamme mukavuussyistä, että tämä akseli kulkee origon kautta. Kohdassa 2.3.3 mietitään tarkemmin, mitä pyöriminen eri akseleiden ympäri tarkoittaa.

Olkoon $\bar{\omega}$ jokin pyörimisakselin suuntainen vektori, ja tarkastellaan tämän akselin ympäri pyörivää hiukkasjärjestelmää. Olkoon $\hat{\bar{\omega}}$ tämän vektorin suuntainen yksikkövektori. Oletamme, että $\hat{\bar{\omega}}$ ei riipu ajasta.

Varmaankin on oltava niin, että pyörimisakselilla oleva hiukkanen pysyy paikallaan, eli $\bar{v} = 0$ jos $\bar{x}$ on vektorin $\hat{\bar{\omega}}$ suuntainen. Toisaalta kauempana akselista olevan hiukkasen on syytä liikkua nopeammin, jotta se pysyisi lähempänä akselia olevien mukana; kappale ei olisi kovin jäykkä, jos sen uloin kerros ehtisi pyöriä vain kierroksen samalla kuin sisemmät osat pyörivät kaksi kierrosta. Ilmeisesti vauhdin on syytä olla suoraan verrannollinen etäisyyteen. (Tämä sisältää senkin, että pisteessä $-\bar{x}$ nopeuden pitäisi olla yhtä suuri mutta vastakkaissuuntainen kuin pisteessä $\bar{x}$.)

Hiukkasen etäisyyden pyörimisakselista olisi syytä pysyä vakiona. Tällöin myös etäisyys origosta pysyy vakiona, joten paikan ja nopeuden on oltava kohtisuorassa, kuten seuraava tehtävä osoittaa.

HT 2.14. Olkoon $\bar{x}(t)$ jonkin hiukkasen paikka ajan funktiona. Oletetaan, ettei hiukkanen käy origossa. Olkoon $D(t)$ hiukkasen etäisyys origosta hetkellä t. Näytä, että $D'(t) = \bar{x}(t) \cdot \bar{v}(t) / |\bar{x}(t)|$.

Perustele, että jos hiukkasen etäisyys origosta ei muutu, ovat hiukkasen paikka ja nopeus kohtisuorassa. Onko näin myös, jos hiukkanen on origossa? $\triangle$

Pyöriminen vektorin $\hat{\bar{\omega}}$ suuntaisen akselin vaatii ilmeisesti myös, ettei yksikään hiukkanen liiku akselin suuntaisesti. Nopeuden komponentin vektorin $\hat{\bar{\omega}}$ suuntaan on siis oltava nolla, eli $\hat{\bar{\omega}} \cdot \bar{v} = 0$. Tämän voi nähdä myös toisella tavalla, kuten seuraavissa tehtävissä tehdään.

HT 2.15. Olkoon $S(t)$ hiukkasen etäisyys yksikkövektorin $\hat{\bar{\omega}}$ suuntaisesta pyörimisakselista. Perustele geometrisesti, että $S(t)^2 = |\bar{x}(t)|^2 - (\hat{\bar{\omega}} \cdot \bar{x}(t))^2$. △

HT 2.16. Jos hiukkasen etäisyys pyörimisakselista on vakio, edellisen tehtävän perusteella $|\bar{x}(t)|^2 - (\hat{\bar{\omega}} \cdot \bar{x}(t))^2$ on vakio. Toisaalta tekstissä todettiin, että myös $|\bar{x}(t)|$ on vakio. Siispä myös sisätulon $\hat{\bar{\omega}} \cdot \bar{x}(t)$ pitää olla vakio. Kuinka tämä liittyy tulokseen $\hat{\bar{\omega}} \cdot \bar{v} = 0$? △

Olemme siis saaneet seuraavanlaisia ehtoja paikan ja nopeuden välille:

- $\bar{v} = 0$ jos $\bar{x}$ ja $\hat{\bar{\omega}}$ ovat saman (tai vastakkaisen) suuntaiset.
- Nopeus on kohtisuorassa sekä paikkaa että vektoria $\hat{\bar{\omega}}$ vastaan.
- Nopeus on suoraan verrannollinen paikkaan.

Näistä ehdoista seuraa (HT 2.17), että nopeus on vektoreiden $\hat{\bar{\omega}}$ ja $\bar{x}$ ristitulo jollain (vektorista $\bar{x}$ riippumattomalla) kertoimella kerrottuna. Voidaan siis valita vektorin $\bar{\omega}$ pituus siten, että

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{x}. \tag{2.3.1}$$

Jos nopeus riippuu paikasta tällä tavoin, sanomme, että kyseessä on pyörimisliike vektorin $\bar{\omega}$ suuntaisen akselin ympäri. Mitä suurempi vektori $\bar{\omega}$ on, sitä suurempia nopeudet ovat, joten kutsumme sitä pyörimisnopeudeksi. Toteamme tämän vielä määritelmänä.

Määritelmä 2.44. Hiukkasjärjestelmä pyörii *kulmanopeudella* eli *pyörimisnopeudella* $\bar{\omega}$ origon suhteen, jos hiukkasten nopeudet riippuvat paikasta yhtälön

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{x} \tag{2.3.2}$$

mukaan. Kulmanopeus, kuten paikka ja nopeus, voivat riippua ajasta, mutta kulmanopeuden suunnan on oltava vakio. *Pyörimisakseli* on origon kautta kulkeva vektorin $\bar{\omega}$ suuntainen suora. △

HT 2.17. Oletetaan, että vektori $\bar{v}(\bar{x})$ riippuu vektorista $\bar{x}$ lineaarisesti eli $v_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j$, missä a_{ij} ovat reaalilukukertoimia (vektorit ovat nyt siis kolmiulotteisia). (Tämän voi tulkita myös matriisiyhtälöksi $\bar{v} = A\bar{x}$, jos se on tuttua.) Oletetaan, että on jokin yksikkövektori $\hat{\bar{\omega}}$ siten, että $\bar{v}$ on aina kohtisuorassa vektoreita $\bar{x}$ ja $\hat{\bar{\omega}}$ vastaan ja että $\bar{v} = 0$ jos $\bar{x} = \lambda \hat{\bar{\omega}}$ jollekin $\lambda \in \mathbb{R}$ (eli $\bar{x}$ on vektorin $\hat{\bar{\omega}}$ suuntainen). (Huomaa, että näiden ehtojen täytyy päteä kaikilla $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$)

Osoita, että tällöin $\bar{v} = c\hat{\bar{\omega}} \times \bar{x}$, missä $c \in \mathbb{R}$ on jokin luku. (Vihje: Voit hyvin olettaa, että $\hat{\bar{\omega}} = (1, 0, 0)$. Koordinaatiston kiertäminen ei väitteeseen vaikuta. Näytä tässä tilanteessa, että $a_{32} = -a_{23}$ ja muut kertoimet a_{ij} ovat nollia. Valitse lopuksi $c = a_{23}$ ja vertaa saatua lauseketta ristituloon.) △

Vielä on syytä miettiä, että jos hiukkasjärjestelmä pyörii edellä mainitulla tavalla, onko se jäykkä. Niin luulisi olevan, ja tottahan se on.

Laki 2.45 (Pyörivä kappale on jäykkä)**.** Jos hiukkasjärjestelmä pyörii kulmanopeudella $\bar{\omega}(t)$ yllä olevan määritelmän mukaisesti, on hiukkasjärjestelmä jäykkä kappale. △

Todistus. Pitää siis näyttää, että jokaisen pisteparin etäisyys pysyy vakiona. Olkoot $\bar{x}_1(t)$ ja $\bar{x}_2(t)$ kahden järjestelmään kuuluvan hiukkasen paikat. Merkitään näiden hiukkasten etäisyyden neliötä $D(t)$:llä. Nyt siis

$$\begin{aligned} D(t) &= |\bar{x}_1(t) - \bar{x}_2(t)|^2 \\ &= (\bar{x}_1(t) - \bar{x}_2(t)) \cdot (\bar{x}_1(t) - \bar{x}_2(t)) \\ &= \bar{x}_1(t) \cdot \bar{x}_1(t) + \bar{x}_2(t) \cdot \bar{x}_2(t) - 2\bar{x}_1(t) \cdot \bar{x}_2(t). \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Tästä saadaan tulon derivointisääntöä ja pyörimisen määritelmää käyttäen

$$\begin{aligned} D'(t) &= 2\bar{x}_1(t) \cdot \bar{v}_1(t) + 2\bar{x}_2(t) \cdot \bar{v}_2(t) - 2\bar{v}_1(t) \cdot \bar{x}_2(t) - 2\bar{x}_1(t) \cdot \bar{v}_2(t) \\ &= 2(\bar{x}_1(t) - \bar{x}_2(t)) \cdot (\bar{v}_1(t) - \bar{v}_2(t)) \\ &= 2(\bar{x}_1(t) - \bar{x}_2(t)) \cdot (\bar{\omega}(t) \times \bar{x}_1(t) - \bar{\omega}(t) \times \bar{x}_2(t)) \\ &= 2(\bar{x}_1(t) - \bar{x}_2(t)) \cdot [\bar{\omega}(t) \times (\bar{x}_1(t) - \bar{x}_2(t))]. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Ristitulon perusominaisuuksiin kuuluu, että vektorit $\bar{x}_1(t) - \bar{x}_2(t)$ ja $\bar{\omega}(t) \times (\bar{x}_1(t) - \bar{x}_2(t))$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa eli niiden pistetulo on nolla. Siispä $D'(t) = 0$ kaikilla t ja näin ollen pisteiden etäisyys on vakio. □

Samoin kuin nopeuden avulla määritellään kiihtyvyys, määritellään kulmanopeuden avulla kulmakiihtyvyys. Näitä vastaavasti voidaan määritellä myös kulma, mutta tämä osoittautuu hankalammaksi.

Määritelmä 2.46. Jos kappale pyörii kulmanopeudella $\bar{\omega}(t)$ määritelmän 2.44 mukaisesti, niin sen kulmakiihtyvyys on $\bar{\alpha}(t) = \bar{\omega}'(t)$. △

Määritelmä 2.47. Tarkastellaan kulmanopeudella $\bar{\omega}(t)$ määritelmän 2.44 mukaisesti pyörivää kappaletta. Koska pyörimisakseli on vakio, on $\bar{\omega}(t) = \omega(t)\hat{\bar{\omega}}$. Tässä esiintyvä kerroin $\omega(t)$ on *skalaarikulmanopeus.* Aikavälillä $0 \ldots t$ kappale on pyörähtänyt *skalaarikulman*

$$\phi(t) = \int_0^t \omega(s)\mathrm{d}s \tag{2.3.5}$$

verran. Kappaleen tällä välillä pyörähtämä *kulma* on vektori $\bar{\phi}(t) = \phi(t)\hat{\bar{\omega}}$. △

Seuraava harjoitustehtävä perustelee, että näin kulma vastaa kulmanopeutta samalla tavalla kuin paikka vastaa nopeutta. Huomaa, että $\phi(0) = 0$.

HT 2.18. Näytä yllä olevaa määritelmää käyttäen, että kulmasuureille pätee $\phi'(t) = \omega(t)$ ja $\bar{\phi}'(t) = \bar{\omega}(t)$. △

Laki 2.48 (Pyörivän kappaleen asento)**.** Jos kappale pyörii kulmanopeudella $\bar{\omega}(t)$ määritelmän 2.44 mukaisesti, niin hetkellä $t = 0$ kohdassa $\bar{x}_0$ olevan pisteen sijainti saadaan lausekkeesta

$$\bar{x}(t) = \bar{a} + \cos(\phi(t))\bar{b} + \sin(\phi(t))\bar{c}, \tag{2.3.6}$$

missä $\bar{a} = (\bar{x}_0 \cdot \hat{\bar{\omega}})\hat{\bar{\omega}}$, $\bar{b} = \bar{x}_0 - \bar{a}$, $\bar{c} = \hat{\bar{\omega}} \times \bar{b}$ ja $\phi(t)$ on edellisen määritelmän mukainen kiertokulma. △

Todistus. Jos $\bar{x}_0 = 0$, niin $\bar{a} = \bar{b} = \bar{c} = 0$, joten lauseke antaa aivan oikein tiedon $\bar{x}(t) = 0$. Tutkittavaksi jää siis tilanne, jossa $\bar{x}_0 \neq 0$.

Riittää näyttää, että $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ ja $\bar{v}(t) = \bar{\omega}(t) \times \bar{x}(t)$ kaikilla t. Jos nimittäin hiukkasen alkupaikka on oikea ja sen nopeus joka hetkellä oikea (nopeus on määritelmän 2.44 mukaan juuri tämä ristitulo), on se aina oikeassa paikassa[17].

Alkupaikkaa koskeva väite on harjoitustehtävä.

Katsotaan sitten nopeutta. Koska nopeus on paikan derivaatta, saadaan

$$\begin{aligned} \bar{v}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\bar{a} + \cos(\phi(t))\bar{b} + \sin(\phi(t))\bar{c}\right) \\ &= -\phi'(t)\sin(\phi(t))\bar{b} + \phi'(t)\cos(\phi(t))\bar{c} \\ &= \omega(t)(-\sin(\phi(t))\bar{b} + \cos(\phi(t))\bar{c}). \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Toisaalta vektoreiden $\bar{\omega}(t)$ ja $\bar{x}(t)$ ristitulo on (harjoitustehtävän 2.22 perusteella)

$$\bar{\omega}(t) \times \bar{x}(t) = \omega(t)(\cos(\phi(t))\bar{c} - \sin(\phi(t))\bar{b}). \tag{2.3.8}$$

Vertaamalla näitä tuloksia nähdään, että tosiaankin $\bar{v}(t) = \bar{\omega}(t) \times \bar{x}(t)$. □

Huomautus 2.49. Huomaa, että mikään ei muutu, jos $\hat{\bar{\omega}}$ korvataan yksikkövektorilla $-\hat{\bar{\omega}}$. Tällöin ω korvautuu $-\omega$:lla, ja lopulta yllä saatu lauseke sijainnille $\bar{x}(t)$ ei muutu. △

HT 2.19. Näytä, että edellisen lain antamassa lausekkeessa todella on $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$. △

HT 2.20. Oletetaan, että $\bar{x}_0 \neq 0$. Osoita, että yllä olevassa laissa määritellyt $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ ovat kohtisuorassa keskenään ja molemmat lisäksi kohtisuorassa vektorin $\hat{\bar{\omega}}$ kanssa. △

HT 2.21. Käyttäen tehtävässä 2.20 saatua tulosta ja ristitulon ominaisuutta[18]

$$\bar{x} \times (\bar{y} \times \bar{z}) = (\bar{x} \cdot \bar{z})\bar{y} - (\bar{x} \cdot \bar{y})\bar{z} \tag{2.3.9}$$

näytä, että $\hat{\bar{\omega}} \times \bar{c} = -\bar{b}$. △

HT 2.22. Käyttäen tehtävässä 2.21 saatua tulosta ja yllä olevan lain määritelmiä näytä, että

$$\bar{\omega}(t) \times [A(t)\hat{\bar{\omega}} + B(t)\bar{b} + C(t)\bar{c}] = \omega(t)[B(t)\bar{c} - C(t)\bar{b}]. \tag{2.3.10}$$

Tässä $A(t)$, $B(t)$ ja $C(t)$ voivat olla mitä tahansa kerroinfunktioita. △

Yritetään vielä muutaman tehtävän voimin luoda mielikuvaa siitä, mitä kulmanopeusvektori yrittää kertoa ja mitä lain 2.48 vektorit merkitsevät.

HT 2.23. Hyrrä pyörii pöydällä myötäpäivään, eikä pyörimisakseli muutu. Mihin suuntaan osoittaa $\bar{\omega}$? Entä $\bar{\alpha}$? △

HT 2.24. Katsotaan lain 2.48 erikoistapausta. Valitaan $\bar{x}_0 = (0, 2, 3)$ ja $\bar{\omega}(t) = (0, 4 + 3t^2, 0)$. Mitä ovat vektorit $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$? Kirjoita paikan $\bar{x}(t)$ lauseke. △

[17] Tämä on jokseenkin sama asia kuin se, että ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisu on yksikäsitteinen, kun alkuarvo on annettu ja yhtälö riittävän siisti.

[18] **[TODO: Onkohan tämä kerrottu jossain?]**

HT 2.25. Perustele, miksi lain 2.48 vektorit $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ ovat yhtä pitkiä. Onko myös $\bar{a}$ aina yhtä pitkä? Tai edes joskus? △

HT 2.26. Tarkastellaan pyörivää maailmanpyörää, ja asetetaan origo pyörimisakselin toiseen päähän (josta pyörä on kiinni telineessään). Hetkellä $t = 0$ istuudut alimpaan maailmanpyörän vaunuun ja pyörä alkaa pyöriä. Millaisia ovat vektorit $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$? Hahmottele kuva. Hahmottele liikeratasi, kun maailmanpyörä pyörii ympäri. Miten vektorit $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ liittyvät tähän liikerataan? △

Nyt olemme onnistuneen kuvailemaan pyörimiskinematiikkaa riittävästi, ja voimme siirtyä pohtimaan pyörimisliikkeen syitä eli pyörimisdynamiikkaa.

2.3.2 Pyörimisdynamiikka

Tarkastellaan ensin yhtä hiukkasta, jonka massa on $m(t)$. Newtonin toisen lain (laki 2.10) mukaan tähän hiukkaseen vaikuttavalle voimalle $\bar{F}(t)$ pätee

$$\bar{F}(t) = \bar{p}'(t). \tag{2.3.11}$$

Ottamalla ristitulo paikkavektorin $\bar{x}(t)$ kanssa saadaan yhtälö

$$\bar{x}(t) \times \bar{F}(t) = \bar{x}(t) \times \bar{p}'(t). \tag{2.3.12}$$

Toisaalta laskemalla saadaan[19]

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{x}(t) \times \bar{p}(t)) &= \bar{x}'(t) \times \bar{p}(t) + \bar{x}(t) \times \bar{p}'(t) \\ &= \bar{v}(t) \times m(t)\bar{v}(t) + \bar{x}(t) \times \bar{p}'(t) \\ &= \bar{x}(t) \times \bar{p}'(t). \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Yhdistämällä nämä tulokset saadaan

$$\bar{x}(t) \times \bar{F}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{x}(t) \times \bar{p}(t)). \tag{2.3.14}$$

Pysähdytään hetkeksi tulkistemaan tätä tulosta. Ristitulo $\bar{x}(t) \times \bar{p}(t)$ ilmaisee, kuinka erisuuntaisia ja kuinka suuria ovat paikkavektori ja liikemäärävektori. Paikan ja liikemäärän erisuuntaisuus tarkoittaa pyörimistä (koordinaatistomme) origon ympäri. Jos paikka ja liikemäärä osoittavat samaan tai vastakkaiseen suuntaan, tapahtuu liike origosta poispäin tai sitä kohti, eikä tällöin tee mieli puhua pyörimisestä origon ympäri. Jos taas paikka ja liikemäärä ovat toisiaan vasten kohtisuorassa, syntyy hyvinkin mielikuva pyörimisestä, ja ristitulohan on suurimmillaan kerrottavien vektoreiden ollessa kohtisuorassa. Tämä mielikuva antaa aiheen seuraavalle määritelmälle.

Määritelmä 2.50. Jos hiukkasen paikka on $\bar{x}(t)$ ja liikemäärä $\bar{p}(t)$, on niiden ristitulo $\bar{\ell}(t) = \bar{x}(t) \times \bar{p}(t)$ hiukkasen *pyörimismäärä* (origon suhteen).

Hiukkasjärjestelmän pyörimismäärä on sen hiukkasten pyörimismäärien summa. △

[19] Tulon derivointisääntö pätee myös ristitulolle. Huomaa, ettei vektoreiden kertomisjärjestystä pidä kuitenkaan mennä muuttamaan! Lisäksi tässä tarvitaan sitä ristitulon tuttua ominaisuutta, että jokaisen vektorin ristitulo itsensä kanssa on nolla.

Yhtälön (2.3.14) mukaan pyörimismäärän aikaderivaatta on sama kuin paikan ja voiman ristitulo. Tämä kuvailee (samaan tapaan kuin pyörimismäärän kohdalla todettiin yllä) paikan ja voiman suuruutta ja erisuuntaisuutta. Voiman kohdistuminen origoa kohti tai siitä poispäin ei siis kiinnosta, vaan jossain mielessä vain voima origon ympäri. Arkisesti ajatellen tämä vastaa vääntämistä: pullon kierrekorkki aukeaa helpoiten vääntämällä sitä pullon ympäri, ei niinkään työntämällä sitä pullon sisään, puristamalla kokoon tai repimällä sivuun. Tälle voiman aiheuttamalle väännölle annamme nimen seuraavaksi.

Määritelmä 2.51. Jos hiukkasen paikka on $\bar{x}(t)$ ja siihen vaikuttava voima $\bar{F}(t)$, on niiden ristitulo $\bar{M}(t) = \bar{x}(t) \times \bar{F}(t)$ hiukkaseen kohdistuva *voiman momentti* (origon suhteen). △

Yhdistämällä nämä määritelmät ja yhtälö (2.3.14) saadaan siis seuraava tulos.

Laki 2.52 (Newtonin toinen laki pyörimismekaniikassa)**.** Voiman momentti on pyörimismäärän aikaderivaatta eli

$$\bar{M}(t) = \bar{\ell}'(t), \tag{2.3.15}$$

kun pyörimismäärä ja voiman momentti on laskettu inertiaalikoordinaatistossa. △

[TODO: Säilyvät suureet?]

2.3.2.1 Pyörivä jäykkä pistejoukko

Sovelletaan nyt edellä johdettua liikelakia 2.52 kohdassa 2.3.1 esiteltyyn pyörivään kappaleeseen.

[TODO: Tähän päättyy edes jossain määrin valmis osuus.]

Liikeyhtälöt, säilyvät suureet

2.3.2.2 Mitä pyöriminen tarkoittaa eri ulottuvuuksissa?

Tasossa kulma -> skalaariyhtälöt.

2.3.2.3 Pistemekaniikan ja pyörimismekaniikan vertailua

2.3.3 Pyöriminen eri akseleiden ympäri

Hitausmomentti eri akseleiden suhteen

Jäykän kappaleen liike voidaan aina lokaalisti kuvata liikkeenä ja kiertona jonkin akselin ympäri

2.3.3.1 Hitausmomentti eri akseleiden suhteen

2.3.3.2 Prekessio

2.3.4 Esimerkkejä

Esimerkkejä: pyörivien kappaleiden törmäys

2.4 Taivaanmekaniikka

2.4.1 Newtonin gravitaatiolaki

Gaussin laki gravitaatiolle (pistehiukkassysteemi)

Huomautus 2.53. [**TODO: Massan luonteesta**]. Newtonin toinen laki (2.10), universaalisuus (2.34), säilyvyys (2.19, 2.38), hiukkasen tärkeys osana hiukkasjoukkoa (2.40), gravitaatiovaraus. △

n:ssä ulottuvuudessa $U \sim r^{2-n}$, $F \sim r^{1-n}$

2.4.2 Keplerin lait

2.4.3 Laajeneva maailmankaikkeus

Friedmannin yhtälöt

2.4.4 Esimerkkejä

Laskuja Aurinkokunnasta, avaruuden dimension määritys, Schwarzschildin säde

2.5 Pyörivä koordinaatisto

2.5.1 Epäinertiaalinen koordinaatisto

Ei inertiaalinen => sisäisiä voimia

2.5.2 Liike Maapallon pinnalla

Liike Maapallon pinnalla

2.5.3 Johdattelua yleiseen suhteellisuusteoriaan

Yleinen suhteellisuusteoria: kaikki koordinaatistot saman arvoisia (voi liikkua muutenkin kuin pyörimällä ja liikkumalla, aika voi kulkea eri tavoilla eri paikoissa...)

2.5.4 Esimerkkejä

[**TODO: Esimerkkejä.**] Coriolis ja keskipakoisvoima, keskipakois/hakuisvoima, sisäisten voimien potentiaalit, Maapallon muoto, Lagrangen pisteet [http://www.ipho2012.ee/physicscup/phy
solvers-mosaic/4-are-trojans-stable/]?

Erilaiset energiaperiaatteet ovat fysiikassa yleisiä. Tutustumme tässä tehtävässä yhteen: Levossa olevan (riittävän nestemäisen) kappaleen pinnalla potentiaalienergiatiheys on vakio. Kappaleen kokonaisenergia on pienimmillään juuri tässä tilanteessa.

Esimerkiksi veden tapauksessa tämä tarkoittaa sitä, että jos annamme veden asettua lasissa paikoilleen ja siirrämme yhtä vesipisaraa veden pinnalla toiseen paikkaan (lepoon), sen kokonaisenergia ei muutu. Tämä johtaa siihen yllätyksettömään tulokseen, että veden pinta asettuu vaakatasoon. Erikoisemmissa tapauksissa saadaan kuitenkin aikaiseksi erikoisempia muotoja.

HT 2.27. Tarkastellaan m-massaista hiukkasta tasaisesti pyörivässä koordinaatistossa, ja olkoon r sen kohtisuora etäisyys pyörimisakselista. Olkoon tämän koordinaatiston kulmanopeus ω. Jos hiukkanen on tässä pyörivässä koordinaatistossa levossa, *kuinka suuri* liike-energia K sillä on ulkoisessa koordinaatistossa (jonka suhteen pyörivä koordinaatistomme pyörii)? *Entä* pyörivässä koordinaatistossa?

Oletetaan, että hiukkasella on ulkoisessa koordinaatistossa mitattuna potentiaalienergia V. Pyörivässä koordinaatistossa levossa olevan hiukkasen potentiaalienergia on $U = V - K$. *Perustele*, miksi näin on. Jos tämä tuntuu yleisessä tapauksessa vaikealta, voit tarkastella vaikkapa vaakatasossa pyörivää levyä ja sen päällä liikuskelevaa hiukkasta. Jo erikoistapaus, jossa hiukkanen liikkuu kitkatta (ja siis vakionopeudella) ulkoisessa koordinaatistossa pyörimisakselista pois päin, valottaa pyörivässä koordinaatistossa tarkasteltuna, miksi K:n etumerkki on $-$ eikä $+$.

Jos kappale, jonka pinnan muotoa yritämme selvittää, on levossa pyörivässä koordinaatistossa, täytyy tutkia juuri tässä koordinaatistossa hiukkasella olevaa potentiaalienergiaa U. *Kirjoita* pyörivässä koordinaatistossamme levossa olevan hiukkasen energian U lauseke suureiden m, ω, r ja V avulla. △

HT 2.28. Tutkitaan nyt hyvin ohutta (mutta kuitenkin korkeaa ja leveää) suorakulmion mallista lasiastiaa, joka on asetettu tasaisella kulmanopeudella ω pyörivän pöydän päälle siten, että pyörimisakseli kulkee astian läpi. Astiaan kaadetaan vettä (mieluiten värjättyä, jotta se näkyy hyvin) ja annetaan sen asettua lepoon astian suhteen. Kun h on pöydän pinnasta mitattu korkeus ja r etäisyys pyörimisakselista, *osoita*, että veden pinnalla toteutuu yhtälö

$$\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - gh = \text{vakio}. \tag{2.5.1}$$

Mihin muotoon veden pinta asettuu? Selkeimmän kuvan tilanteesta antanee korkeuden h esittäminen etäisyyden r funktiona. *Hahmottele* kuva vedestä astiassa. △

HT 2.29. Tarkastellaan nyt koko Maapalloa. Voimme tulkita koko planeettamme pinnan nesteeksi; muutaman miljardin vuoden aikana näinkin kiinteä kappale on ehtinyt asettua melko tarkasti sellaiseen muotoon, joka minimoi kokonaisenergian.

Käytetään pallokoordinaatteja R, ϕ ja θ, joissa pisteen koordinaatit määräytyvät seuraavasti: R on pisteen etäisyys Maapallon keskipisteestä, ϕ on pituuspiiri ja θ leveyspiiri. Voimme rajata koordinaatit vaikkapa niin, että $R \geq 0$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ja $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.[20]

Tarkastelemalla nyt m-massaista hiukkasta (vaikkapa kiveä) Maapallon pinnalla *osoita*, että Maan pinnalla toteutuu yhtälö

$$\frac{1}{2}\omega^2 R^2 \cos^2(\theta) + \frac{GM}{R} = \text{vakio}, \tag{2.5.2}$$

[20] Jos nämä koordinaatit eivät tunnu selviltä miettimällä ja kartta(pallo)a tutkimalla, voit käydä vilkaisemassa kuvaa osoitteessa `http://mathworld.wolfram.com/SphericalCoordinates.html`, jossa tosin kulmat ϕ ja θ on määritelty päin vastoin kuin tässä.

missä M on Maan massa, G Newtonin gravitaatiovakio ja ω Maan kulmanopeus. Yksinkertaisuuden vuoksi oleta, että Maan massa on keskittynyt keskipisteeseen. Tämä oletus ei vaikuta lainkaan, jos Maapallo on homogeeninen pallo.

Maan napasäde R_n on etäisyys Maan keskipisteestä pohjois- tai etelänavalle ja ekvaattorisäde R_e etäisyys keskipisteestä päiväntasaajalle. Käyttäen yhtälöä (2.5.2) *ratkaise* napasäde muuttujien R_e, M, G ja ω avulla. *Kirjoita* samoja muuttujia käyttäen lauseke $R_e - R_n$:lle, ja *sijoita* siihen lukuarvot $R_e = 6,3781 \times 10^6$ m, $M = 5,9736 \times 10^{24}$ kg, $G = 6,6738 \times 10^{-11}$ kg^{-1}m^{3}s^{-2} ja $\omega = 2\pi/24$ h $= 43200^{-1}\pi$ s^{-1}. *Vertaa* saamaasi tulosta todelliseen arvoon, joka on noin 6378,1 km − 6356,8 km = 21,3 km. Jos tulokset eroavat toisistaan, *mistä* ero johtuu? △

2.6 Jatkuvat kappaleet

2.6.1 Summasta integraaliin

2.6.1.1 Kolmiulotteiset kappaleet

2.6.1.2 Yksi- ja kaksiulotteiset kappaleet

2.6.2 Gravitaatio

2.6.2.1 Gaussin laki gravitaatiolle

Sama laki myös muille samanmuotoisille potentiaaleille. Esim. Coulombin voima.

2.6.2.2 Pallomaisen kappaleen gravitaatio

Sisällä ja ulkona.

HT 2.30. Tutkitaan pyöreää ja homogeenista taivaankappaletta, jonka massa on M ja säde R. *Laske*, kuinka suuri on pakonopeus, eli pienin mahdollinen nopeus, jolla taivaankappaleen pinnalta lähtevä kappale pääsee gravitaatiokentästä vapaaksi.

Ratkaise R, jos pakonopeus on valonnopeus c. Jos taivaankappaleen säde on tätä sädettä pienempi, kappaletta sanotaan mustaksi aukoksi. *Miksi*?

Vaikka emme ottaneet suhteellisuusteoriaa lainkaan huomioon, saimme täsmälleen suhteellisuusteorian ennustaman tuloksen tälle kriittiselle säteelle, joka tunnetaan tavallisesti Schwarzschildin säteenä[21]. Jos kappaleen massa on tätä pienemmän säteen sisässä, kaikki aine ja valo putoaa vääjäämättä yhä lähemmäksi massakeskipistettä.

Arvioi, kuinka suuri on sinun omaa massaasi vastaava Schwarzschildin säde ja totea, ettet ole vielä lähelläkään luhistumista – eikä kyllä kukaan muukaan. △

2.6.3 Esimerkkejä

Hitausmomenttien laskeminen, voiman vaikutus jatkuvaan kappaleeseen, pallon korvaaminen keskipisteellä gravitaatiossa, symmetrian hyödyntäminen

[21] Varsinaisesti pitäisi siis käyttää Newtonin mekaniikan sijasta Einsteinin kenttäyhtälöä $G = \frac{8\pi G_N}{c^4} T$, missä Einsteinin kaarevuustensori G kuvaa avaruuden ja ajan kaarevuutta sekä energia-impulssitensori T aineen ja energian liikettä. Newtonin gravitaatiovakio ja valonnopeus ovat G_N ja c. Tämän viattoman näköisen yhtälön ratkaiseminen on hirvittävän työlästä yksinkertaisissakin tilanteissa.

2.7 Mekaniikkaa ilman voimaa

2.7.1 Yleistetyt koordinaatit

energia yleistettyjen koordinaattien funktiona, dE/dt=0 => liikeyhtälö

2.7.2 Hamiltonin mekaniikkaa

Hamiltonin liikeyhtälöt, konjugaattiliikemäärä.

2.7.3 Lagrangen mekaniikkaa

Variaatiolaskentaa.

2.7.3.1 Hamiltonin ja Lagrangen mekaniikan yhteys

Legendren muunnos.

2.7.4 Voima kvanttifysiikassa

Potentiaali korvaa voiman täysin, osittain jopa massan.

2.7.5 Epäkonservatiiviset voimat?

2.7.6 Esimerkkejä

2.8 Symmetriat ja liikevakiot

Lyhyt johdattelu aiheeseen, esimerkkejä mahdollisuuksien mukaan

2.9 Staattiset ja vakaat systeemit

Statiikkaa: voima ja momentti

Vakauden tutkiminen: liikeyhtälöiden linearisointi, potentiaalin tutkiminen

2.10 Dimensioanalyysi

Aiemmin emme juuri kiinnittäneen huomiota siihen, missä yksiköissä suureita mitataan. Nyt tutkimme tätä yksikköasiaa tarkemmin, ja kehitämme pelkästään siihen perustuvan työkalun, dimensioanalyysin, joka voi olla hyödyllinen suuntaa antava apuväline fysiikassa. Käytännössä se voi antaa hyviä arvauksia ja auttaa laskuvirheiden löytämisessä.

2.10.1 Fysikaalisten suureiden yksiköt

Rakentaessamme Newtonin mekaniikan alkeita kohdassa 2.1 esittelimme oleellisesti kolme suuretta: paikan, ajan ja massan. Muut suureet saatiin näistä kertomalla, derivoimalla tai jotenkin muuten. Lisäksi juuri näiltä kolmelta suureelta vaadittiin universaalisuus (lait 2.27, 2.28 ja 2.34) eli jonkinlainen riippumattomuus koordinaatistosta.

Paikkaa, aikaa ja massaa kuvattiin edellä käyttäen lukuja. Näiden lukujen suuruudelle ei kuitenkaan ollut mitään fysikaalista tulkintaa. Tällainen tulkinta kuitenkin on tarpeellinen, ja siksi valitsemme näille suureille jonkinlaiset mittatikut. Pituuden yksiköksi voimme valita tutun metrin (m), jonka suuruus on määritelty oleellisesti antamalla konkreettinen metrin pituinen kappale. Muiden kappaleiden pituudet (ja muutenkin etäisyydet) ilmaistaan osuutena tästä standardipituudesta; näin on luontevaa sanoa, että jonkin pallon ympärysmitta on $0,69$ m tai että jokin etäisyys on 4×10^8 m. Kun liitämme tällä tavoin lukuun yksikön, saamme fysikaalisesti tulkittavan merkityksen suureen arvolle[22]. Vastaavasti tarvitsemme yksikön ajalle ja massalle, ja tuttu ratkaisu on valita sekunti (s) ja kilogramma (kg).

Nämä kolme suuretta tuotiin teoriaan toisistaan riippumattomina, joten niiden yksiköiden välillä ei ole mitään (välttämätöntä) yhteyttä. Sen sijaan kaikki muut suureet määriteltiin niiden avulla, joten kaikkien muiden suureiden yksiköt määräytyvät täysin perusyksiköiden valinnasta.

2.10.2 Dimensioanalyysin perusteet

MLT-esitys, lineaarinen yhtälöryhmä.

Eri suuntaiset pituudet erikseen jos tarpeen

Derivaatta ja integraali

2.10.3 Luonnolliset yksiköt

$M^{-1} = L = T$

Lisäksi joskus $k_B = G_N = 1$.

2.10.4 Planckin yksiköt

2.10.5 Esimerkkejä

$E^2 = p^2 + m^2$, hiukkasfysiikka, kvanttimekaniikka

2.11 Tarkastelua vielä lopuksi

Mitkä lait olivat peruslakeja, mitkä niistä johdettuja?

[22]Esimerkkeinä mainitut ympärysmitta ja etäisyys liittyvät oletettavasti useille tuttuihin asioihin. Mistä konkreettisesta pallosta ja etäisyydestä mahtaa olla kyse? Liittyvätkö ne jotenkin toisiinsa?

2.12 Puutteita

Näitä olisi vielä hyvä käsitellä klassisen mekaniikan puitteissa: elastisuus, virtausmekaniikka, aallot ja resonanssi (amplitudi, interferenssi), pikainen vilkaisu kvanttifysiikkaan.

Lisäksi omina lukuinaan tarvitaan (osittain jo tekeillä): matemaattiset menetelmät, virheanalyysi ja mittauksien tekeminen, sähköoppi, suhteellisuusteoria, termodynamiikka.

Luku 3

Lopuksi

3.1 IPhO-syllabus

Syllabus eli osattavaksi vaadittavien asioiden lista löytyy IPhO:n kotisivuilta, tätä kirjoitettaessa osoitteesta `http://ipho.phy.ntnu.edu.tw/syllabus.html`.

Siellä mainitaan seuraavat osaamistarpeet. Yleisesti: The extensive use of the calculus (differentiation and integration) and the use of complex numbers or solving differential equations should not be required to solve the theoretical and practical problems. Questions may contain concepts and phenomena not contained in the Syllabus but sufficient information must be given in the questions so that candidates without previous knowledge of these topics would not be at a disadvantage. Sophisticated practical equipment likely to be unfamiliar to the candidates should not dominate a problem. If such devices are used then careful instructions must be given to the candidates. The original texts of the problems have to be set in the SI units.

Teoriaosa (A):

1. Mechanics
   (a) Foundation of kinematics of a point mass: Vector description of the position of the point mass, velocity and acceleration as vectors
   (b) Newton's laws, inertial systems: Problems may be set on changing mass
   (c) Closed and open systems, momentum and energy, work, power
   (d) Conservation of energy, conservation of linear momentum, impulse
   (e) Elastic forces, frictional forces, the law of gravitation, potential energy and work in a gravitational field: Hooke's law, coefficient of friction (F/R = const), frictional forces, static and kinetic, choice of zero of potential energy
   (f) Centripetal acceleration, Kepler's laws
2. Mechanics of Rigid Bodies
   (a) Statics, center of mass, torque: Couples, conditions of equilibrium of bodies
   (b) Motion of rigid bodies, translation, rotation, angular velocity, angular acceleration, conservation of angular momentum: Conservation of angular momentum about fixed axis only

(c) External and internal forces, equation of motion of a rigid body around the fixed axis, moment of inertia, kinetic energy of a rotating body: Parallel axes theorem (Steiner's theorem), additivity of the moment of inertia

(d) Accelerated reference systems, inertial forces: Knowledge of the Coriolis force formula is not required

3. Hydromechanics

   (a) No specific questions will be set on this but students would be expected to know the elementary concepts of pressure, buoyancy and the continuity law.

4. Thermodynamics and Molecular Physics

   (a) Internal energy, work and heat, first and second laws of thermodynamics: Thermal equilibrium, quantities depending on state and quantities depending on process

   (b) Model of a perfect gas, pressure and molecular kinetic energy, Avogadro's number, equation of state of a perfect gas, absolute temperature: Also molecular approach to such simple phenomena in liquids and solids as boiling, melting etc.

   (c) Work done by an expanding gas limited to isothermal and adiabatic processes: Proof of the equation of the adiabatic process is not required

   (d) The Carnot cycle, thermodynamic efficiency, reversible and irreversible processes, entropy (statistical approach), Boltzmann factor: Entropy as a path independent function, entropy changes and reversibility, quasistatic processes

5. Oscillations and waves

   (a) Harmonic oscillations, equation of harmonic oscillation: Solution of the equation for harmonic motion, attenuation and resonance -qualitatively

   (b) Harmonic waves, propagation of waves, transverse and longitudinal waves, linear polarization, the classical Doppler effect, sound waves: Displacement in a progressive wave and understanding of graphical representation of the wave, measurements of velocity of sound and light, Doppler effect in one dimension only, propagation of waves in homogeneous and isotropic media, reflection and refraction, Fermat's principle

   (c) Superposition of harmonic waves, coherent waves, interference, beats, standing waves: Realization that intensity of wave is proportional to the square of its amplitude. Fourier analysis is not required but candidates should have some understanding that complex waves can be made from addition of simple sinusoidal waves of different frequencies. Interference due to thin films and other simple systems (final formulae are not required), superposition of waves from secondary sources (diffraction)

6. Electric Charge and Electric Field

   (a) Conservation of charge, Coulomb's law

(b) Electric field, potential, Gauss' law: Gauss' law confined to simple symmetric systems like sphere, cylinder, plate etc., electric dipole moment

(c) Capacitors, capacitance, dielectric constant, energy density of electric field

7. Current and Magnetic Field

   (a) Current, resistance, internal resistance of source, Ohm's law, Kirchhoff's laws, work and power of direct and alternating currents, Joule's law Simple cases of circuits containing non-ohmic devices with known V-I characteristics

   (b) Magnetic field (B) of a current, current in a magnetic field, Lorentz force: Particles in a magnetic field, simple applications like cyclotron, magnetic dipole moment

   (c) Ampere's law: Magnetic field of simple symmetric systems like straight wire, circular loop and long solenoid

   (d) Law of electromagnetic induction, magnetic flux, Lenz's law, self-induction, inductance, permeability, energy density of magnetic field

   (e) Alternating current, resistors, inductors and capacitors in AC-circuits, voltage and current (parallel and series) resonances: Simple AC-circuits, time constants, final formulae for parameters of concrete resonance circuits are not required

8. Electromagnetic waves

   (a) Oscillatory circuit, frequency of oscillations, generation by feedback and resonance

   (b) Wave optics, diffraction from one and two slits, diffraction grating,resolving power of a grating, Bragg reflection

   (c) Dispersion and diffraction spectra, line spectra of gases

   (d) Electromagnetic waves as transverse waves, polarization by reflection, polarizers: Superposition of polarized waves

   (e) Resolving power of imaging systems

   (f) Black body, Stefan-Boltzmanns law: Planck's formula is not required

9. Quantum Physics

   (a) Photoelectric effect, energy and impulse of the photon: Einstein's formula is required

   (b) De Broglie wavelength, Heisenberg's uncertainty principle

10. Relativity

    (a) Principle of relativity, addition of velocities, relativistic Doppler effect

    (b) Relativistic equation of motion, momentum, energy, relation between energy and mass, conservation of energy and momentum

11. Matter
    (a) Simple applications of the Bragg equation
    (b) Energy levels of atoms and molecules (qualitatively), emission, absorption, spectrum of hydrogen like atoms
    (c) Energy levels of nuclei (qualitatively), alpha-, beta- and gamma-decays, absorption of radiation, halflife and exponential decay, components of nuclei, mass defect, nuclear reactions

Kokeellinen osa (B): The Theoretical Part of the Syllabus provides the basis for all the experimental problems. The experimental problems given in the experimental contest should contain measurements. Additional requirements:

1. Candidates must be aware that instruments affect measurements.

2. Knowledge of the most common experimental techniques for measuring physical quantities mentioned in Part A.

3. Knowledge of commonly used simple laboratory instruments and devices such as calipers, thermometers, simple volt-, ohm- and ammeters, potentiometers, diodes, transistors, simple optical devices and so on.

4. Ability to use, with the help of proper instruction, some sophisticated instruments and devices such as double-beam oscilloscope, counter, ratemeter, signal and function generators, analog-to-digital converter connected to a computer, amplifier, integrator, differentiator, power supply, universal (analog and digital) volt-, ohm- and ammeters.

5. Proper identification of error sources and estimation of their influence on the final result(s).

6. Absolute and relative errors, accuracy of measuring instruments, error of a single measurement, error of a series of measurements, error of a quantity given as a function of measured quantities.

7. Transformation of a dependence to the linear form by appropriate choice of variables and fitting a straight line to experimental points.

8. Proper use of the graph paper with different scales (for example polar and logarithmic papers).

9. Correct rounding off and expressing the final result(s) and error(s) with correct number of significant digits.

10. Standard knowledge of safety in laboratory work. (Nevertheless, if the experimental set-up contains any safety hazards the appropriate warnings should be included into the text of the problem.)

3.2 Vastauksia harjoitustehtäviin

HT 1.1: Jos osaat antaa tähän kysymykseen vastauksen, olet ilmeisestikin kiinnostunut fysiikasta. Silloin lukemista kannattaa jatkaa.

HT 2.1: Käyttäen esimerkin tuloksia saadaan

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(s)\mathrm{d}s = 1 + \int_0^t (5 + 4s^3)\mathrm{d}s = 1 + 5t + t^4. \tag{2.1}$$

HT 2.2: Integroidaan:

$$v(t) = v(2) + \int_2^t (1 + 4s)\mathrm{d}s = 3 + (t + 2t^2) - (2 + 2 \cdot 2^2) = 2t^2 + t - 7 \tag{2.2}$$

ja

$$x(t) = x(-1) + \int_{-1}^t (2s^2 + s - 7)\mathrm{d}s = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 7t - \frac{47}{6}. \tag{2.3}$$

HT 2.3: Tasaisessa liikkeessä on määritelmän mukaan $\bar{v}'(t) = 0$ kaikilla t eli nopeus on vakio. Siispä $\bar{v}(t) = \bar{v}_0$. Paikka saadaan yksiulotteiseen tapaan integroimalla:

$$\bar{x}(t) = \bar{x}(0) + \int_0^t \bar{v}(s)\mathrm{d}s = \bar{x}_0 + t\bar{v}_0. \tag{2.4}$$

HT 2.4: Ongelma ratkeaa aiempaan tapaan integroimalla. Tulokseksi saadaan

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0 + t\bar{v}_0 + \frac{1}{2}t^2\bar{a}. \tag{2.5}$$

HT 2.5: Tämä tehtävä on kirjevalmennustehtävänä, joten ratkaisu on piilotettu.

HT 2.6: Tämä tehtävä on kirjevalmennustehtävänä, joten ratkaisu on piilotettu.

HT 2.7: Tämä tehtävä on kirjevalmennustehtävänä, joten ratkaisu on piilotettu.

HT 2.8: Tämä tehtävä on kirjevalmennustehtävänä, joten ratkaisu on piilotettu.

HT 2.9: Tämä tehtävä on kirjevalmennustehtävänä, joten ratkaisu on piilotettu.

HT 2.10: Tämä tehtävä on kirjevalmennustehtävänä, joten ratkaisu on piilotettu.

HT 2.11: Lasketaanpa ensin:

$$t_L + \tau = (t_K - \tau) + \tau = t_K \tag{2.6}$$

ja

$$\begin{aligned} \bar{\xi} + t_L\bar{u} + \bar{x}_L &= \bar{\xi} + (t_K - \tau)\bar{u} + (\tau\bar{u} - \bar{\xi} - t_K\bar{u} + \bar{x}_K) \\ &= \bar{x}_K. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Vertaamalla Galilei-muunnoksen yhtälöiden vasempaan puoleen (määritelmä 2.31) huomataan, että juuri näin pitikin käydä. Esittämämme Galilei-muunnoksen käänteismuunnos siis todella kääntää Galilei-muunnoksen.

HT 2.12: Tarkastellaan yleisyyden vuoksi yhtälöä (2.2.12). Muunnosparametrit $(\tau, \bar{\xi}, \bar{u}, R)$ käänteismuunnokseen (merkitään näitä lisäämällä mato päälle) saadaan yhtälöstä (2.2.12):

$$\begin{cases} \tilde{\tau} = -\tau \\ \tilde{\bar{\xi}} = \tau R^{-1}(\bar{u}) - R^{-1}(\bar{\xi}) \\ \tilde{\bar{u}} = R^{-1}(\bar{u}) \\ \tilde{R} = R^{-1}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Sovelletaan tätä sääntö uudestaan (ja lisätään kaksi kertaa muunnettuihin parametreihin toinenkin mato). Saadaan

$$\tilde{\tilde{\tau}} = -\tilde{\tau} = -(-\tau) = \tau \tag{2.9}$$

ja

$$\tilde{\tilde{R}} = \tilde{R}^{-1} = (R^{-1})^{-1} = R \tag{2.10}$$

ja

$$\tilde{\tilde{\bar{u}}} = \tilde{R}^{-1}(\tilde{\bar{u}}) = R(R^{-1}(\bar{u})) = \bar{u} \tag{2.11}$$

ja

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\bar{\xi}}} &= \tilde{\tau}\tilde{R}^{-1}(\tilde{\bar{u}}) - \tilde{R}^{-1}(\tilde{\bar{\xi}}) \\ &= -\tau R(R^{-1}(\bar{u})) - R(\tau R^{-1}(\bar{u}) - R^{-1}(\bar{\xi})) \\ &= \bar{\xi}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Siispä kahdesti madotetut parametrit ovat juuri alkuperäiset.

HT 2.13: Paikka, nopeus, liikemäärä ja liike-energia riippuvat koordinaatistosta. Massa, kiihtyvyys ja voima puolestaan eivät riipu.

HT 2.14: Pistetulon määritelmää käyttäen saadaan

$$D(t) = |\bar{x}(t)| = (\bar{x}(t) \cdot \bar{x}(t))^{1/2}. \tag{2.13}$$

Täten

$$\begin{aligned} D'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{x}(t) \cdot \bar{x}(t))^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}(\bar{x}(t) \cdot \bar{x}(t))^{-1/2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{x}(t) \cdot \bar{x}(t)) \\ &= \frac{1}{2} |\bar{x}(t)|^{-1} (\bar{v}(t) \cdot \bar{x}(t) + \bar{x}(t) \cdot \bar{v}(t)) \\ &= \frac{\bar{v}(t) \cdot \bar{x}(t)}{|\bar{x}(t)|}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Tämä on väitteen ensimmäinen osa.

Jos $D(t)$ on vakio on $D'(t) = 0$ kaikilla t. Yllä olevasta lausekkeesta näkee, että tällöin on oltava $\bar{v}(t) \cdot \bar{x}(t) = 0$, eli paikka ja nopeus ovat kohtisuorassa. Jos hiukkanen on origossa, on sen nopeuden oltava nolla (sillä muuten sen etäisyys origosta kasvaisi), joten taas $\bar{v}(t) \cdot \bar{x}(t) = 0 \cdot 0 = 0$. Nollavektori on kohtisuorassa kaikkia vektoreita vastaan.

HT 2.15: Vektori $\bar{x}(t)$ voidaan jakaa yksikkövektoria $\hat{\bar{\omega}}$ vastaan kohtisuoraan ja sen suuntaiseen osaan. Koska nämä osat ovat toisiaan vasten kohtisuorassa, voidaan niille käyttää Pythagoraan lausetta. Syntyvän suorakulmaisen kolmion toisena kateettina on vektori $\hat{\bar{\omega}} \cdot \bar{x}(t)$ (paikan akselin suuntainen komponentti) ja hypotenuusana $\bar{x}(t)$. Toisen kateetin pituus on $S(t)$. Väite seuraa siis suoraan Pythagoraan lauseesta.

HT 2.16: Koska $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{\bar{\omega}} \cdot \bar{x}(t)) = \hat{\bar{\omega}} \cdot \bar{v}$, on sisätulon $\hat{\bar{\omega}} \cdot \bar{x}(t)$ riippumattomuus ajasta sama asia kuin $\hat{\bar{\omega}} \cdot \bar{v} = 0$.

HT 2.17: Oletamme siis, että $\hat{\bar{\omega}} = (1,0,0)$. Jos siis $\bar{x} = (\lambda,0,0)$, on oltava $\bar{v} = 0$. Jokaisen $\bar{v}$:n komponentin on siis oltava nolla, joten annetusta lausekkeesta saadaan

$$0 = v_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j = a_{i1} \tag{2.15}$$

kaikilla i. Toisin sanoen $a_{11} = a_{21} = a_{31} = 0$.

Toisaalta vektorin $\bar{v}$ on oltava kohtisuorassa vektoria $(1,0,0)$ vastaan, eli $v_1 = 0$. Näin on oltava kaikilla $\bar{x}$. Jos $\bar{x} = (0,1,0)$, saadaan $v_1 = a_{12}$, ja jos taas $\bar{x} = (0,0,1)$, niin $v_1 = a_{13}$. On siis oltava $a_{12} = a_{13} = 0$. (Samoin saisi myös $a_{11} = 0$, mutta tämä ehdittiin tehdä jo yllä.)

Tarkastellaan vielä ehtoa, jonka mukaan $\bar{v} \cdot \bar{x} = 0$, valitttiinpa $\bar{x}$ miten tahansa. Kun valitaan $\bar{x} = (0,1,0)$, niin $\bar{v} = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$, joten $\bar{v} \cdot \bar{x} = a_{22}$. Täten $a_{22} = 0$. Samoin tilannetta $\bar{x} = (0,0,1)$ tutkimalla saadaan $a_{33} = 0$.

Ainoastaan a_{23} ja a_{32} voivat erota nollasta; kaikki muut kertoimet on jo näytetty nolliksi. Valitaan $\bar{x} = (0,1,1)$. Tällöin $\bar{v} = (0, a_{32}, a_{23})$. Nyt siis $\bar{x} \cdot \bar{v} = a_{32} + a_{23}$. Koska tämän sisätulon pitää olla nolla, on oltava $a_{32} = -a_{23}$. Merkitään $c = a_{23}$, jolloin siis $a_{32} = -c$.

Olemme siis saaneet kertoimet a_{ij} muuten, mutta kerrointa c emme ole saaneet selville. (Emme myöskään *voi* saada sitä selville annetuista tiedoista lähtien!) Saimme siis matriisimuodossa kirjoittaen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & -c & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Laskemalla komponentit v_i annetulla kaavalla saamme $\bar{v} = (0, -cx_3, cx_2)$, kun $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Toisaalta $(1,0,0) \times \bar{x} = (0, -x_3, x_2)$, joten todellakin $\bar{v} = c(1,0,0) \times \bar{x}$.

HT 2.18: Analyysin peruslausetta käyttämällä nähdään yhtälöstä (2.3.5) suoraan, että $\phi'(t) = \omega(t)$. Jos tätä yhtälöä kerrotaan vakiovektorilla $\hat{\bar{\omega}}$, saadaan $\bar{\phi}'(t) = \bar{\omega}(t)$.

HT 2.19: Soveltamalla laissa olevia lausekkeita saadaan

$$\begin{aligned} \bar{x}(0) &= \bar{a} + \cos(\phi(0))\bar{b} + \sin(\phi(0))\bar{c} \\ &= \bar{a} + \cos(0)\bar{b} + \sin(0)\bar{c} \\ &= \bar{a} + \bar{b} \\ &= \bar{a} + (\bar{x}_0 - \bar{a}) \\ &= \bar{x}_0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

HT 2.20: Koska $\bar{c}$ on vektorien $\hat{\bar{\omega}}$ ja $\bar{b}$ ristitulo, on se kohtisuorassa näitä vastaan. Riittää siis osoittaa, että $\hat{\bar{\omega}}$ ja $\bar{b}$ ovat kohtisuorassa. Tämä nähdään laskemalla:

$$\begin{aligned} \hat{\bar{\omega}} \cdot \bar{b} &= \hat{\bar{\omega}} \cdot (\bar{x}_0 - \bar{a}) \\ &= \hat{\bar{\omega}} \cdot (\bar{x}_0 - (\bar{x}_0 \cdot \hat{\bar{\omega}})\hat{\bar{\omega}}) \\ &= \hat{\bar{\omega}} \cdot \bar{x}_0 - (\bar{x}_0 \cdot \hat{\bar{\omega}})\hat{\bar{\omega}} \cdot \hat{\bar{\omega}} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

HT 2.21: Tehtävän 2.20 kohtisuoruustulosta käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} \hat{\bar{\omega}} \times \bar{c} &= \hat{\bar{\omega}} \times (\hat{\bar{\omega}} \times \bar{b}) \\ &= (\hat{\bar{\omega}} \cdot \bar{b})\hat{\bar{\omega}} - (\hat{\bar{\omega}} \cdot \hat{\bar{\omega}})\bar{b} \\ &= 0\hat{\bar{\omega}} - 1\bar{b} \\ &= \bar{b}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

HT 2.22: Edellisiä tuloksia hyödyntäen saadaan

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(t) \times [A(t)\hat{\bar{\omega}} + B(t)\bar{b} + C(t)\bar{c}] &= \omega(t)\hat{\bar{\omega}} \times [A(t)\hat{\bar{\omega}} + B(t)\bar{b} + C(t)\bar{c}] \\ &= \omega(t)[A(t)\hat{\bar{\omega}} \times \hat{\bar{\omega}} + B(t)\hat{\bar{\omega}} \times \bar{b} + C(t)\hat{\bar{\omega}} \times \bar{c}] \\ &= \omega(t)[B(t)\bar{c} - C(t)\bar{b}]. \end{aligned} \tag{2.20}$$

HT 2.23: Tämä tehtävä on kirjevalmennustehtävänä, joten ratkaisu on piilotettu.

HT 2.24: Valitaan $\hat{\bar{\omega}} = (0, 1, 0)$, jolloin $\omega(t) = 4 + 3t^2$. Laskemalla saadaan

$$\begin{aligned} \bar{a} &= (0, \hat{\bar{\omega}} \cdot \bar{x}_0, 0) = (0, 2, 0) \\ \bar{b} &= (0, 2, 3) - (0, 2, 0) = (0, 0, 3) \\ \bar{c} &= (0, 1, 0) \times (0, 0, 3) = (3, 0, 0). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Akselin ympäri kierretyksi kulmaksi saadaan

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int_0^t \omega(s)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t (4 + 3s^2)\mathrm{d}s \\ &= 4t + t^3. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Yhdistämällä nämä tulokset saadaan

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \bar{a} + \cos(\phi(t))\bar{b} + \sin(\phi(t))\bar{c} \\ &= (0, 2, 0) + \cos(4t + t^3)(0, 0, 3) + \sin(4t + t^3)(3, 0, 0) \\ &= (3\sin(4t + t^3), 2, 3\cos(4t + t^3)). \end{aligned} \tag{2.23}$$

HT 2.25: Tehtävän 2.20 perusteella $\hat{\bar{\omega}}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ ovat kohtisuoria. Kohtisuorien vektorien ristitulon pituus on tunnetusti kerrottavien vektorien pituuksien tulo. Koska $\bar{c} = \hat{\bar{\omega}} \times \bar{b}$, on siis $|\bar{c}| = |\hat{\bar{\omega}}|\,|\bar{b}| = |\bar{b}|$.

Jos lähtöpaikkaa osoittava vektori $\bar{x}_0$ on kohtisuorassa pyörimisakselia vastaan, on $\bar{a} = 0$. Vektori $\bar{a}$ ei siis aina ole yhtä pitkä kuin $\bar{b}$ ja $\bar{c}$. Näin voi kuitenkin olla, jos sattuu sopivasti. Edellisessä tehtävässä näin kävisi, jos valittaisiinkin $\bar{x}_0 = (0, 3, 3)$.

HT 2.26: Tämä tehtävä on kirjevalmennustehtävänä, joten ratkaisu on piilotettu.

HT 2.27: Pyörivässä koordinaatistossa hiukkanen on paikallaan, joten sen liike-energia on nolla. Ulkoisessa koordinaatistossa se pyörii nopeudella ωr pyörimisakselin ympäri (vakioetäisyydellä r). Tällöin sen liike-energia on $\frac{1}{2}m(\omega r)^2$.

Tarkastellaan pyörivässä koordinaatistossa levossa olevaa hiukkasta. Jotta hiukkanen pysyisi pyörivässä koordinaatistossa paikallaan, on siihen kohdistettava ulkoinen voima. Jos vaikkapa koordinaatisto on piirretty tasaisella kulmanopeudella pyörivän levyn päälle, voi hiukkasen naulata levyyn kiinni. Oletetaan tämä levy niin liukkaaksi, että kaikki vastusvoimat voidaan unohtaa. Jos tätä voimaa ei olisi, ei hiukkanen pysyisi levossa; hiukkaseen vaikuttaa siis pyörivässä koordinaatistossa eräänlainen näennäisvoima, joka työntää sitä pyörimisakselista ulos päin. Tämä on keskipakoisvoima. (Keskipakoisvoima esiintyy siis pyörivässä koordinaatistossa, joka ei ole inertaalinen eivätkä Newtonin lait siten siellä sellaisinaan päde. Keskipakoisvoiman kumoamiseen tarvitaan keskihakuisvoima, jonka tässä aiheuttaa naula, ja joka vaaditaan pyörivässä koordinaatistossa hiukkasen pitämiseen levossa ja vastaavasti ulkoisessa koordinaatistossa hiukkasen pitämiseen ympyräradalla.)

Jos hiukkasta liikutetaan kauemmas akselista, liikutaan keskipakoisvoiman suuntaan. Kun liikutaan voiman suuntaan, vähenee tähän voimaan liittyvä potentiaalienergia. (Samoin putoava kappale menettää potentiaalienergiaansa.) Potentiaalienergia pyörivässä koordinaatistossa siis vähenee. Sen sijaan ulkoisen koordinaatiston kannalta kulmanopeus pysyy vakiona ja pyörimissäde kasvaa, joten liike-energia kasvaa. Nämä energian muutokset ovat yhtä suuret, kun hiukkanen on siirron alussa ja lopussa levossa (ne ovat sama asia eri koordinaatistoissa). Täten keskipakoisvoimaan liittyvä potentiaalienergia on $-K$ (pyörivässä koordinaatistossa), missä K on ulkoisessa koordinaatistossa mitattu liike-energia.

Jos hiukkaseen kohdistuu muita voimia (vaikkapa painovoima), niiden potentiaalienergiat käyttäytyvät normaalisti. Siispä $U = V - K = V - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$.

HT 2.28: Nyt ulkoisessa koordinaatistossa m-massaisen vesihiukkasen (atomi tai pisara tai jotain muuta pientä) potentiaalienergia on $V = mgh$. Vesi asettuu ennen pitkää pyörivän astian suhteen lepoon (ei lainehdi tai virtaa sen sisällä), joten tämä hiukkanen on pyörivässä koordinaatistossa levossa. Täten edellisen kohdan perusteella sen kokonaisenergia pyörivässä koordinaatistossa on sen potentiaalienergia $U = V - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = mgh - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$.

Tehtävänannon alussa esitetyn periaatteen mukaan U on vakio tälle hiukkaselle, jos sitä liikutellaan veden pinnalla. Siten myös $-U/m$ on vakio, eli $\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - gh$ on vakio. Jos tälle vakiolle annetaan nimi A, niin saadaan $h = (\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - A)/g$. Veden pinta muodostaa siis ylöspäin aukevan paraabelin, jonka symmetria-akseli on täsmälleen astian pyörimisakseli.

Kun ohut astia pyörii, veden pinta pyörii tietenkin pitkin paraabelin pyörähdyskappaletta, pyörähdysparaboloidia. Jos astia olisikin ollut pyöreä, ei vesi kuitenkaan asettuisi tällaiseen paraboloidimuotoon. Vesi pääsee tällöin pyörimään suhteessa astiaan ja tilanteesta tulee hyvin monimutkainen. Jos kuitenkin pyörittelet juomaa lusikalla mukissa, muistuttaa nesteen pinnan muoto paraboloidia juuri tässä tehtävässä tutkitusta syystä, mutta tarkalleen siihen muotoon neste ei asetu.

HT 2.29: Pallokoordinaateissa pisteen (R, ϕ, θ) etäisyys pyörimisakselista on $r = R\cos(\theta)$. Gravitaatiopotentiaalienergia on m-massaiselle kivelle $V = -GMm/R$, joten saamme edellä esitettyyn tapaan vakion $-U/m = GM/R + \frac{1}{2}\omega^2 R^2 \cos^2(\theta)$.

Päiväntasaajalla $\theta = 0$ ja pohjoisnavalla $\theta = \pi/2$ (tai $-\pi/2$, jos kulmaa θ mitataan eri suuntaan, mutta sillä ei ole mitään merkitystä nyt). Siispä R_e:tä vastaa $\theta = 0$ ja R_n:ää taas $\theta = \pi/2$. Siispä saadaan $GM/R_e + \frac{1}{2}\omega^2 R_e^2 \cos^2(0) = GM/R_n + \frac{1}{2}\omega^2 R_n^2 \cos^2(\pi/2)$. Tästä saadaan $1/R_e + \frac{1}{2GM}\omega^2 R_e^2 = 1/R_n$ ja edelleen $R_n = (1/R_e + \omega^2 R_e^2/2GM)^{-1}$.

Täten $R_e - R_n = R_e - (1/R_e + \omega^2 R_e^2/2GM)^{-1} = R_e/(1 + \frac{2GM}{\omega^2 R_e^3})$. (Nyt $\frac{2GM}{\omega^2 R_e^3} \approx 581$, johon verrattuna ykkönen on mitättömän pieni. Siispä $R_e - R_n \approx \frac{\omega^2 R_e^4}{2GM}$.) Sijoittamalla saadaan $R_e - R_n \approx 10,9$ km. Tämä tulos on oikeassa kokoluokassa, mutta hieman väärin. (Ei ehkä ole intuitiivisesti selvää, onko säteiden erotuksessa kyse metreistä, sadoista metreistä vai kymmenistä kilometreistä, mutta onneksi tämä asia on mitattu kokeellisesti.) Virhe johtuu enimmäkseen Maan massan jakautumisesta. Oletimme tässä, että massajakauma on pallosymmetrinen, jolloin sen voi korvata yksinkertaisuuden vuoksi keskipisteeseen sijoitetulla pistemassalla. Maa on hyvin pallomainen (kuten tulos osoittaa), joten suhteellinen virhe on pienehkö, mutta kuitenkin olemassa. Lisäksi Maa on muutenkin hieman muhkurainen. Muhkuraisuus liittyy oleellisesti siihen, ettei Maa ole nestemäinen, vaikka niin oletimme – tuloksesta päätellen tämä oletus oli kuitenkin melko hyvä!

HT 2.30: Tämä tehtävä on kirjevalmennustehtävänä, joten ratkaisu on piilotettu.