

Vektorit, derivaatta ja integraali fysiikassa

Lasse Manninen

26. elokuuta 2021

Tästä materiaalista

Tässä materiaalissa esitellään vektoreiden, derivaatan ja integraalin sovelluksia fysiikassa. Materiaali koostuu pääasiassa tehtävistä ja opetusvideoista. Tätä materiaalia voi käyttää pitkän matematiikan kursseilla, joilla käsitellään vektoreita, derivaattaa ja integraalia tai fysiikan kursseilla voima ja liike, jaksollinen liike ja aallot ja sähkömagnetismi. Yksi tämän materiaalin tarkoituksista on esitellä se, että fysiikassa on paljon erinimisiä funktioita ja muuttujia. Eräs fysiikan opiskelun haasteista on, että esimerkiksi x voi olla funktio, vaikka sitä on saattanut tottua käsittelemään muuttujana. Vastaavia haasteita ovat myös derivoinnissa ja integroinnissa käsiteltävän muuttujan tunnistaminen.

Derivaatan ja integraalin osalta itseopiskeltavaa materiaalia löytyy Suomen fysiikan olympiavalmennuksen sivuilta¹.

Vektoreista esitellään erilaisia fyysikoiden käyttämiä merkintätapoja. Tehtävät liittyvät vektorin komponentteihin jakamiseen ja piste- ja ristitulon sovelluksiin fysiikassa.

Derivaatta-luvussa esitellään erilaisia suureita, jotka määritellään jonkin toisen suureen derivaattana. Tehtävät ovat suhteellisen yksinkertaisia, pääpaino on esitellä derivaatan sovelluksia erilaisissa fysikaalisissa systeemeissä. Osittaisderivaatoista on opetusvideo ja

Tämä materiaali on lisensoitu Nimeä-JaaSamoin 4.0 Kansainvälinen (CC BY-SA 4.0) -lisenssillä. lasse.m.manninen@gmail.com

¹<https://www.jyu.fi/science/fi/fysiikka/opiskelu/suomen-fysiikan-olympiavalmennus/valmennusmateriaalia>

3 tehtävää, joissa lasketaan osittaisderivaattoja ja gradienttivektoreita.

Integraali-luvussa tutustutaan integraalin sovelluksiin termodynamiikassa ja sähkömagnetismissä. Tehtävistä 2 on opetusvideoiden katsomista. Tarkoituksena on saada katsaus siihen, miten integrointia käytetään jatkuvana summana käyrän alle jäävän pinta-alan sijaan.

1 Vektorit

Fyysikoilla on useita tapoja merkitä vektoreita erilaisten mieltymysten ja soveltuvuuksien mukaan. Kaikki nämä merkinnät ovat yhtäläisiä. Joskus on tarpeen korostaa vektorin komponentteja ja joskus täytyy erottaa vektorisuureet skalaareista.

$$\mathbf{r} = \vec{r} = (r_1, r_2) = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

Tässä materiaalissa käytetään kirjaimen yllä olevaa nuolta merkitsemään vektoreita: $\vec{v}$.

Yksikkövektoreita merkitään kirjaimen päällä olevalla hatulla. Karteesisten akselien (x, y ja z -akselien) suuntaisia yksikkövektoreita merkitään yleensä $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ja yleistä johonkin muuhun suuntaan osoittavaa yksikkövektoria esimerkiksi $\hat{r}$.

Joskus käytetään toista tapaa merkitä akselien suuntaisia yksikkövektoreita

$$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z.$$

Vektorin voi esittää sen komponenttien ja yksikkövektoreiden avulla aiempia merkintätapoja käyttämällä

$$\vec{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k} = r_x \vec{e}_x + r_y \vec{e}_y + r_z \vec{e}_z$$

Vektorisuure voi riippua ajasta tai jostain muusta suureesta, jolloin se on funktio

$$\vec{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t)) = r_x(t) \hat{i} + r_y(t) \hat{j} + r_z(t) \hat{k}$$

Vektorin pituutta merkitään usein samalla kirjaimella kuin vektoria

$$|\vec{r}| = \sqrt{r_1^2 + \dots + r_n^2} = r,$$

mutta sekaannusten välttämiseksi on syytä suosia merkintää $|\vec{r}|$.

Erilaisia fysiikassa esiintyviä vektorisuureita ovat esimerkiksi: nopeus, kiihtyvyys, liikemäärä, voima, pyörimismäärä, sähkökenttä, magneettikenttä ja dipolimomentti.

Fysiikassa esiintyy myös funktioita, jotka riippuvat useasta muuttujasta. Katso video Kahden muuttujan funktio². Fysikaalinen esimerkki tällaisesta funktiosta voi olla vaikkapa paikasta riippuva sähkökenttä

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(\vec{r}).$$

Huomaa, että monen muuttujan funktion voi käsittää funktiona, jonka muuttujana on vektori.

Koska nopeus on vektori, myös liikemäärä on silloin vektori

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Newtonin II:n lain voi kirjoittaa vektorien ja derivaattojen avulla eri muodoissa

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

Sähkövaraukset kohdistavat toisiinsa Coulombin voiman

$$\vec{F}_C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^2},$$

jossa $\vec{r}_1$ ja $\vec{r}_2$ ovat varausten paikkavektorit.

²<https://www.youtube.com/watch?v=wyLMHhvkGbs>

Pistemäinen varaus luo sähkökentän

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2},$$

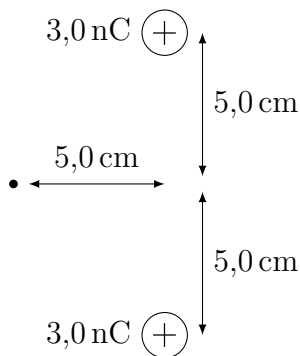
jossa $\vec{r}$ on paikkavektori tutkittavasta pisteestä varaukseen.

1.1 Komponentteihin jakaminen

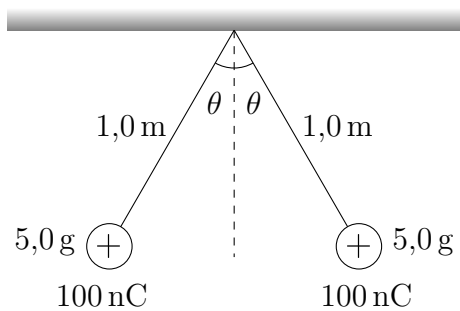
Monessa fysiikan ongelmassa vektorin komponentit ovat tärkeitä ja helpottavat tutkittavan ilmiön dynamiikan tarkastelua. Montaa tilannetta voi tarkastella xy -koordinaatistossa siten, että θ on kiertokulma x -akseliin nähden. Tällöin vektorin $\vec{r}$ komponentit ovat

$$r_x = |\vec{r}| \cos \theta \quad \text{ja} \quad r_y = |\vec{r}| \sin \theta.$$

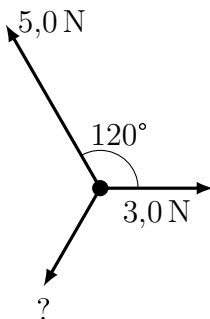
1. Mikä on sähkökentän voimakkuus ja suunta alla olevan kuvan merkityssä pisteessä?



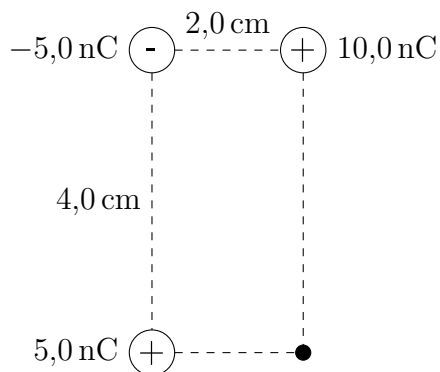
2. Kirjoita heittoliikkeessä olevan kappaleen nopeuden x - ja y -komponentit ajan funktiona, kun alkunopeus v ja heittokulma θ tunnetaan. Voit olettaa ilmanvastuksen pieneksi.
3. Kaksi $5,0 \text{ g:n}$ pistevarausta $1,0 \text{ m}$ pitkissä naruissa hylkivät toisiaan, kun varausten suuruudet on 100 nC , kuten alla olevassa kuvassa. Mikä on θ ? Voit käyttää pienillä kulmilla hyvin toimivaa approksimaatiota $\tan \theta \approx \sin \theta$.



4. Alla olevassa kuvassa on kolme toisiinsa sidottua köyttä. Yksi ystäväsi vetää köyttä 3,0 N:n voimalla ja toinen 5,0 N:n voimalla. Millä voimalla ja mihin suuntaan sinun tulee vetää köyttä, jotta solmu pysyisi paikallaan?



5. Mikä on sähkökentän suunta ja voimakkuus merkityssä pisteessä?



1.2 Pistetulo

Jos tarvitset muistin virkistystä vektoreiden pistetulosta, voit katsoa videon Pistetulo³.

³<https://www.youtube.com/watch?v=QIkJC1wjRKM>

Vakiovoiman tekemä työ on yleisesti

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r},$$

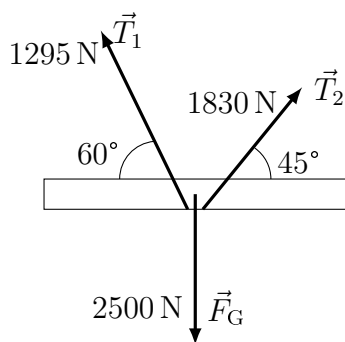
kun voima ja liikkeen suunta eivät ole samansuuntaiset. Kun ne ovat samansuuntaiset, pistetulo muuttuu kertolaskuksi ja saadaan tuttu $W = Fs$, eli työ on matka kertaa voima.

1. Kuinka paljon voima $\vec{F} = (-3, 0\hat{i} + 6, 0\hat{j})\text{N}$ tekee työtä hiukkaseen, joka liikkuu siirtymän

a) $\Delta\vec{r} = 2, 0\hat{i} \text{ m}$

b) $\Delta\vec{r} = 2, 0\hat{j} \text{ m}$

2. Kahta köyttä käytetään pianon laskemiseksi toisesta kerroksesta maahan. Pianon massa on 255 kg ja siirron korkeus on 5,00 m. Kuinka paljon eri voimat tekevät työtä?



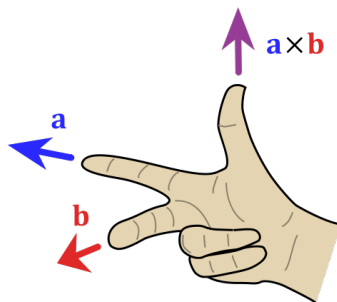
3. Hiihtäjä, jonka massa on 60 kg ja nopeus on 2,0 m/s, saapuu mäkeen, jonka pituus on 50 m ja kaltevuuskulma 10° . Mikä on hiihtäjän nopeus mäen alla, jos oletetaan, että hiihtäjä liukuu kitkatta mäkeä alas?

Teho on yksinkertaisessa tapauksessa $P = W/t$, eli tehty työ jaettuna työhön käytetyllä ajalla. Toisin sanoen teho kertoo kuinka nopeasti työtä tehdään aikayksikössä. Tämän voi ilmaista derivaatan avulla $P = dW/dt$. Työn määritelmästä saadaan pienen matkan $d\vec{r}$ yli tehty työ

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

jolloin tehoksi saadaan

$$P(t) = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos \theta.$$



Kuva 1: (Wikimedia, Acdx, CC BY-SA 3.0)

Eli voiman hiukkaseen kohdistama teho on voiman ja hiukkasen nopeuden pistetulo.

4. Tehtaassa siirretään 300 kg konetta moottorin avulla. Mikä moottorin teho on oltava, jotta kone liikkuu 0,5 m/s? Koneen ja lattian välinen kitkakerroin on $\mu = 0,60$.
5. 1500 kg auto, jonka etuprofiilin leveys on 1,6 m ja korkeus on 1,4 m. Auton ilmanvastuskerroin on 0,50 ja renkaiden ja tien välinen vierimiskitkakerroin on 0,02. Mikä moottorin teho on oltava, jotta auto voi ylläpitää nopeutta 30 m/s = 108 km/h. Oleta, että auton moottorin tehosta 25% kuluu muuhun kuin renkaiden pyörittämiseen. Vierimiskitkalle voit käyttää $f_{\mu} = \mu mg$ ja ilmanvastukselle $F_D = \frac{1}{2} C \rho A v^2$, jossa C on kappaleen muodosta tuleva kerroin, ρ on väliaineen tiheys, A on kappaleen poikkileikkauksen pinta-ala ja v on kappaleen vauhti.

1.3 Ristitulo

Katso videot Determinantit (Matikkamatskut)⁴ ja Ristitulo (Matikkamatskut)⁵.

Fysikaalisissa tilanteissa ristitulon voi usein määrittää laskematta käyttämällä oikean käden sääntöä (kuva 1). Oikean käden etusormi osoittaa ensimmäisen vektorin suuntaan, kohtisuoraan etusormen kanssa oleva keskisormi osoittaa toisen vektorin suuntaan ja peukalo osoittaa ristitulon tuloksen suuntaan. Yhtäläisesti oikean käden säännön voi määrittellä siten, että peukalo ja etusormi osoittavat keskenään kerrottavien vektoreiden suunnat ja keskisormi osoittaa saadun vektorin suunnan.

⁴<https://www.youtube.com/watch?v=gH-5eY13FRM>

⁵<https://www.youtube.com/watch?v=7UG1FmTVRVM>

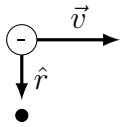
1. Määritä yksikkövektoreiden väliset ristitulot

a) $\hat{i} \times \hat{j}$ b) $\hat{j} \times \hat{i}$ c) $\hat{i} \times \hat{k}$ d) $\hat{k} \times \hat{i}$ e) $\hat{k} \times \hat{j}$ f) $\hat{j} \times \hat{k}$

Pistemäinen liikkuva varattu hiukkanen luo magneettikentän

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^2}$$

2. Alla olevan kuvan elektroni liikkuu oikealle. Mihin suuntaan elektronin luoma magneettikenttä osoittaa merkityssä pisteessä?



Magneettikentässä liikkuvaan hiukkaseen kohdistuva voima riippuu sen nopeudesta

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = (qvB \sin \alpha, \text{suunta oikean käden säännöllä})$$

3. Pitkässä johtimessa kulkee 10 A virta vasemmalta oikealle. 1,0 cm:n etäisyydellä johtimen yläpuolella liikkuu elektroni oikealle nopeudella $1,0 \times 10^7$ m/s. Mikä on magneettikentän elektroniin kohdistaman voiman suunta ja suuruus?

Lorentzin voima kuvaa varattuun hiukkaseen kohdistuvaa voimaa sähkö- ja magneettikentässä.

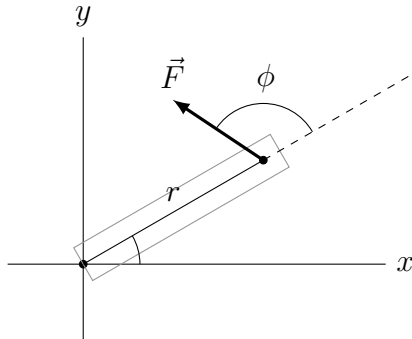
$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Kun nopeus on kohtisuorassa magneettikenttää vasten ja sähkökenttää ei ole, hiukkanen on ympyräradalla. Jos ristitulon kirjoittaa auki determinantin avulla, voi nähdä, miten voima saa magneettikentän suuntaista komponenttia, kun nopeus ei ole kohtisuorassa magneettikentän kanssa. Tällöin hiukkanen päättyy ruuviviivaradalle.

Voima ei aina kohdistu kohtisuoraan voiman vartta kohden, joten yleisempi muoto vääntömomentille on tarpeen. Vääntömomentissa

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = rF \sin \phi$$

r on etäisyys pisteestä, jonka suhteen kappale pyörii pisteeseen, johon voima vaikuttaa. Huomaa, että kulma ϕ on voiman varren ja voimavektorin välinen kulma.



4. Käytät 20 cm pitkää jakoavainta mutterin vääntämiseen. Jakoavaimen varsi muodostaa 30° kulman vaakatasoon nähden ja kohdistat jakoavaimen päähän 100 N voiman. Kuinka suuri vääntömomentti kohdistuu mutteriin?

Hiukkasen pyörimismäärä jonkin pisteen suhteen saadaan ristitulolla

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

5. Mihin suuntaan pyörimismäärävektori osoittaa, kun hiukkanen on ympyräradalla xy -tasossa?

Magneettinen dipolimomentti määritellään magneettikentän dipoliin aiheuttaman vääntömomentin avulla $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$.

2 Derivaatta

Yksi esimerkki derivaatan avulla esitettävästä suureesta on sähkövirta. Sähkövirran voi käsittää sähkövarauksen virtausnopeutena, eli kuinka paljon varausta Q liikkuu jonkin pinnan läpi. Derivaatan avulla sähkövirtä on siten sähkövarauksen muutosnopeus ajan suhteen

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Sähkövirran yksikkö ampeeri voidaan myös esittää varauksen ja ajan avulla $1\text{A} = 1\text{C/s}$.

Fysiikassa funktioilla on erilaisia nimiä ja muuttuja on usein joku muu kuin x . Esimerkiksi

paikka ajan funktiona $x(t)$, paikkavektori ajan funktiona $\vec{r}(t)$ ja voima paikan funktiona $\vec{F}(\mathbf{r}) = \vec{F}(x, y, z)$. Derivaattojen kanssa on siten oltava joskus tarkkana. Esimerkiksi, jos x on ajan funktio, jota derivoidaan ajan suhteen, niin

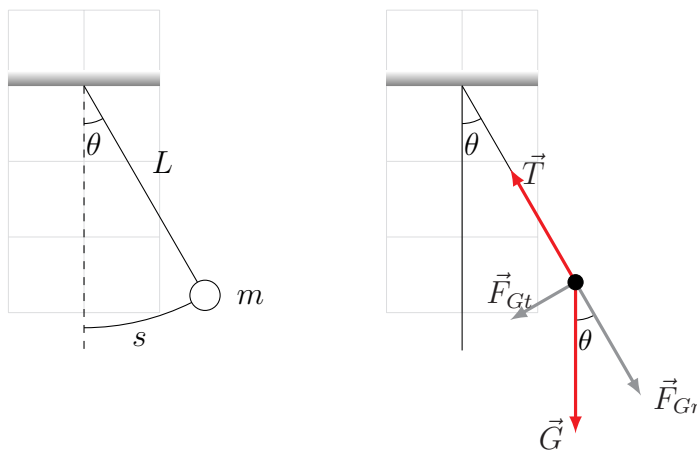
$$\frac{dx(t)}{dt} = x'(t) \neq \frac{d}{dx}x = 1.$$

1. Hooken lain mukaan jousen aiheuttama voima on $F = -k\Delta x$. Jos nyt valitaan koordinaatisto siten, että jousen liike tapahtuu vain x -suunnassa, voidaan derivaatan avulla kirjoittaa

$$F = -k\Delta x \iff -k\Delta x = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}.$$

Keksitkö minkä funktion toinen derivaatta on sama funktio, mutta miinusmerkkinen? Millä tavalla keksimääsi funktiota pitää muokata, jotta toiselle derivaatalle tulee vakiokerroin? Mitä sellaista funktioon voi lisätä, joka ei näy derivaatoissa? Tämä on ns. harmonisen värähtelijän liikeyhtälö. ⁶

2. Tutkitaan heilurin liikeyhtälöä. Kirjoita Newtonin II lain mukaisesti heilurin punnuksen kiihtyvyyden komponentit punnuksen radan tangentin ja radan normaalin suuntaisesti (alla olevan kuvan $\vec{F}_{Gt}$ ja $\vec{F}_{Gr}$).



Tangentin suuntainen kiihtyvyys kuvaa punnuksen liikettä kaaren s suuntaisesti.

⁶Vihje: trigonometriset funktiot ja yhdistetyn funktion derivointisäännöt.

Nyt Newtonin II laista saadaan

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \sin \theta.$$

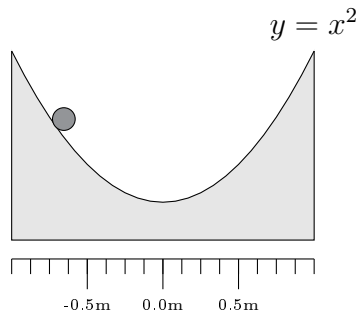
Tämä liikeyhtälö on monimutkaisempi kuin harmonisen värähtelijän. Heilurin tutkimisessa voidaan kuitenkin rajoittua pieniin värähtelyihin (n. $\theta < 10^\circ$), eli käyttää pienille kulmille hyvää approksimaatiota $\sin \theta \approx \theta$. Kun lisäksi kulma θ kirjoitetaan kaaren pituuden ja ympyrän säteen suhteena $\theta = s/L$ Tällöin liikeyhtälöstä tulee

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\theta = -\frac{g}{L}s.$$

Nyt voit huomata, että ylläoleva yhtälö näyttää samalta, kuin aiemman tehtävän harmonisen värähtelijän yhtälö ja siten sen ratkaisukin on samannäköinen!

3. Kiihtyvyyttä voidaan mitata esimerkiksi alla olevan kuvan mukaisella järjestelmällä. Pallo liikkuu vapaasti parabolisella radalla $y = x^2$ m. Pallon paikkaa voidaan mitata vaakasuoralla asteikolla.

- a) Määritä lauseke, jolla voit selvittää kiihtyvyyden, kun olet mitannut pallon poikkeaman tasapainoasemasta.
b) Mikä on kiihtyvyys, kun $x = 20$ cm?



Sähkökentän voi saada selville annetusta potentiaalista

$$E_s = -\frac{dV}{ds}$$

4. Sähköinen potentiaali x -akselin suuntaisesti on $V = 100x^2$ V, jossa x on metreinä.

Mikä on E_x

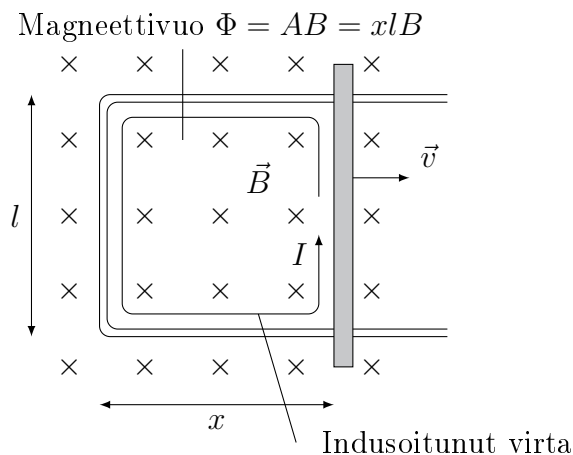
a) kun $x = 1,0 \text{ m}$

b) kun $x = 2,0 \text{ m}$

Faradayn laki kertoo, että suljettuun johdinsilmukkaan indusoituu jännite $\mathcal{E}$, kun silmukan läpi kulkeva magneettikentän vuo Φ muuttuu. Tämä indusoitunut jännite voidaan kirjoittaa derivaatan avulla seuraavasti

$$\mathcal{E} = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|$$

5. Tarkastellaan tilannetta, jossa johdinsilmukka on kohtisuorassa magneettikenttää vasten ja silmukan pinta-ala muuttuu. Alla olevan kuvan mukaisesti magneettivuo johdinsilmukan läpi on $\Phi = AB = x l B$. Mikä on virtasilmukkaan indusoitunut jännite, kun silmukassa on yksi liukuva sivu, joka liikkuu oikealle nopeudella v ?



2.1 Osittaisderivaatta

Katso video Osittaisderivaatat (Matikkamatskut)⁷.

1. Mahdollinen tilanyhtälö kaasulle on

$$PV = RT \exp\left(-\frac{\alpha}{VRT}\right),$$

⁷<https://www.youtube.com/watch?v=wrE6jEXiK8M>

jossa α ja R ovat vakioita. $\exp(\dots)$ on eksponenttifunktion $e^{\dots}$ merkintätapa. Laske

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V.$$

Osittaisderivaatan alaindeksillä tarkoitetaan, että alaindeksissä olevaa suure pysyy vakiona. Jälkimmäisessä derivaatassa on syytä hyödyntää tietyissä tilanteissa pätevää relaatiota⁸

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial x}}.$$

2. Lämpötila $T^\circ\text{C}$ xy -tasossa pisteessä (x, y) saadaan funktiosta

$$T(x, y) = x^2 e^{-y}.$$

Mihin suuntaan lämpötila kasvaa nopeimmin pisteessä $(2, 1)$? Mikä on lämpötilan muutoksen suuruus tähän suuntaan?

3. Vaeltaja seisoo puron vierellä vuoren rinteellä ja tutkii karttaansa. Maan pinnan korkeus h metreissä pisteessä (x, y) saadaan funktiosta

$$h(x, y) = \frac{20000}{3 + x^2 + 2y^2},$$

jossa x ja y ovat koordinaatit kartalla (kilometreinä). Vaeltaja on pisteessä $(3, 2)$. Mikä on puron virtauksen suunta pisteessä $(3, 2)$? Kuinka nopeasti puro laskee virtauksen suuntaan (kuinka monta m/km)?

3 Integraali

Kuten derivaatan kohdalla, myös integraaleissa esiintyy monennimisiä funktioita ja integrointimuuttujan kanssa on oltava tarkkana. Ensimmäisessä tehtävässä on esimerkki, jossa energia riippuu lämpökapasiteetista $E = E(c)$ ja lämpökapasiteetti edelleen lämpötilasta $c = c(T)$. Kysymyksessä integroidaan energiaa lämpötilan yli, joten on oltava huolellinen, ettei lämpökapasiteettia c tule pidettyä vakiona. Vastaaviin tilanteisiin tör-

⁸Tarkennus: kun kolme muuttujaa x , y ja z voidaan kuvata ehdolla $F(x, y, z) = \text{vakio}$, niin tulos pätee.

mää fysiikassa usein.

1. Useiden kiinteiden aineiden ominaislämpökapasiteetti c on lähes vakio suurella lämpötila-alueella. Sen sijaan timantin ominaislämpökapasiteettia 200 K-600 K lämpötiloilla kuvaa hyvin funktio $c(T) = 2,8T - 350 \text{ J/kgK}$. Aineen termisen energian muutosta lämpötilan muuttuessa kuvaa yhtälö

$$\Delta E_t = Mc\Delta T,$$

jossa M on tutkittavan aineen massa ja T lämpötila kelvineinä. Timantin tapauksessa termisen energian muutos täytyy laskea integroimalla

$$\Delta E = \int dE = \int Mc(T)dT.$$

Kuinka paljon energiaa tarvitaan 3,5:n karaatin timantin lämmittämiseen -50°C :sta 250°C :een? Jalokivitimanteilla 1 karaatti = 200 mg.

2. Ympäristön kaasuun tekemä työ ideaalikaasuprosessissa voidaan laskea integroimalla paineen funktiota tilavuuden yli

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p(V)dV.$$

Ideaalikaasuprosessia kuvaa yhtälö $p = cV^{1/2}$. Mikä on kaasuun tehty työ, kun kaasun tilavuus muuttuu tilavuudesta V_1 tilavuuteen V_2 ?

3. Katso video Varausjakauman sähkökenttä⁹.
4. Ohuessa tangossa on tasaisesti levittynyt varaus Q . Tangon pituus on L . Tanko taivutetaan puoliympyrän muotoon. Mikä on sähkökenttä puoliympyrän keskipisteessä? Toimitaan kuten videon esimerkeissä ja muodostetaan integraali miettimällä aluksi varausten summaa. Tarkastellaan lyhyttä Δs :n pituista pätkää tangosta (ks. alla oleva kuva). Jokaisen tällaisen pätkän varaus on Δq . Koska jokaista pätkää vastaa samassa kulmassa oleva pätkä x -akselin toisella puolella, y -akselin suuntaiset

⁹<https://www.youtube.com/watch?v=jLBZ1tgcfM4>

sähkökentän komponentit kumoutuvat. Nyt saadaan kokonaissähkökentäksi

$$E_x = \sum_i (E_i)_x = \sum_i E_i \cos \theta_i \quad \text{ja} \quad E_y = 0.$$

Kaikki varaukset ovat etäisyydellä R keskipisteestä. Tällöin yhden pätkän muodostama kenttä on

$$E_i = \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

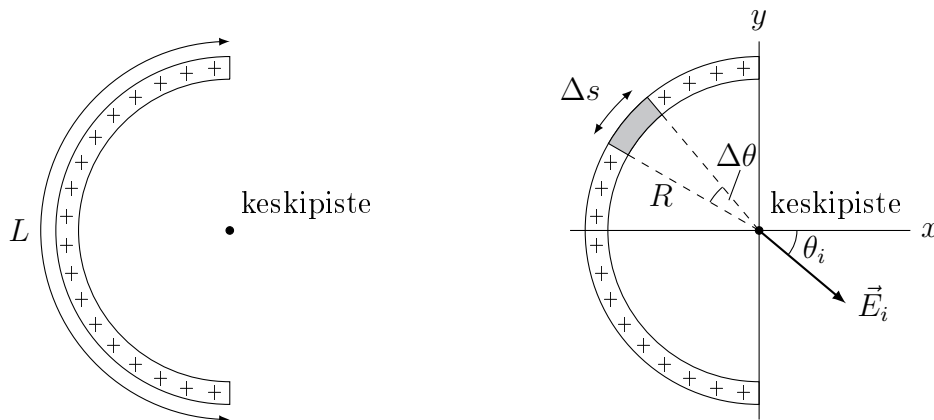
Tangon varausjakauma on tasainen, joten Δs :n pituisen pätkän varaus Δq on

$$\Delta q = \lambda \Delta s = \frac{Q}{L} \Delta s.$$

Siispä kokonaiskenttä keskipisteessä on

$$E = \sum_i \frac{(Q/L)\Delta s}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta_i.$$

Kirjoita nyt Δs kulman $\Delta \theta$ ja säteen R avulla ja muodosta summasta integraali kulman θ yli. Laske sitten tangon muodostama kokonaissähkökenttä keskipisteessä.



5. Katso video Liikkuvan varauksen synnyttämä magneettikenttä¹⁰.

Lue valmennusmateriaalista¹¹ osio viivaintegraali ja tee seuraava tehtävä.

¹⁰<https://www.youtube.com/watch?v=fmLv9MN8VWo>

¹¹<https://www.jyu.fi/science/fi/fysiikka/opiskelu/suomen-fysiikan-olympiavalmennus/valmennusmateriaalia/fmm.pdf>

6. Voimakenttää xy -tasossa kuvaa funktio $\vec{F}(x, y) = y^2\hat{i} + 2xy\hat{j}$. Laske viivaintegraali $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, eli voiman tekemä työ, pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen $(1, 1)$, kun

a) $\mathcal{C}$ on suora $y = x$. Suoran parametrisaatio on $\vec{r}(t) = t\hat{i} + t\hat{j}$.

b) $\mathcal{C}$ on paraabeli $y = x^2$. Paraabelin parametrisaatio on $\vec{r}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j}$.

c) $\mathcal{C}$ on suora pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen $(0, 1)$, josta edelleen suora pisteeseen $(1, 1)$. Nämä suorat voi parametrisoida erikseen siten, että $\vec{r}_1(t) = t\hat{j}$ ja $\vec{r}_2(t) = t\hat{i} + \hat{j}$.

Viivaintegraalin erikoistapaukset ovat, kun pistetulo on 0 tai 1 koko polulla. Kun voimavektori ja polku ovat samansuuntaiset koko polun yli, saadaan työksi $W = Fs$. Toisaalta aina, kun polku on kohtisuorassa voimaa vasten, voima ei tee työtä. Nämä erikoistapaukset ovat erityisen hyödyllisiä, kun tutkitaan sähkö- ja magneettikenttiä. Tästä aiheesta lisää Maxwellin yhtälöitä käsittelevässä materiaalissa.

Tehtävien vastaukset

Luku 1

1.1.1 Merkitään ylemmää varausta q_1 :llä ja alemmää varausta q_2 :lla. Molemmat varaukset ovat positiivisia, joten sähkökenttä pisteessä P osoittaa poispäin varauksista. Kiinnitetään koordinaatisto siten, että varaukset sijaitsevat y-akselilla ja origo on pisteiden puolessavälissä.

q_1 :n aiheuttama sähkökenttä on

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1|}{r_1^2}$$

ja suunta on 45° x-akselista alavasemmalle. Akseleiden suuntaisten yksikkövektoreiden $\hat{i}$ ja $\hat{j}$ avulla

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1|}{r_1^2} (\cos(45^\circ)\hat{i} - \sin(45^\circ)\hat{j}) \\ &= \frac{(9,0 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2)(3,0 \times 10^{-9} \text{ C})}{(0,050 \text{ m})^2 + (0,050 \text{ m})^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} \right) \\ &= (5400 \text{ N/C}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} \right)\end{aligned}$$

Vastaavasti varauksen q_2 sähkökentäksi saadaan

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 &= (5400 \text{ N/C}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} \right) \\ \Rightarrow \vec{E}_{\text{kok}} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2(5400 \text{ N/C}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} \right) \\ &= (7,6 \times 10^3 \text{ N/C})\hat{i}\end{aligned}$$

1.1.2 Kun ilmanvastus oletetaan pieneksi, heittoliikkeessä olevaan kappaleeseen vaikuttaa ainoastaan painovoima suoraan alaspäin. Tällä voimalla ei ole x-suuntaista komponenttia. Siispä nopeuden x-komponentti ei muutu ja se saadaan trigonometrialla

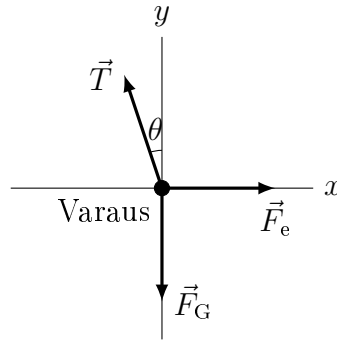
$$v_x = v \cos \theta.$$

Pystysuuntainen nopeus muuttuu ajassa kiihtyvyydellä $-g$. Alkunopeus saadaan jälleen trigonometrialla

$$v_{y0} = v \sin \theta$$

Tasaisesti muuttuvalle nopeudelle $v = v_0 + at$, joten heittoliikkeen y-suuntainen komponentti on

$$v_y = v_{y0} + at = v \sin \theta - gt.$$



1.1.3 Kannattaa piirtää varausten vapaakappalekuvat

Varaukset ovat tasapainossa ja lanka muodostaa kulman θ pystysuunnasta. Varaukseen vaikuttaa sähköinen voima, painovoima ja langan jännitysvoima.

Tasapainossa Newtonin ensimmäinen lain mukaan kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima on nolla, eli $\vec{F}_{\text{kok}} = \vec{T} + \vec{F}_G + \vec{F}_e = \vec{0}$. Komponenteittain

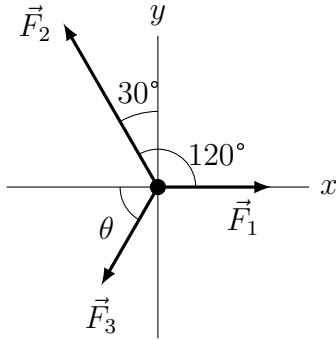
$$\begin{array}{l|l} (F_{\text{kok}})_x = T_x + (F_G)_x + (F_e)_x = 0 \text{ N} & (F_{\text{kok}})_y = T_y + (F_G)_y + (F_e)_y = 0 \text{ N} \\ -T \sin \theta + 0 \text{ N} + K \frac{q^2}{d^2} = 0 \text{ N} & T \cos \theta - mg + 0 \text{ N} = 0 \text{ N} \\ T \sin \theta = K \frac{q^2}{d^2} = K \frac{q^2}{(2L \sin \theta)^2} & T \cos \theta = mg \end{array}$$

Jaetaan vasemmanpuoleinen yhtälö oikeanpuoleisella, jolloin saadaan

$$\sin^2 \theta \tan \theta = K \frac{q^2}{4L^2 mg} = \frac{(9,0 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2)(100 \times 10^{-9} \text{ C})^2}{4(1,0 \text{ m})^2(5,0 \times 10^{-3} \text{ kg})(9,8 \text{ N/kg})} = 4,59 \times 10^{-4}$$

Pienille kulmille $\tan \theta \approx \sin \theta$. Tällä approksimaatiolla saadaan $\sin \theta = 0,0771$, joten $\theta = 4,4^\circ$.

1.1.4 Käsitellään köydessä olevaa solmua staattisessa tasapainossa olevana hiukkasena.



Kirjoitetaan vektorit $\vec{F}_1$ ja $\vec{F}_2$ komponenttimuodossa. Nyt $\vec{F}_1 = 3\hat{i}$ ja $\vec{F}_2 = -5 \sin(30^\circ)\hat{i} + 5 \cos(30^\circ)\hat{j}$. Tasapainossa voimien summan täytyy olla 0, eli $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$. Voimme ratkaista tuntemattoman voiman $\vec{F}_3 = -\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = -0,5\hat{i} - 4,33\hat{j}$. Voiman 3 suuruus on $F_3 = \sqrt{(-0,50)^2 + (-4,33)^2} = 4,4$. Kulma $\theta = \tan^{-1}(4,33/0,50) = 83^\circ$ negatiivisesta x-akselista alaspäin.

1.1.5 Lasketaan eri varausten aiheuttamat sähkökentät ja summataan ne yhteen. Merkitään varauksia $q_1 = 5,0 \text{ nC}$, $q_2 = 10 \text{ nC}$, $q_3 = -5,0 \text{ nC}$.

Varauksen q_1 aiheuttama kenttä on

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{i} = 112\,500 \text{ N/C} \hat{i}$$

Varauksen q_2 aiheuttama kenttä on

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r^2} \hat{j} = -56\,250 \text{ N/C} \hat{j}$$

Varauksen q_3 aiheuttaman kentän suuruus on

$$E_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_3|}{r^2} = 22\,500 \text{ N/C}.$$

$\vec{E}_3$ osoittaa kohti q_3 :a ja muodostaa kulman $\theta = \tan^{-1}(4/2) = 63,43^\circ$ x-akseliin nähden. Siispä

$$\vec{E}_3 = -E_3 \cos \theta \hat{i} + E_3 \sin \theta \hat{j} = (-10\,064\hat{i} + 20\,124\hat{j}) \text{ N/C}$$

Näiden vektorien summa on

$$\vec{E}_{\text{kok}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = (1,0 \times 10^5 \hat{i} + -3,6 \times 10^4 \hat{j}) \text{N/C}$$

Sähkökentän voimakkuus on

$$E_{\text{kok}} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 108\,619 \text{ N/C} = 1,1 \times 10^5 \text{ N/C}$$

ja vektorin muodostama kulma x-akselista on

$$\phi = \tan^{-1}(|E_x/E_y|) = -19,4^\circ.$$

1.2.1 a)

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = (-3,0 \hat{i} + 6,0 \hat{j}) \cdot (2,0 \hat{i}) \text{ N m} = (-6,0 \hat{i} \cdot \hat{i} + 12 \hat{j} \cdot \hat{i}) \text{ J} = -6,0 \text{ J}$$

b)

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = (-3,0 \hat{i} + 6,0 \hat{j}) \cdot (2,0 \hat{j}) \text{ N m} = (-6,0 \hat{i} \cdot \hat{j} + 12 \hat{j} \cdot \hat{j}) \text{ J} = 12 \text{ J}$$

1.2.2 Lasketaan voimien tekemät työt pistetulolla $W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$. Siirtymä on $\Delta \vec{r} = -5,00 \hat{j}$.
Painovoimalle

$$w = \vec{F}_G \cdot \Delta \vec{r} = (F_G)(\Delta r) \cos 0^\circ = (255 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2)(5,00 \text{ m})(1,00) = 1,25 \times 10^4 \text{ J}$$

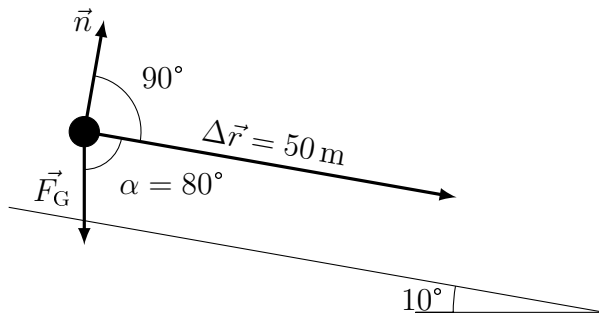
Jännitysvoimalle 1

$$w = \vec{T}_1 \cdot \Delta \vec{r} = (T_1)(\Delta r) \cos 150^\circ = (1830 \text{ N})(5,00 \text{ m})(-0,8660) = -7,92 \times 10^3 \text{ J}$$

Jännitysvoimalle 2

$$w = \vec{T}_2 \cdot \Delta \vec{r} = (T_2)(\Delta r) \cos 135^\circ = (1295 \text{ N})(5,00 \text{ m})(-0,7071) = -4,58 \times 10^3 \text{ J}$$

1.2.3 Tarkastellaan hiihtäjää pistemäisenä kappaleena. Piirretään tilanteesta kuva



Kineettisen energian muutos ΔK on yhtäsuuri kuin painovoiman hiihtäjään tekemä työ. Lasketaan työ pistetulon avulla ja ratkaistaan kineettisten energioiden erotuksesta v_1 .

Työksi saadaan

$$W = \vec{F}_G \cdot \Delta \vec{r} = mg(\Delta r) \cos \alpha = (70 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(50 \text{ m}) \cos 80^\circ = 5960 \text{ J}$$

Ratkaistaan nopeus kineettisen energian muutoksesta

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W \\ \Rightarrow v_1 &= \sqrt{v_0^2 + \frac{2W}{m}} = \sqrt{(2,0 \text{ m/s})^2 + \frac{2(5960 \text{ J})}{70 \text{ kg}}} \\ &= 13 \text{ m/s} \end{aligned}$$

1.2.4 Moottori kohdistaa kaapelin välityksellä koneeseen jännitysvoiman $\vec{T}$. Tämä voima tekee koneeseen työtä teholla $P = Tv$. Kone on tasapainossa, koska se liikkuu tasaisella nopeudella, joten kaapelin jännitysvoima on yhtäsuuri kuin kitkan aiheuttama voima

$$T = F_\mu = \mu mg$$

Moottorin tehoksi saadaan

$$P = Tv = \mu mgv = 882 \text{ W}$$

- 1.2.5 Tasaisella nopeudella liikkuvaan autoon kohdistuva kokonaisvoima on nolla. Liikettä vastustavat renkaiden vierimiskitka ja ilmanvastus. Autoa eteenpäin työntävä voima $\vec{F}$ on yhtäsuuri kuin vastusvoimien summa

$$F = f_{\mu} + D,$$

jossa $\vec{D}$ on ilmanvastus. Annetuilla tiedoilla

$$F = \mu mg + \frac{1}{2} C \rho A v^2 = 294 \text{ N} + 605 \text{ N} = 899 \text{ N},$$

jossa A on auton poikkileikkauksen ala ja $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ ilman tiheys. Teho, joka tarvitaan auton nopeuden pitämiseksi 30 m/s , on

$$P = Fv = (899 \text{ N})(30 \text{ m/s}) = 27\,000 \text{ W} = 36 \text{ hp}.$$

Auton vetävien renkaiden täytyy siis tuottaa tämä teho vastusvoimia vastaan. Moottorin tuottaman tehon täytyy olla suurempi, koska osa moottorin tehosta kuluu auton toimintaan ja osa menee hukkaan. Jos 25% tehosta menetetään, niin autoa liikuttavasta tehosta saadaan moottorin tuottama teho

$$P = 0,75 P_{\text{moottori}} \implies P_{\text{moottori}} = \frac{P}{0,75} = 31\,900 \text{ W} = 48 \text{ hp}.$$

1.3.1

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} & \text{b) } \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} & \text{c) } \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \\ \text{d) } \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} & \text{e) } \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i} & \text{f) } \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \end{array}$$

- 1.3.2 Huomaa, että varauksen merkki muuttaa ristitulosta saatavan vektorin suunnan. Magneettikenttä osoittaa siten sivusta ulospäin.

- 1.3.3 Varaus on negatiivinen, joten voiman suunta on päinvastainen vektoriin $\vec{v} \times \vec{B}$ nähden. Oikean käden säännöstä saadaan, että $\vec{v} \times \vec{B}$ osoittaa alaspäin, joten voiman $\vec{F}$ suunta on ylös. Voiman suuruus on $F = |q|vB$ ja magneettikenttä on pitkän suoran johtimen kenttä

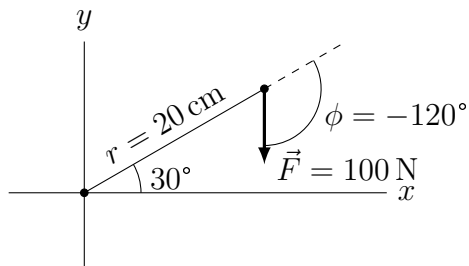
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} = 2,0 \times 10^{-4} \text{ T},$$

joten voiman suuruus on

$$F = evB = (1,60 \times 10^{-19} \text{ C})(1,0 \times 10^7 \text{ m/s})(2,0 \times 10^{-4} \text{ T}) = 3,2 \times 10^{-16} \text{ N}$$

ja suunta ylös, kuten todettiin.

1.3.4 Piirretään havainnollistava kuva.



Lasketaan vääntömomentti ristitulon trigonometrisella määritelmällä, huomaa ϕ :n merkki

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F} = rF \sin \phi = (0,20 \text{ m})(-86,6 \text{ N}) = -17 \text{ N m}$$

1.3.5 Jos hiukkanen liikkuu vastapäivään, pyörimismäärävektori osoittaa positiivisen z-akselin suuntaan. Jos liike on myötäpäivään, vektorin suunta on negatiivisen z-akselin suuntaan.

Luku 2

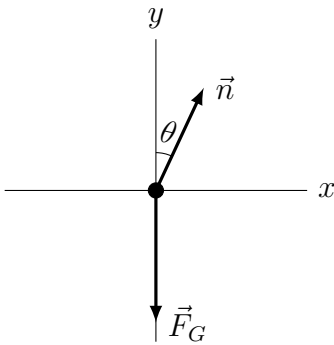
2.1 Sinin tai kosinin toinen derivaatta käy. Jos trigonometrisen funktion sisällä funktion argumentilla on kerroin, toisessa derivaatassa se tulee neliöitynä funktion kerroimeksi. Funktion vakiokerroin säilyy derivaatoissa. Derivaatoissa ei näy, jos funktion on lisätty vakiokerroin, tai jos funktion argumenttiin on lisätty vakiokerroin. Esimerkiksi sinin derivaatta, kun sinillä on vakiokerroin A , x :llä on vakiokerroin ω , funktion argumenttiin on lisätty vakio ϕ ja funktion on lisätty vakio B .

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} A \sin(\omega x + \phi) + B \\ &= \frac{d}{dx} A \omega \cos(\omega x + \phi) \\ &= -A \omega^2 \sin(\omega x + \phi) \end{aligned}$$

2.2 Trigonometrialla saadaan painovoiman komponenteiksi

$$F_{Gt} = \sin(\theta)G = \sin(\theta)mg \quad \text{ja} \quad F_{Gr} = \cos(\theta)G = \cos(\theta)mg$$

2.3 Tavoitteena on siis saada yhtälö pallon kiihtyvyyden vaakasuoran komponentin ja sen siirtymän x yhteydelle. Tämä saadaan selville, koska palloon vaikuttava painovoima tunnetaan. Kiihtyvyyden vaakasuora komponentti saadaan kirjoitettua tukivoiman ja pystysuoran akselin välisen kulman avulla. Tämä kulma taas saadaan kirjoitettua poikkeaman x avulla. Piirretään pallon vapaakappalekuva



Nyt koordinaatisto kannattaa valita vaakatasoon, koska vaikka pallo on rampilla, se on kiihtyvässä liikkeessä vaakatasossa. Newtonin II:sta saadaan

$$\sum F_x = n \sin \theta - ma_x = 0 \text{ N} \quad \sum F_y = n \cos \theta - F_G = ma_y = 0 \text{ N}$$

Sijoittamalla jälkimmäisestä ratkaistu tukivoima n ensimmäiseen yhtälöön saadaan

$$ma_x = \frac{F_G}{\cos \theta} \sin \theta = mg \tan \theta \implies a_x = g \tan \theta.$$

Radan hetkellinen kulmakerroin on sama, kuin $\tan \theta$. Koska ramppia kuvaa yhtälö $y = x^2$, niin

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta = 2x \implies a_x = (2x)g$$

b) Kiihtyvyys, kun $x = 0,20 \text{ m}$ on

$$a_x = 2(0,20)(9,8 \text{ m/s}^2) = 3,9 \text{ m/s}^2$$

2.4 Lasketaan ensin sähkökenttä yleisellä etäisyydellä x käyttämällä annettua yhtälöä

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}100x^2 \text{ V} = -200x \text{ V}$$

a) $E_x(1,0 \text{ m}) = -200 \text{ V}$

b) $E_x(2,0 \text{ m}) = -400 \text{ V}$

2.5 Magneettikenttä pysyy vakiona, eli vuon muutokseen vaikuttaa vain silmukan pinta-alan muutos. Silmukan pinta-ala on $A = xl$, jossa l pysyy vakiona. Liukuva sivu liikkuu nopeudella v , joten pinta-alan muutos ajan suhteen on

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}xl = l\frac{d}{dt}x = lv$$

Nyt siis vuon derivaatta on

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}AB = B\frac{dA}{dt} = Bvl$$

joten indusoitunut jännite on

$$\mathcal{E} = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = |vBl|$$

2.1.1 Nyt $P(V) = RTV^{-1} \exp(-\frac{\alpha}{VRT})$. Derivoidaan selkeyden vuoksi osamäärän termit erikseen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial V} V &= 1 \\ \frac{\partial}{\partial V} \exp(-\frac{\alpha}{VRT}) &= \frac{\alpha}{RTV^2} \exp(-\frac{\alpha}{VRT}) \end{aligned}$$

Jälkimmäisessä käytetään yhdistetyn funktion derivointisääntöä. Nyt osamäärän

derivointisäännöstä saadaan

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T &= RT \left(\frac{V \frac{\alpha}{RTV^2} \exp(-\frac{\alpha}{VRT}) - \exp(-\frac{\alpha}{VRT})}{V^2} \right) \\ &= RT \exp(-\frac{\alpha}{VRT}) \left(\frac{\alpha}{RTV^3} - \frac{1}{V^2} \right) \\ &= \exp(-\frac{\alpha}{VRT}) \left(\frac{\alpha}{V^3} - \frac{RT}{V^2} \right)\end{aligned}$$

joka voidaan toisaalta kirjoittaa paineen avulla

$$\begin{aligned}\exp(-\frac{\alpha}{VRT}) \left(\frac{\alpha}{V^3} - \frac{RT}{V^2} \right) &= \frac{V}{RT} P \left(\frac{\alpha}{V^3} - \frac{RT}{V^2} \right) \\ &= \frac{P(\alpha - VRT)}{V^2 RT}\end{aligned}$$

Käytetään toisen derivaatan laskemisessa hyödyksi relaatiota

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{1}{\frac{\partial P}{\partial T}}.$$

Paine lämpötilan funktiona on $P(T) = \frac{R}{V} T \exp(-\frac{\alpha}{VRT})$. Käyttämällä tulon derivointisääntöä saadaan

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V &= \frac{R}{V} \left(\exp(-\frac{\alpha}{VRT}) + T \frac{\alpha}{VRT^2} \exp(-\frac{\alpha}{VRT}) \right) \\ &= \frac{1}{T} P + \frac{\alpha}{VRT^2} P \\ &= P \left(\frac{1}{T} \frac{\alpha}{VRT^2} \right) \\ &= \frac{P(\alpha + VRT)}{VRT^2}.\end{aligned}$$

Siispä kysytty derivaatta on edellisen käänteisluku

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \frac{VRT^2}{P(\alpha + VRT)}$$

2.1.2 Lämpötilan nopeimman muutoksen suuruus ja suunta saadaan gradienttivektorista

$$\begin{aligned}\nabla T(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} T(x, y) \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} T(x, y) \hat{j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} x^2 e^{-y} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} x^2 e^{-y} \hat{j} \\ &= 2x e^{-y} \hat{i} + -x^2 e^{-y} \hat{j}.\end{aligned}$$

Gradienttivektori pisteessä (2,1) on

$$\nabla T(2, 1) = 2(2)e^{-1}\hat{i} + -(2)^2 e^{-1}\hat{j} = 4e^{-1}\hat{i} - 4e^{-1}\hat{j},$$

eli tähän suuntaan lämpötila kasvaa nopeimmin. Muutoksen suuruus on gradienttivektorin pituus

$$\begin{aligned}|\nabla T(2, 1)| &= |4e^{-1}\hat{i} - 4e^{-1}\hat{j}| \\ &= \sqrt{(4e^{-1})^2 + (-4e^{-1})^2} \\ &= \sqrt{16e^{-2} + 16e^{-2}} \\ &= \sqrt{32e^{-2}} \\ &= \sqrt{32}e^{-1} \\ &= 4\sqrt{2}e^{-1}\end{aligned}$$

2.1.3 Puro virtaa siihen suuntaan, mihin maa viettää eniten. Funktion arvot kasvavat nopeimmin gradienttivektorin suuntaan. Toisaalta funktion arvot pienenevät nopeimmin juuri gradienttivektorin vastaiseen suuntaan. Siispä puron virtauksen suunta pisteessä (3,2) on $-\nabla h(3, 2)$. Lasketaan

$$\begin{aligned}-\nabla h(x, y) &= -\left(-\frac{2x \cdot 20000}{(x^2 + 2y^2 + 3)^2} \hat{i} - \frac{4y \cdot 20000}{(x^2 + 2y^2 + 3)^2} \hat{j}\right) \\ &= \frac{40000x}{(x^2 + 2y^2 + 3)^2} \hat{i} + \frac{80000y}{(x^2 + 2y^2 + 3)^2} \hat{j}.\end{aligned}$$

Siispä pisteessä (3,2) virtauksen suunta on

$$\begin{aligned} -\nabla h(3,2) &= \frac{40000 \cdot 3}{(3^2 + 2 \cdot 2^2 + 3)^2} \hat{i} + \frac{80000 \cdot 2}{(3^2 + 2 \cdot 2^2 + 3)^2} \hat{j} \\ &= \frac{120000}{400} \hat{i} + \frac{160000}{400} \hat{j} \\ &= 300\hat{i} + 400\hat{j} \\ &= 100(3\hat{i} + 4\hat{j}) \end{aligned}$$

ja virtaus laskee

$$|-\nabla h(3,2)| = \sqrt{300^2 + 400^2} = \sqrt{90000 + 160000} = \sqrt{250000} = 500$$

metriä/kilometri eli puoli metriä jokaista vaakasuoraa metriä kohti.

Luku 3

3.1 Muutetaan lämpötilat kelvineiksi: $-50^\circ\text{C} = 223\text{ K}$ ja $250^\circ\text{C} = 523\text{ K}$. Muutetaan massa kilogrammoiksi $3,5\text{ kg} = 700\text{ mg} = 7 \times 10^{-4}\text{ kg}$. Lasketaan sitten määrätty integraali alkulämpötilasta loppulämpötilaan (selkeyttämiseksi merkitään yksiköt vasta lopuksi)

$$\begin{aligned} \int_{223}^{523} Mc(T)dT &= M \int_{223}^{523} 2,8T - 350dT \\ &= M \left[2,8 \cdot \frac{1}{2}T^2 - 350T \right]_{223}^{523} \\ &= M \left[(1,4T^2 - 350T) \right]_{223}^{523} \\ &= M((1,4 \cdot 523^2 - 350 \cdot 523) - (1,4 \cdot 223^2 - 350 \cdot 223)) \\ &= 208320M \\ &= 208320 \cdot 7 \times 10^{-4} \\ &= 145,824\text{ J} \approx 146\text{ J} \end{aligned}$$

3.2 Sijoitetaan integraaliin annettu paineen funktio ja lasketaan integraali

$$\begin{aligned}
 W &= - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV = - \int_{V_1}^{V_2} cV^{1/2} dV \\
 &= -c \left[\frac{2}{3} V^{3/2} \right]_{V_1}^{V_2} \\
 &= -c \frac{2}{3} (V_2^{3/2} - V_1^{3/2}) \\
 &= \frac{2c}{3} (V_1^{3/2} - V_2^{3/2})
 \end{aligned}$$

3.3 –

3.4 Kaaren pituus kaarta vastaavan kulman (radiaaneina) ja säteen avulla on $s = \theta R$. Siispä $\Delta s = \Delta \theta R$. Sijoitetaan tämä summaan

$$E = \sum_i \frac{(Q/L)R}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta_i \Delta \theta$$

Summasta saadaan integraali, kun kulman muutos viedään infinitesimaalisen pieneksi

$$E = \int \frac{(Q/L)R}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta d\theta.$$

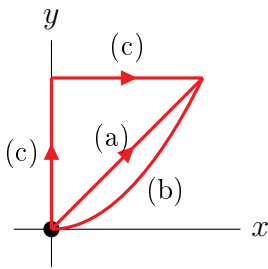
Integraalin rajat muodostuvat puoliympyrän kattavista kulmista. Sähkökentän suunta voidaan perustella tilanteen symmetrian avulla. Nyt tehtävänannon kuvan mu-

kaisesti kulma θ on välillä $[-\pi/2, \pi/2]$, eli integraali on

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(Q/L)}{4\pi\epsilon_0 R} \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{(Q/L)}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{(Q/L)}{4\pi\epsilon_0 R} \left| \sin \theta \right|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
 &= \frac{(Q/L)}{4\pi\epsilon_0 R} (\sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2)) \\
 &= \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 RL}
 \end{aligned}$$

3.5 –

3.6 Tehtävänannon mukaiset polut ovat



(a) Suoran parametrisaatio on $\vec{r} = t\hat{i} + t\hat{j}$, $0 \leq t \leq 1$. Toisaalta suoralla $y = x$, joten $\vec{F} = t^2\hat{i} + 2t^2\hat{j}$. Siispä $d\vec{r} = dt\hat{i} + dt\hat{j}$ ja integraalissa oleva pistetulo on

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (t^2\hat{i} + 2t^2\hat{j}) \cdot (\hat{i} + \hat{j})dt = 3t^2dt.$$

Siispä integraalista tulee

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 3t^2 dt = \left| t^3 \right|_0^1 = 1.$$

(b) Paraabelin voi parametrisoida $\vec{r} = t\hat{i} + t^2\hat{j}$, $0 \leq t \leq 1$, joten $d\vec{r} = dt\hat{i} + 2tdt\hat{j}$.

Paraabelillä $y = x^2$, joten $\vec{F} = t^4\hat{i} + 2t^3\hat{j}$. Siispä pistetulo on

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (t^4\hat{i} + 2t^3\hat{j}) \cdot (\hat{i} + 2t\hat{j})dt = 5t^4dt.$$

Integraalista saadaan

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 5t^4 dt = \left| t^5 \right|_0^1 = 1.$$

(c) Kolmas polku koostuu kahdesta osasta, jotka voi parametrisoida erikseen. Ensimmäisellä osalla $x = 0$ ja $0 \leq y \leq 1$. Toisella osalla $y = 1$ ja $0 \leq x \leq 1$. Siispä $\vec{r}_1 = t\hat{j}$, $0 \leq t \leq 1$ ja $\vec{r}_2 = t\hat{i} + \hat{j}$, $0 \leq t \leq 1$. Nyt $d\vec{r}_1 = dt\hat{j}$ ja $d\vec{r}_2 = dt\hat{i}$

Vastaavasti ensimmäisellä osalla $\vec{F}_1 = t^2\hat{i}$ ja toisella osalla $\vec{F}_2 = \hat{i} + 2t\hat{j}$. Pistetulot ovat

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 &= (t^2\hat{i}) \cdot (\hat{j})dt = 0 \\ \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 &= (\hat{i} + 2t\hat{j}) \cdot (dt\hat{i}) = dt\end{aligned}$$

Integraali saadaan polkujen integraalien summasta

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int_{C_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 = \int_0^1 0dt + \int_0^1 dt = 1.$$