

Fysiikan matemaattisia menetelmiä IPhO-kilpailijalle

Heikki Mäntysaari

Jyväskylän yliopisto, fysiikan laitos

Fysiikka on eksakti luonnontiede, jossa ilmiöitä pyritään kuvaamaan mahdollisimman tarkasti siten, että fysiikan teorioilla on myös ennustusvoimaa. Matematiikka tarjoaa fyysikolle luonnollisen kielen ilmiöiden tarkkaan kuvailuun, ja siksi tiettyjen matemaattisten metelemien hallinta on fysiikassa tärkeää.

Tässä luentomateriaalissa tutustutaan fyysikon kannalta tärkeimpiin matematiikan työkaluihin, käytännössä pääasiassa differentiaali- ja integraalilaskentaan. Derivointi ja integrointi on lukiosta jo tuttua, mutta niiden soveltaminen fysiikan ongelmien ratkaisuun ei tule eteen lukiokursseilla. Lisäksi tutustutaan pintapuolisesti differentiaaliyhtälöihin ja lineaarialgebraan. Aiheet ja esitystapa on valittu siten, että tämä materiaali palvelisi mahdollisimman hyvin fysiikkakilpailuun valmistautuvaa lukiolaista, jolla on suhteellisen hyvät pohjatiedot lukion pitkästä matematiikasta.

Nimi ”Matemaattisia menetelmiä” tarkoittaa sitä, että emme pyri käsittelemään asioita matemaatikkojen vaatimalla tarkkuudella. Pyrimme kuitenkin ymmärtämään heuristisesti tai geometrisesti myös tulosten takana olevan matematiikan.

Tarkoituksena ei ole, että kaikki tämän monisteen asiat on hallittava täydellisesti fysiikkaolympialaisissa; vanhojen olympiatehtävien ratkaiseminen voi olla tämän monisteen lukemista hyödyllisempää. Toivon ja uskon kuitenkin, että käsiteltävistä asioista on hyötyä fysiikkakilpailuissa. Kaikkia taitoja ei varmasti tarvita olympialaisissa, mutta matemaattisten mentelmien parempi hallinta helpottaa fysiikan teorioiden ymmärtämistä.

Fysiikkakilpailuihin valmistautumisen lisäksi materiaali sopii myös fysiikasta kiinnostuneille lukiolaisille lisälukemistoksi¹.

1. Kopiointi on sallittua vapaasti olettaen, että tekijä mainitaan.

Puhtaan fysikaalisia esimerkkejä ei ole paljoa, sillä tarkoituksena on ajan kanssa tuottaa lisää valmennusmateriaalia, jossa mm. tässä monisteessa esitetyjä taitoja päästään soveltamaan.

Moniste on syntynyt hitaasti osissa ja se täydentyy jatkuvasti valmennuksen tarpeiden mukaan. Virheitä ja puutteita varmasti löytyy. Kaikki tähän monisteeseen liittyvät kommentit ja korjaukset otetaan mielellään vastaan. Ajantasainen versio löytyy aina olympiavalmennuksen kotisivulta: www.jyu.fi/ipho/valmennus.

Jyväskylässä 13. marraskuuta 2014

Heikki Mäntysaari

heikki.mantysaari@jyu.fi

Sisältö

1	Derivaatta	4
1.1	<i>Funktion derivaatta</i>	4
1.2	<i>Derivointikaavoja</i>	6
1.3	<i>Funktion approksimointi ja Taylorin polynomi</i>	8
1.4	<i>Useamman muuttujan funktion derivaatta ja Taylorin polynomi</i>	10
1.5	<i>Vektorifunktion derivaatta</i>	12
1.6	<i>Ääriarvot ja kriittiset pisteet</i>	13
1.7	<i>Tehtäviä</i>	14
2	Integrointi	16
2.1	<i>Summasta integraaliin</i>	16
2.2	<i>Integroimistekniikoita</i>	17
2.2.1	<i>Muuttujanvaihto</i>	18
2.2.2	<i>Osittaisintegrointi</i>	20
2.3	<i>Epäoleellinen integraali</i>	20
2.4	<i>Moniulotteinen integrointi</i>	21
2.4.1	<i>Kaksiulotteinen integraali</i>	21
2.4.2	<i>Integrointi napakoordinaatistossa</i>	23
2.4.3	<i>Kolmiulotteinen integrointi ja pallokoordinaatisto</i>	26
2.5	<i>Vektorifunktion integraali</i>	27
2.5.1	<i>Viivaintegraali</i>	28
2.5.2	<i>Vuo</i>	29
2.6	<i>Tehtäviä</i>	31
3	Differentiaaliyhtälöistä	32
3.1	<i>Separoituvat yhtälöt</i>	32
3.2	<i>Harmoninen oskillaattori</i>	34
3.3	<i>Tehtäviä</i>	35
4	Matriisit ja lineaarialgebra	36
4.1	<i>Matriisien peruslaskutoimitukset</i>	36
4.2	<i>Kierrot tasossa</i>	38
4.3	<i>Sovellus suhteellisuusteoriaan</i>	39
4.4	<i>Tehtäviä</i>	40
5	Lopuksi	41
A	Matemaattisia perusteita	42
A.1	<i>Raja-arvo</i>	42

1 Derivaatta

Derivointi on yksi fyysikon eniten tarvitsemista matemaattisista menetelmistä. Derivoinnissa tutkitaan, kuinka nopeasti funktion arvot muuttuvat kun yksi funktion *argumenteista* muuttuu. Tällaisia tilanteita tulee paljon vastaan fysiikassa; esimerkiksi kun tarkastellaan, kuinka nopeasti kappaleen paikka muuttuu ajan kuluessa (ajan funktiona), saadaan nopeus. Toisaalta esimerkiksi termodynamiikassa meitä kiinnostaa, kuinka paine muuttuu ajan funktiona.

Fysiikkaolympialaisten *syllabuksen* mukaan ”*The extensive use of the calculus (differentiation) – should not be required to solve the theoretical and practical problems.* Kuitenkaan ei ole lainkaan tavatonta, että joku tehtävä ratkeaa helpommin, kun sopivat matemaattiset menetelmät on hallussa. Ja perustason differentiaali- ja integraalilaskentaa aina välillä kuitenkin vaaditaan tehtävien ratkaisemiseksi.

Lisäksi derivointia ja myöhemmin esiteltäviä integrointia ja differentiaaliyhtälöitä käyttäen on mahdollista muotoilla esimerkiksi klassinen mekaniikka matemaattisesti tarkemmin, mikä saattaa helpottaa asioiden ymmärtämistä. Ja toki on olemassa paljon ongelmia, joiden ratkaiseminen ilman differentiaali- ja integraalilaskentaa on erittäin vaikeaa tai työlästä.

Tässä luvussa kerrataan ensin derivaatan määritelmä ja geometrinen tulkinta, jotka ovat luultavasti tuttuja lukiosta. Tämän jälkeen tutustumme useamman muuttujan funktion derivointiin, tutkimme funktion ääriarvopisteitä ja funktioiden approksimointia.

1.1 Funktion derivaatta

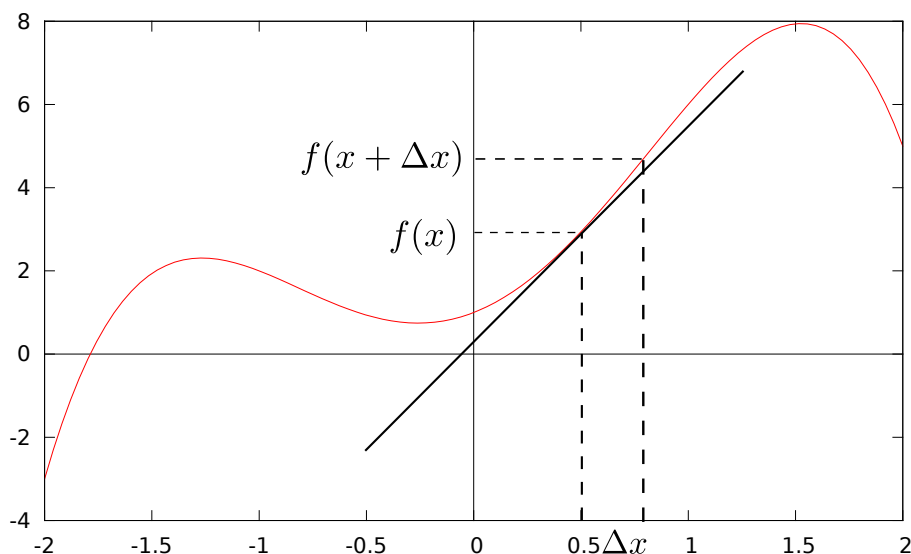
Aloitetaan tarkastelemalla yksinkertaista funktiota $f(x) = -x^4 + 4x^2 + 2x + 1$, jonka kuvaaja on esitetty kuvassa 1. Kuvaan on piirretty myös funktion kuvaajan tangentti pisteessä $x = 0,5$ (eli kuvaajaa pisteessä $x = 0,5$ sivuava suora).

Haluamme nyt tietää, kuinka paljon funktion arvot muuttuvat pisteen x ympäristössä, kun x :n arvo muuttuu hieman, tarkemmin sanoen Δx :n verran. Kuvasta 1 nähdään selvästi, että kun Δx on pieni, funktio käyttäytyy pisteen x ympäristössä kuten tähän pisteeseen piirretty tangentti².

Pisteeseen x piirretyn tangettisuoran kulmakerroin voidaan laskea muodossa " $f(x)$:n muutos" / " x :n muutos", matemaattisesti siis

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

2. Palaamme tähän myöhemmin luvussa 1.3 kun tutustumme funktion approksimointiin.



Kuva 1. Funktio $-x^4 + 4x^2 + 2x + 1$ ja sille piirretty tangetti pisteessä $x = 0.5$

Jos funktio on suora, saadaan tällä tavalla suoran kulmakerroin riippumatta Δx :n arvosta. Kuitenkin jos funktio ei ole suora, $f(x)$:n muutos/ x :n muutos ei ole vakio vaan muuttuu Δx :n funktiona. Jos Δx on suuri, ei tällä suurella ole välttämättä mitään mieltä (jos esimerkiksi kuvassa 1 on $x = 0,5$ ja $\Delta x = -1,5$, ei saatava kulmakerroin ole lähelläkään tangetin kulmakerrointa). Kuitenkin kun tarkastelemme tilannetta, jossa Δx on pieni, saadaan välttämättä tangettisuoran kulmakerroin joka kertoo, kuinka nopeasti f :n arvot muuttuvat, kun x muuttuu vähän. Tätä raja-arvoa kutsutaan funktion derivaataksi $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2)$$

Derivaatalle x :n suhteen käytetään myös etenkin fysiikassa usein muotoa

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}, \quad (3)$$

missä $df(x)$ on " $f(x)$:n pieni muutos" ja dx on " x :n pieni muutos".

Määritelmä 1. Funktion $f(x)$ derivaatta pisteessä x on

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (4)$$

Huomaa, että tästä määritelmästä seuraa, että

$$\Delta f(x) \approx f'(x)\Delta x, \quad (5)$$

missä siis $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$. Palaamme tähän luvussa 1.3.

Määritelmästä näemme myös suoraan, että derivointi on lineaarinen operaatio: $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$, kun α ja β ovat vakioita.

Huomaa, että kaikilla funktioilla ei välttämättä ole derivaattaa. Jos funktiolla on olemassa derivaatta jossain pisteessä, sanotaan, että se on *derivoituva* tässä pisteessä. Funktio on derivoituva, jos se on derivoituva jokaisessa pisteessä. Selvästikään jos funktio ei ole jatkuva jossain pisteessä³, se ei myöskään ole derivoituva tässä pisteessä.. Jatkuvuus ei kuitenkaan riitä, sillä esimerkiksi funktio $f(x) = |x|$ ei ole derivoituva pisteessä $x = 0$ (miksi?). Emme kuitenkaan keskity tässä sen tarkemmin siihen, onko funktio derivoituva, sillä fysiikassa vastaantulevat funktiot yleensä ovat derivoituvia.

Edelleen funktion toinen derivaatta $f''(x)$ määritellään funktion f derivaatan derivaattana pisteessä x , ts. $f''(x) = df'(x)/dx$. Korkeampia derivaattoja käytettäessä pilkkujen määrä kasvaa nopeasti suureksi, ja sen sijaan n :ttä derivaattaa pisteessä x merkitään muodossa $f^{(n)}(x)$.

Tarkastellaan sitten esimerkkinä kappaleen paikkaa ajan funktiona, ja olkoon se $x(t)$ (huomaa, että x on nyt funktio eikä funktion f argumentti). Tunnetusti keskinopeus aikavälillä määritellään laskemalla paikan muutos jaettuna ajan muutoksella:

$$v_{\text{keski}} = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}. \quad (6)$$

Jos haluamme tietää hetkellisen nopeuden ajan hetkellä t_0 , olkoon se $v(t_0)$, voimme laskea keskinopeuden esimerkiksi hyvin lyhyellä aikavälillä $t_0 \dots t_0 + \Delta t$, missä siis Δt on hyvin pieni aikaväli, ts.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=t_0}, \quad (7)$$

missä esittelimme myös uuden tavan merkitä derivaatta pisteessä $t = t_0$. Vastavasti kiihtyvyys on nopeuden derivaatta ajan suhteen, joten $a(t) = v'(t) = x''(t)$.

1.2 Derivointikaavoja

Lukiossa on opittu derivoimaan useita funktioita. Toteamme seuraavaksi, miten yksinkertaisessa tapauksessa derivaatat voidaan laskea määritelmästä 1.

3. Funktio $f(x)$ on jatkuva pisteessä x_0 , jos $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Tarkastellaan esimerkiksi funktiota $f(x) = x^2$, ja lasketaan sen derivaatta suoraan määritelmästä

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x = 2x. \end{aligned} \quad (8)$$

Mikä on lukiosta tuttu tulos.

Todetaan lisäksi vielä tulon derivointikaava: olkoon $f(x) = u(x)v(x)$. Ensin huomaamme, että

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) - f(x) &= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) \\ &= u(x + \Delta x)[v(x + \Delta x) - v(x)] + [u(x + \Delta x) - u(x)]v(x), \end{aligned} \quad (9)$$

missä vain lisäsimme lausekkeeseen nollan muodossa $0 = -u(x + \Delta x)v(x) + u(x + \Delta x)v(x)$. Siten jakamalla Δx :llä ja ottamalla raja-arvon $\Delta x \rightarrow 0$ saamme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ u(x + \Delta x) \left[\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right] + \left[\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right] v(x) \right\} \\ &= u(x)v'(x) + u'(x)v(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Lisäksi yhdistetyn funktion derivointikaava on kätevä muistaa: jos $f(x) = u(v(x))$ niin

$$f'(x) = u'(v(x))v'(x). \quad (11)$$

Tämä on helppo ymmärtää/muistaa kirjoittamalla derivaatan d-merkinnän (differentiaalien) avulla:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dv} \frac{dv}{dx}, \quad (12)$$

missä formaalisti lavensimme dv :llä⁴.

Listataan seuraavaksi vielä täydellisyyden vuoksi tärkeimpien ns. alkeisfunktioiden derivaatat taulukossa 1. Laajempia listoja löytyy internetistä.

Mainitsemme vielä täydellisyyden vuoksi käänteisfunktion funktion derivointikaavan: jos g on f :n käänteisfunktio, eli $g(f(x)) = x$, on

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}. \quad (13)$$

4. Tämä ei ole matemaattisesti eksaktia, mutta se yleensä toimii mikä riittää fyysikolle. Vastaavasti on helppo uskoa, että $df/dx = (dx/df)^{-1}$, mutta tämäkään ei toimi aina (mitä jos $f'(x) = 0$?)

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$\sin(x)$	$\cos(x)$
e^x	e^x	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$		

Taulukko 1. Yleisimpiä derivaattoja. Huomaa että trigonometrisia funktioita käsitellessä on x :n oltava radiaaneissa.

1.3 Funktion approksimointi ja Taylorin polynomi

Kuten luvussa 1.1 huomasimme, pisteen x ympäristössä $f(x)$ käyttäytyy lähes *lineaarisesti*, eli funktion arvot ovat lähellä tähän pisteeseen piirrettyä tangenttisuoraa. Tämä antaa meille yhden tavan tehdä approksimaatioita tutkiessamme funktion arvoja jonkun pisteen ympäristössä. Mutta miksi fyysikköä kiinnostaa tällainen touhu, eikö olisi parempi laskea asioita tarkasti?

Erilaisten approksimaatioiden tekeminen on jokaiselle fyysikolle tärkeä taito. Monet todelliset ongelmat ovat niin monimutkaisia, että niiden tarkka käsittely ei ole mahdollista. Tällöin on tehtävä sopivia oletuksia, jotta ongelmasta saadaan muodostettua matemaattinen malli, jota ylipäättään voidaan käsitellä. Lisäksi monesti vaadittavaa matematiikkaa voidaan selvästi helpottaa tekemällä sopivia approksimaatioita, jotka eivät kuitenkaan vaikuta käytännössä lopputulokseen (muista, että lähtöarvot eivät koskaan ole tarkkoja, vaan niihin sisältyy mittausvirhettä).

Käytännössä esimerkiksi klassisen mekaniikan ongelmia ratkottaessa olisi jossain mielessä ”oikeampaa” käyttää suhteellisuusteoriaa koska tiedämme, että klassinen mekaniikka on ”väärin” siinä mielessä, että se ei päde jos nopeudet ovat lähellä valonnopeutta. Jos laskut tehtäisiin lähtien suhteellisuusteoriasta huomaaisimme, että huomattavasti vaikeamman laskun seurauksena saisimme tuloksen, joka on identtinen klassisesta mekaniikasta saadun tuloksen kanssa, jos oletamme, että $v/c \approx 0$ (eli $v \ll c$).

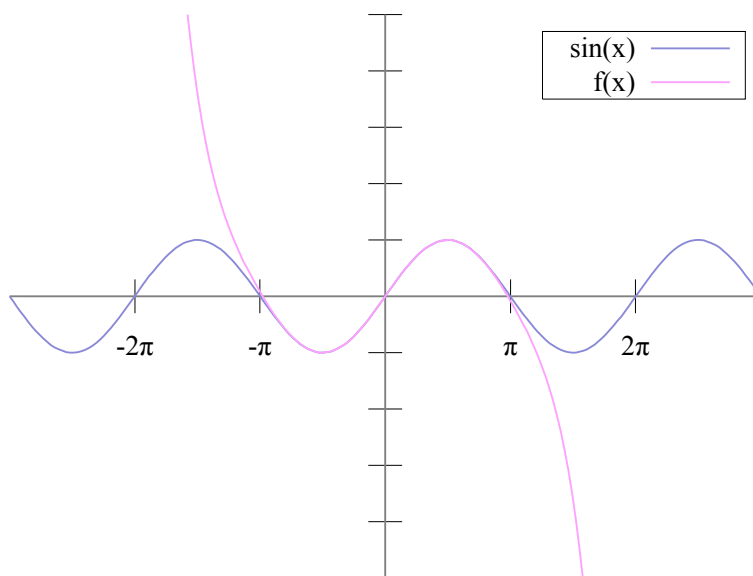
Palataan nyt lukuun 1.1 ja sen yhtälöön (5); kirjoittamalla $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ saamme

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x. \quad (14)$$

Tästä seuraa, että

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \quad (15)$$

Geometrisesti tämä tarkoittaa sitä, että funktion f arvo pisteen x lähellä olevassa pisteessä $x + \Delta x$ saadaan laskemalla f :n arvo pisteessä x , piirtämällä tämän pisteen kautta kulkeva suora kulmakertoimella $f'(x)$ (eli funktion tangentti) ja



Kuva 2. Funktio $\sin(x)$ ja sitä origon ympäristössä approksimoiva 7. asteen Taylorin polynomi.

etenemällä sitä pitkin siten, että x -koordinaatti muuttuu Δx :n verran. Huomaa, että yhtälö (15) on suoran yhtälö, kun pidämme x :ää vakiona ja muuttujanamme on Δx . Tämä tarkoittaa sitä, että funktio f käyttäytyy pisteen x lähistöllä kuten suora.

Esimerkki 1. Tarkastellaan esimerkiksi kuvassa 1 olevaa funktiota $f(x) = -x^4 + 4x^2 + 2x + 1$. Haluamme tutkia tätä funktiota esimerkiksi pisteen $x = 0,5$ läheisyydessä, mutta arvojen laskeminen tästä monimutkaisesta lausekkeesta on työlästä.

Lasketaan ensin derivaattafunktio $f'(x) = -4x^3 + 8x + 2$, jonka arvo pisteessä $x = 0,5$ on $f'(0,5) = 5,5$. Siten saamme, että

$$f(0,5 + h) = f(0,5) + 5,5 \cdot h. \quad (16)$$

Nyt $f(0,5) = 3,0625$ on vain vakio (luku). Vertaamalla tämän lausekkeen antamia tuloksia tarkkaan arvoon pienillä h näemme, että ero approksimaatio on hyvä pienillä h .

Approksimaation tarkkuutta saadaan parannettua approksimoimalla funktiota pisteen ympäristössä suoran sija paraabelilla, eli toisen asteen polynomilla. Tai yleisemmin asteen n polynomilla, mutta tämä tietysti lisää laskun teknistä vaatavuutta. Voidaan kuitenkin osoittaa, että riittävän siistiä funktiota voidaan approksimoida pisteen ympäristössä (tai joskus jopa koko reaali- tai kompleksitasossa)

mielivaltaisen tarkasti (kunhan asten n on riittävän suuri) niin kutsutulla Taylorin polynomilla.

Määritelmä 2. Funktion $f(x)$ Taylorin polynomi astetta N pisteen x_0 ympäristössä on polynomi

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n. \quad (17)$$

Riittävän siisteille funktioille Taylorin polynomi antaa rajalla $N \rightarrow \infty$ tarkasti funktion f . Korkeintaan astetta N oleville polynomeille astetta N oleva Taylorin polynomi on kyseinen polynomi itse. Huomaa, että kun ollaan lähellä pistettä x_0 , eli $x - x_0 \ll 1$, korkeamman asteen termit vaikuttavat vähän, sillä tällöin $(x - x_0)^n$ pienenee nopeasti n :n kasvaessa.

Esimerkki 2. Määritetään funktion $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ 2. asteen Taylorin polynomi nollan ympäristössä. Nyt $f'(x) = -x(1 - x^2)^{-1/2}$, joten $f'(0) = 0$. Edelleen

$$f''(x) = -\frac{x^2}{(1 - x^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (18)$$

joten $f''(0) = -1$. Siten 2. asteen Taylorin polynomi on

$$f(x) \approx f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)(x - 0) + \frac{1}{2!} f''(0)(x - 0)^2 = 1 - \frac{1}{2} x^2. \quad (19)$$

Joskus merkitään $f(x) = 1 - 1/2x^2 + \mathcal{O}(x^3)$, mikä tarkoittaa, että termit, jotka ovat verrannollisia x :n kolmanteen tai sitä korkeampaan potenssiin on jätetty huomioimatta. Monesti eteen tulee sellaisia fysikaalisia ongelmia, joissa jokin parametri on pieni, ja pienen parametrin korkeammat potenssit voidaan jättää huomiotta.

1.4 Useamman muuttujan funktion derivaatta ja Taylorin polynomi

Tarkastellaan useamman muuttujan funktiota $f(x, y, z)$. f voi olla esimerkiksi lämpötila pisteessä (x, y, z) . Muuttujia voi tietysti olla mielivaltaisen määrä, mutta käytetään tässä esimerkkinä kolmen muuttujan funktiota merkintöjen yksinkertaistamiseksi.

Määritelmä 3. Funktion f osittaisderivaattaa muuttujan x suhteen merkitään

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \quad (20)$$

ja se lasketaan derivoimalla funktiota f x :n suhteen pitäen kaikkia muita muuttujia (tässä y ja z) vakioina.

Esimerkki 3. Funktiolle $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2yz$ on

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y - 2z, \text{ ja } \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -2y. \quad (21)$$

Osittaisderivaatta kertoo siis sen, kuinka nopeasti funktion arvot muuttuvat, kun yksi argumentti muuttuu hieman, ja muut argumentit ovat vakioita. Esimerkiksi edellisessä esimerkissä jos f kuvaa lämpötilaa (jossain yksiköissä) pisteessä (x,y,z) näemme, että esimerkiksi pisteessä $(1,1,1)$ osittaisderivaatta z :n suuntaan on -2 , joten lämpötila laskee, kun liikutaan z -akselin suuntaan.

Tärkeä sovellus osittaisderivaatalle on *funktion gradientti*:

Määritelmä 4. Funktion $f(\vec{x}) = f(x,y,z)$ (kun $\vec{x} = (x,y,z)$) gradientti pisteessä $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ on *vektori*

$$\nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a}) \right). \quad (22)$$

Gradientin geometrinen tulkinta on, että se antaa funktion suurimman kasvunopeuden: kun pisteessä $\vec{a}$ liikutaan vektorin $\nabla f(\vec{a})$ suuntaan, kasvavat funktion arvot nopeimmin. Vastaavasti funktion arvo pienenee nopeimmin, kun liikutaan vektorin $-\nabla f(\vec{a})$ suuntaan.

Vastaavasti kuin luvussa 1.3 teimme yhden muuttujan funktiolle, voimme muodostaa useamman muuttujan funktion Taylorin polynomin, joka approksimoi funktiota annetun avaruuden pisteen ympäristössä. Laskut muuttuvat tosin nopeasti melko monimutkaisiksi.

Määritelmä 5. Funktion $f(x_1, \dots, x_d)$ astetta N oleva Taylorin polynomi pisteen $(a_1, \dots, a_d)$ ympäristössä on

$$f(x_1, \dots, x_d) \approx \sum_{m=0}^N \sum_{n_1+\dots+n_d=m} \frac{1}{n_1! \dots n_d!} \left(\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_d^{n_d}} \right) (x_1, \dots, x_d) \times (x_1 - a_1)^{n_1} \dots (x_d - a_d)^{n_d}. \quad (23)$$

Jälkimmäinen summa tarkoittaa, että summataan kaikkien kokonaislukujen $n_1, \dots, n_d$ yli siten, että ne summautuvat luvuksi m . Funktio f osittaisderivoidaan parametrien x_i suhteen n_i kertaa, eli yhteensä m kertaa⁵.

Kaava näyttää alkuun monimutkaiselta, mutta prosessi on suora yleistys yksiulotteisesta tapauksesta (jolle tosin on ainakin fysiikkakilpailuissa paljon enemmän

5. Riittävän siisteille funktioille (eli funktioille, joihin fysiikassa yleensä törmätään) derivoimisjärjestyksellä ei ole väliä.

käyttöä kuin moniulotteiselle tapaukselle joka tässä on lähinnä täydellisyyden vuoksi). Esimerkiksi funktion $f(x,y)$ toisen asteen Taylorin polynomi pisteen (a,b) ympäristössä on

$$f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \frac{1}{2!} [f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2], \quad (24)$$

missä f_x on f :n osittaisderivaatta x :n suhteen, f_{xx} f :n toinen osittaisderivaatta ja f_{xy} funktio, joka on saatu osittaisderivoimalla f :ää sekä x :n että y :n suhteen.

Huomaa, että virheanalyysioppimateriaalissa esitetty virheen yleinen etenemislaki on käytännössä useamman muuttujan Taylorin polynomi.

1.5 Vektorifunktion derivaatta

Tarkastellaan seuraavaksi vektoriarvoista funktiota $\vec{f}$ joka riippuu jostain parametrasta t . Matemaattisesti merkitään $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, eli t on reaaliluku ja $\vec{f}(t)$ on $\mathbb{R}^n$:n alkio eli n -ulotteinen vektori. Käytännössä voimme tässä yhteydessä olettaa, että $n = 3$.

Palautetaan mieliin reaaliarvoisen funktion $g(t)$ derivaatan määritelmä 1:

$$g'(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \delta t) - g(t)}{\delta t}. \quad (25)$$

Tämä määritelmä yleistyy helposti vektoriarvoisen funktion derivaataksi:

Määritelmä 6. Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ funktio. Funktion derivaatta pisteessä t on raja-arvo

$$\vec{f}'(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t + \delta t) - \vec{f}(t)}{\delta t}. \quad (26)$$

Tarkastellaan esimerkiksi ajasta riippuvaa paikkafunktiota $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ (tässä siis koorinaattiakselit ovat nimeltään 1, 2 ja 3). Tällöin ylläolevasta määritelmästä seuraa (koska vektorien erotus voidaan laskea komponenteittain), että

$$\vec{x}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t)) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t)) = \vec{v}(t). \quad (27)$$

Edeleen $\vec{x}''(t) = \vec{v}'(t) = \vec{a}(t)$.

Monet ongelmat, joissa esiintyy vektorifunktioita, palautuvat yllä mainitulla tavalla reaalifunktioiden derivointiin. Tarkastellaan esimerkiksi tilannetta, jossa kappaleen massa ja nopeus riippuvat ajasta. Tällöin $\vec{p}(t) = m(t)\vec{v}(t)$. Newtonin toisen

lain $(\vec{F}(t) = d\vec{p}(t)/dt)$ käyttämiseksi on laskettava liikemäärän aikaderivaatta:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}(t)}{dt} &= \frac{d(m(t)\vec{v}(t))}{dt} = \frac{d(m(t)v_1(t), m(t)v_2(t), m(t)v_3(t))}{dt} \\ &= \left(m'(t)v_1(t) + m(t)v_1'(t), m'(t)v_2(t) + m(t)v_2'(t), m'(t)v_3(t) + m(t)v_3'(t) \right) \\ &= \left(m'(t)v_1(t), m'(t)v_2(t), m'(t)v_3(t) \right) + \left(m(t)v_1'(t), m(t)v_2'(t), m(t)v_3'(t) \right) \\ &= m'(t)\vec{v}(t) + m(t)\vec{v}'(t) = m'(t)\vec{v}(t) + m(t)\vec{a}(t).\end{aligned}\tag{28}$$

Tulon derivaatta toimii siis samalla tavalla kuin reaalifunktioiden tapauksessa.

Olemme nyt määritelleet vektoriarvoisen reaaliparametrasta riippuvan funktion derivaatan kuten myös reaaliarvoisen vektoriparametrasta riippuvan funktion derivaatan. Seuraava vaihe olisi tietysti käsitellä vektoriarvoisen vektoriparametrasta riippuvan funktion derivaattaa $\vec{f}'(\vec{x})$. Tällöin derivaatta on itse asiassa matriisi. Emme puutu tähän nyt sen tarkemmin.

1.6 Ääriarvot ja kriittiset pisteet

Funktion approksimoinnin lisäksi toinen derivaatan käytännön sovelluskohde on funktion ääriarvojen etsiminen. Yhden muuttujan funktion tapauksessa pätee tuttu tulos

Lause 1. *Olko $f(x)$ derivoituva. Tällöin suljetulla välillä $[a,b]$ $f(x)$ saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.*

Todistus. Geometrisesti selvää, tarkka todistus sivuutetaan. □

Derivaatan nollakohdat ovat siis mahdollisia ääriarvopisteitä. Tämä on geometrisesti helppo mieltää: ääriarvopisteen molemmin puolin funktion arvot joko kasvavat tai pienenevät, joten ääriarvopisteeseen piirretty tangentti on vaakasuora (kulmakerroin on 0).

Voi kuitenkin olla, että derivaatan nollakohta ei ole edes lokaali ääriarvopiste⁶; näin käy esimerkiksi kun tarkastellaan funktiota x^3 nollassa: derivaatta on 0, mutta funktio on kokoajan kasvava. Tässä tapauksessa nolla on ns. *satulapist*e. Derivaatan nollakohtai sanotaankin *kriittisiksi pisteiksi*: $f'(x) = 0$ on välttämätön muttei riittävä ehto sille, että piste x on ääriarvopiste.

6. Ääriarvopiste on lokaali maksimi(minimi), jos funktion arvot tämän pisteen pienessä ympäristössä ovat pienempiä(suurempia) kun tässä pisteessä. Ääriarvopiste on globaali, jos funktio saavuttaa tässä pisteessä suurimman/pienimmän arvonsa koko määrittelyjoukostaan.

Monesti fysikaalisessa tilanteessa on selvää, ettei määrittelyjoukon reunalla saavuteta varmasti ääriarvoa tai että kyseinen ääriarvo ei ole mielenkiintoinen. Lisäksi yleensä on selvää, että ääriarvo saavutetaan jollakin välillä, jolloin väliltä löydetty derivaatan nollakohta on suoraan ääriarvo. Tarvittaessa kriittisen pisteen luonnetta voidaan tutkia myös toisen derivaatan avulla.

Jos piste x_0 on lokaali minimi, muuttuu funktion derivaatta tämä piste ohitettaessa negatiivisesta positiiviseksi, joten $f''(x_0) > 0$. Vastaavasti maksimin tapauksessa derivaatta muuttuu positiivisesta negatiiviseksi, joten $f''(x_0) < 0$. Jos $f''(x_0) = 0$, vaatii tilanne tarkempaa tutkimista: piste x_0 on satulapiste, jos $f''(x_0) = 0$ ja f'' vaihtaa merkkiään x_0 :n ohittaessaan.

Tämä yleistyy useamman muuttujan funktiolle: ääriarvopisteen ympäristössä funktion arvojen täytyy pienentyä/kasvaa kaikkien koordinaattiakselien suuntaan liikuttaessa. Tämä tarkoittaa sitä, että osittaisderivaattojen kaikkien komponenttien suhteen tulee olla nollia. Lyhyesti saamme gradientin määritelmästä 4, että piste $\vec{x}$ on kriittinen piste jos ja vain jos

$$\nabla f(\vec{x}) = 0. \quad (29)$$

Erityistapauksena huomaa, että minimin x_0 ympäristössä jokaista funktiota voidaan approksimoida funktiona, jonka riippuvuus x :stä on muotoa $k \cdot x^2$. Tämä johtuu siitä, että minimipisteessä x_0 välttämättä $f'(x_0) = 0$, joten Taylorin polynomin ensimmäisen asteen termi häviää, jolloin $f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$, josta yllämainittu muoto seuraa valitsemalla $k = f''(x_0)/2$.

Erityisesti tämä on merkittävää silloin, jos tarkastellaan potentiaalienergiafunktion $U(x)$ käytöstä potentiaalin minimin (johon fysikaalinen systeemi siis pyrkii) ympäristössä. Koska potentiaalienergian nollataso voidaan valita vapaasti, voidaan minimin x_0 ympäristössä siis approksimoida $U(x) \approx kx_0$, jolloin päädytään tarkastelemaan ns. harmonista oskillaattoria, johon palataan luvussa 3.2.

1.7 Tehtäviä

Tehtävä 1. Derivoi

- | | |
|---------------------|--|
| (a) $4x^4 - \ln x$ | (c) x^x |
| (b) $\sin(\cos(x))$ | (d) $\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^n}$, n luonnollinen luku |

Tehtävä 2. Käytä tulon derivointisääntöä (11) ja todista osamäärän derivointisääntö funktiolle $f(x) = u(x)/v(x)$:

$$f'(x) = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}. \quad (30)$$

Tehtävä 3. Hiukkasen paikka ajan funktiona on $x(t) = 10 \sin(2,3t)e^{-0,2t}$. Piirrä hiukkasen nopeus- ja kiihtyvyyshäntio ajan funktiona kun $x > 0$. Millaista fysikaalista tilannetta tällainen liike voisi kuvata?

Tehtävä 4. Taylorin polynomi:

- (a) Määritä funktion $\ln(1+x)$ kolmannen asteen Taylorin polynomi pisteen $x = 0$ ympäristössä.
- (b) Kuinka suuri virhe tehdään, jos tätä arvioita käyttäen lasketaan $\ln(1,5)$?

Tehtävä 5. Perustele seuraavat kätevät approksimointikaavat

- (a) $e^x \approx 1 + x$
- (b) $\sqrt{1+x} \approx 1 + 1/2x$
- (c) $(1+x)^n \approx 1 + nx$
- (d) $\sin x \approx x$ ja $\cos x \approx 1$ (entä jos x ilmaistaan asteina?)

Tehtävä 6. Johda tulon derivointisääntö vektorifunktioiden pistetulolle $\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)$ (voit rajoittua tarkastelemaan 3-komponenttista funktiota). Toisin sanoen, laske

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) \right) \tag{31}$$

2 Integrointi

Derivoinnin lisäksi toinen fyysikon yleistyökalu on integrointi, joka mahdollistaa mm. funktion laskemisen jos sen derivaatta tunnetaan. Lisäksi integroimalla saadaan määritettyjä erilaisten alueiden pinta-aloja.

2.1 Summasta integraaliin

Tarkastellaan funktion $f(x)$ ja x -akselin välillä $[a, b]$ rajaaman alueen pinta-alaa. Voimme approksimoida tätä tutkimalla f :n sijasta ns. porraskunktiota $g(x)$, joka määritellään jakamalla väli $[a, b]$ osaväleihin $[x_0 = a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n = b]$ ja asettamalla g vakioksi jokaisella näistä osaväleistä.

Voimme esimerkiksi arvioida pinta-alaa alhaalta ja asettamalla jokaisella välillä $[x_i, x_{i+1}]$ $g(x) = \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$, ts. $g(x)$ on jokaisella välillä yhtä suuri kuin $f(x)$:n pienin arvo tällä välillä. Toisaalta voimme myös tutkia funktiota $h(x)$ joka määritellään vastaavasti mutta minimin sijasta asetetaan jokaisella välillä h :n arvoksi $f(x)$:n suurin arvo kyseisellä välillä.

Nyt $h(x)$:n ja $g(x)$:n rajaaman alueen pinta-ala on helppo laskea: funktioiden kuvaajat ovat pylväitä, joiden pinta-ala on helppo laskea. Tätä pinta-alaa kutsumme integraaliksi, ja porraskunktiolle g määrittelemme

$$\int_a^b g(x) dx = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) g(x_i), \quad (32)$$

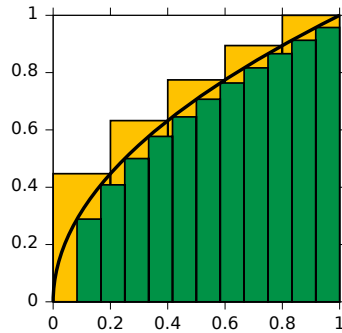
jossa siis lasketaan vain yksittäisten pylväiden pinta-alat yhteen. Vastaavasti voidaan integroida h . Nyt $f(x)$:n rajaaman alueen pinta-ala A on varmastikin $g(x)$:n ja $h(x)$:n rajaamien pinta-alojen välissä (koska $h(x) > f(x) > g(x)$):

$$\int_a^b g(x) dx < A < \int_a^b h(x) dx. \quad (33)$$

Kuvassa 3 on esitetty funktion $\sqrt{x}$ pinta-alan approksimointi ylhäältä ja alhaalta eri määrällä pylväitä.

Kun välin jakopisteiden (pylväiden) lukumäärä n kasvaa, molemmat approksimaatiomme varmastikin paranevat. Rajatapauksessa kun pisteiden lukumäärä menee äärettömäksi, g :n ja h integraalit lähestyvät samaa lukua, jonka määrittelemme funktion $f(x)$ integraaliksi (jos funktio ei ole integroitava, nämä eivät lähesty samaa lukua, mutta tällaisia tilanteita tulee fysiikassa vastaan harvoin⁷). Tällä

7. Matemaattinen perusesimerkki funktiosta, joka ei ole Riemann-integroitava, eli jolle ylä- ja alaintegraalit eivät lähesty samaa lukua, on funktio, jolle $f(x) = 1$ kun x on rationaaliluku, ja $f(x) = 0$, kun x on irrationaaliluku. Fysiikassa tällaisia ei ymmärrettävästi yleensä tule vastaan. Tällaisten patologisten funktioiden integroimiseksi tarvitaan ns. Lebesguen integraali (tulos on itse asiassa 0, koska rationaalilukuja on ”paljon vähemmän” kuin irrationaalilukuja).



Kuva 3. Funktion $\sqrt{x}$ rajaaman alueen pinta-ala välillä $[0,1]$ approksimoituna viidellä pylväällä ylhäältä (keltainen) ja 12 pylväällä alhaalta (vihreä).

tavalla integraali vastaa ääretöntä summaa

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_{i-1})f(x_i). \quad (34)$$

Huomaa, että äärettömän pienillä väleillä $g(x_i) = h(x_i) = f(x_i)$. Tämän voi ajatella selittävän myös merkinnän dx integraalin perässä: $f(x)$ on ohuen pylvään korkeus ja dx sen leveys, ja integroitaessa summataan kaikkien näiden pylväiden pinta-alat, jotka ovat siis muotoa $f(x)dx$.

Yllä esitetyllä tavalla määritellään ns. Riemann-integraali. Matemaattisen määritelmän tietäminen ei auta fysiikkakilpailuissa, mutta integraalin geometrinen tulkinta ja yhteys summaan on hyvä hahmottaa. Geometrisen tulkin hahmottaminen mahdollistaa fysikaalisen prosessin kuvaamisen matematiikan kielellä. Esimerkiksi on syytä huomata, että aika-nopeuskuvaaja (pystyakselilla nopeus v , vaaka-akselilla aika t) rajaaman alueen pinta-ala on kappaleen kulkema matka, ja matka saadaan siis integroimalla nopeutta ajan suhteen: $s = \int v(t)dt$.

2.2 Integroimistekniikoita

Toisin kuin derivointi, integrointi ei ole suoraviivainen toimenpide: tiettyjä perussääntöjä käyttäen ei voida integroida lähestulkoon mielivaltaisia funktioita kuten on tilanne derivoinnin kanssa. Edes niinkin yksinkertaiselta tuntuvalle asialle kuin kahden funktion tulolle ei ole olemassa integroimiskaavaa.

Kerrataan ensin täydellisyyden vuoksi muutama lukiosta tuttu perusasia. Funktion $f(x)$ integraalifunktio $F(x)$ toteuttaa yhtälön

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (35)$$

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
x^n	$1/(n+1)x^{n+1}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
e^x	e^x	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\ln x$	$-x + x \ln x$	$\tan(x)$	$-\ln(\cos(x))$

Taulukko 2. Yleisimpiä integraaleja (ilman integroimisvakiota)

Huomaa, että F ei ole yksikäsitteinen, vaan jos $F(x)$ on integraalifunktio, on $F(x) + C$ kaikilla vakioilla C integraalifunktio.

Aloitetaan toteamalla muutamien alkeisfunktioiden integraalit, jotka on listattu taulukossa 2. Laajempia listoja löytyy internetistä (esimerkiksi Wikipediasta).

Integroimiskaavat on aina helpointa tarkistaa derivoimalla, sillä⁸ $F'(x) = f(x)$. Integrointi on lisäksi lineaarinen operaatio:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx, \quad (36)$$

ja lisäksi

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (37)$$

Käsitellään seuraavaksi muutamia perinteisiä integroimistekniikoita, jotka ovat luultavasti tuttuja jo lukiokursseilta.

2.2.1 Muuttujanvaihto

Käsitellään muuttujanvaihto esimerkin kautta. Tehtävänä on laskea integraali

$$\int_1^2 (7x - 4)^3 dx. \quad (38)$$

Tämä voidaan tehdä seuraavasti: valitaan uudeksi muuttujaksi $t = 7x - 4$. Nyt jotta lauseke saadaan kirjoitettua t :n avulla, on ratkaistava x ja dx t :n funktioina:

$$t = 7x - 4 \quad (39)$$

$$dt = 7dx \Rightarrow dx = \frac{1}{7} dt. \quad (40)$$

Differentiaali saadaan siis laskettua derivoimalla t :n lauseketta x :n suhteen ja kertomalla dx :llä, ketjusäännön mukaan siis

$$dt = \frac{dt}{dx} dx. \quad (41)$$

8. Tämä on itse asiassa tärkeä ja epätriviaali tulos, joka tunnetaan nimellä *Analyysin peruslause*.

Lisäksi on huomattava, että integraalin rajat muuttuvat: alarajalla $x = 1$, joten $t = 7 \cdot 1 - 4 = 3$. Ylärajalla vastaavasti $x = 2$, joten $t = 7 \cdot 2 - 4 = 10$. Siis saamme tuloksen

$$\int_1^3 (7x - 4)^3 dx = \int_3^{10} \frac{1}{7} t^3 = \int_1^{10} \frac{1}{7} \frac{1}{4} t^4 = \frac{1}{28} (10^4 - 3^4) = \frac{1417}{4}. \quad (42)$$

Käytännössä näin yksinkertaisia integraaleja ei yleensä formaalisti tehdä muuttujanvaihdon avulla, vaan muokataan yhtälö suoraan sellaiseen muotoon, että sisäfunktion derivaatta (tässä tapauksessa 7) on edessä kertoimena. Voimme nimittäin kirjoittaa integraalin (38) muodossa

$$\int_1^2 (7x - 4)^3 dx = \frac{1}{7} \int_1^2 7(7x - 4)^3, \quad (43)$$

minkä voi integroida suoraan huomaamalla, että $D(7x - 4) = 7$, ja että⁹

$$\int g'(x)f(g(x)) = F(g(x)) + C, \quad (44)$$

jos F on f :n integraalifunktio (esimerkissämme siis $g(x) = 7x - 4$, $f(x) = x^3$ ja $F(x) = 1/4x^4$). Huomaa, että tästä seuraa myös seuraava tulos:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C. \quad (45)$$

Otetaan lopuksi vielä toinen esimerkki, jossa integraalifunktiota ei näe yhtä helposti kuin ensimmäisessä esimerkissä, vaan muuttujanvaihto on oikeasti tehtävä tarkasti.

Esimerkki 4. Integroi

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (46)$$

Ratkaisu: Sijoitetaan $x = \sin u$, jolloin $dx = \cos u du$, ja siten

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\cos u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} du = \int du = u + C, \quad (47)$$

missä käytimme tulosta $1 - \sin^2 u = \cos^2 u$, eli $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$. Sijoittamalla lopulta takaisin $u = \arcsin x$ saamme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C. \quad (48)$$

9. Tarkista derivoimalla jos et usko.

2.2.2 Osittaisintegrointi

Tarkastellaan tulon derivointikaavaa

$$\frac{d}{dx}(u(x)v(x)) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad (49)$$

Ratkaisemalla tästä $u'(x)v(x)$ ja integroimalla puolittain x :n yli saamme (koska $\int \frac{d}{dx}(u(x)v(x))dx = u(x)v(x)$)

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx. \quad (50)$$

Osittaisintegroinnissa siis integraali $\int u'v$ muuttuu integraaliksi $\int uv'$ (joka toivottavasti on helpompi laskea) ja integrointia sisältämättömäksi termiksi. Jos laskettavana on määrätty integraali a :sta b :hen, saadaan vastaavasti tulos

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b u(x)v(x) - \int_a^b u(x)v'(x)dx, \quad (51)$$

sillä $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

Esimerkki 5. Laske

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx. \quad (52)$$

Merkitään $u'(x) = e^{-x}$ ja $v(x) = x$. Siten $u(x) = -e^{-x}$ ja $v'(x) = 1$, jolloin saamme

$$\begin{aligned} \int_0^\infty xe^{-x}dx &= \int_0^\infty x(-e^{-x}) - \int_0^\infty (-e^{-x})dx \\ &= 0 + \int_0^\infty e^{-x}dx = \int_0^\infty (-e^{-x}) = 1, \end{aligned} \quad (53)$$

sillä $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$.

2.3 Epäoleellinen integraali

Edellä laskettiin määrättyjä integraaleja yli äärellisen välin $[a, b]$ siten, että integroitava funktio $f(x)$ oli äärellinen tällä välillä. Näin ei kuitenkaan aina ole, monesti fysiikassa on kiinnostavaa tutkia ilmiöitä kaukana jostain, jolloin joudutaan integroimaan äärettömän kauas (yläraja ∞). Toisaalta integroitava funktio saattaa formaalisti ”räjätää” esimerkiksi nollassa, mutta silti integraali nolasta johonkin ylärajaan on äärellinen ja fysikaalisesti kiinnostava.

Epäoleellinen integraali voidaan laskea raja-arvona

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx. \quad (54)$$

Vastaavasti voidaan käsitellä tilanne, jossa alaraja on $-\infty$ tai jos funktio on ääretöntä rajalla. Monesti raja-arvoa ei merkitä näkyviin.

Tarkastellaan esimerkkinä käyrän $1/\sqrt{x}$ ja x -akselin rajaaman alueen pinta-alaa välillä $[0,1]$. Ei ole mitenkään etukäteen selvää, onko tämä pinta-ala äärellinen vai ei.

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}. \quad (55)$$

Siis pinta-ala on hyvinkin äärellinen. Huomaa, että jos integroitavana olisi ollut esimerkiksi funktio $1/x^2$, olisi sijoitustermiä laskettaessa tullut eteen termi $1/x$ kun $x = 0$, joten pinta-ala olisi ollut ääretön eikä integraali siis suppenisi tässä tapauksessa.

2.4 Moniulotteinen integrointi

2.4.1 Kaksiulotteinen integraali

Määrittelimme luvun alussa integroinnin siten, että approksimoimme funktiota pylväillä, ja laskimme pylväiden ja x -akselin rajaaman alueen pinta-alan. Vastaavasti määrittelemme useampiulotteisen integraalin. Aloitetaan tarkastelemalla kaksiulotteista integraalia, jonka jälkeen siirtyminen korkeampiin dimensioihin on suoraviivaista.

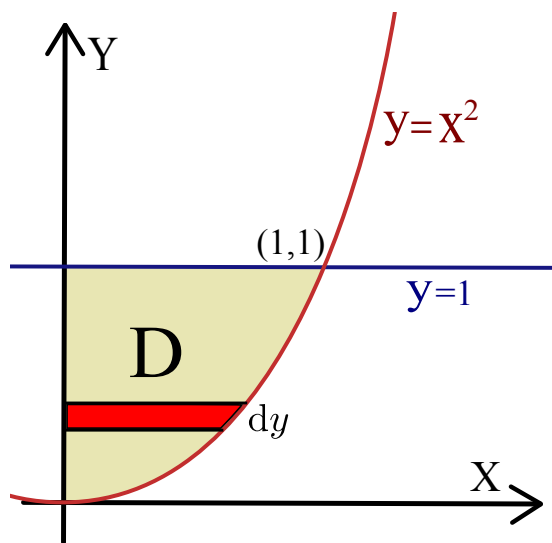
Olkoon meillä funktio $f(x,y)$ jonka haluamme integroida kaksiulotteisen xy -tason alueen A yli. Voimme määritellä tämän heuristisesti kuten yksiulotteisessa tapauksessa: jaamme alueen R N osaan, olkoot ne R_i , $i = 1, 2, \dots, N$ siten, että piste (x_i, y_i) on (esimerkiksi suorakulmion) R_i keskipiste. Nyt integraaliin päästään käsiksi tarkastelemalla summaa

$$\sum_{i=1}^N f(x_i, y_i) \Delta A_i, \quad (56)$$

missä ΔA_i on alueen A_i pinta-ala. Ottamalla raja $N \rightarrow \infty$, päädymme integraaliin yli alueen R :

$$\int_R f(x,y) dA, \quad (57)$$

missä dA on pieni xy -tason alue. Jos valitsemme nämä pienet alueen suorakulmioiksi (palaamme muihin valintoihin myöhemmin) saamme $\Delta A = \Delta x \Delta y$, joten



Kuva 4. Käyrien $y = x^2$ ja $y = 1$ sekä x -akselin rajaama alue D .

$dA = dx dy$ (eli pienen alueen dA pinta-ala on sivujen pituuksien tulo $dx dy$). Saamme siis

$$\int_R f(x,y) dA = \iint_R f(x,y) dx dy, \quad (58)$$

eli laskettavana on luultavastikin kaksi sisäkkäistä integraalia, voimme (ilmeisesti-kin) integroida erikseen x :n ja y :n yli!

Motivaatio tällaiselle laskulle on esimerkiksi (epäsäännöllisen muotoisen) levyn massan laskeminen: olkoon kappaleen pintatiheys pisteessä (x,y) $\rho(x,y)$ (yksikkönä siis kg/m^2 , jos pintatiheys on vakio, niin massa on $\rho \cdot A$, missä A on pinta-ala). Nyt selvästikin pienen alueen massa on $\rho(x,y) dA = \rho(x,y) dx dy$, joten koko kappaleen R massa on

$$\iint_R \rho(x,y) dx dy. \quad (59)$$

Toinen esimerkki on tilavuus: xy -tason alue R ja käyrä $f(x,y)$ rajaavat alueen, jonka tilavuus on

$$V = \iint_R f(x,y) dx dy. \quad (60)$$

Mieti taas pienten pylväiden tilavuuksia!

Monesti kahden integrointimerkin sijasta käytetään vain yhtä tavallista integrointimerkkiä.

Integraalia laskettaessa on oltava tarkkana siinä, mitkä ovat integraalien rajat. Integraali voidaan laskea summaamalla pienet vaakasuorat dy :n paksuiset pylväät. Tällöin ensin lasketaan integraali x :n yli siten, että alarajana on $x_1(y)$ ja yläraja

$x_2(y)$, missä x_1 ja x_2 ovat funktioita, jotka antavat alueen vasemman ja oikean reunan x -koordinaatin y :n funktiona. x -integraalia laskettaessa y pidetään vakiona, jollin saamme

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_{y=c}^{y=d} \left[\int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} f(x,y) dx \right] dy. \quad (61)$$

x -integraalin jälkeen jäljellä on vain y :stä riippuva funktio, joka voidaan nyt integroida normaalisti y :n rajojen $[c,d]$ yli.

Vastaavasti voisimme tarkastella dx :n paksuisia pystysuoria pylväitä ja laskea ensin y -integraalin. Järjestyksestä riippumatta saadaan sama tulos.

Tarkastellaan tätä seuraavan esimerkin valossa:

Esimerkki 6. Laske käyrien $y = x^2$, $y = 1$ ja positiivisen x -akselin rajaaman alueen D massa, jos pintatiheys on $\rho(x,y) = xy$.

Ratkaisu: tilanne on esitetty kuvassa 4. Nyt siis edellisen teoriaosan merkinnöin $c = 0$, $d = 1$ ja $x_1(y) = 0$ ja $x_2(y) = \sqrt{y}$. Jaamme alueen nyt ohuisiin vaakasuoriin (paksuus dy) suorakaiteisiin siten, että suorakaiteen alkupiste on $x = 0$ ja loppupiste $x = \sqrt{y}$. Kuvassa 4 oleva punainen alue on yksi tällainen suorakulmio: kun dy on pieni, on alue hyvin tarkasti suorakulmio, jonka pinta-ala on $\sqrt{y}dy$.

Nyt saamme käytyä läpi ("maalattua") koko alueen D piirtämällä kaikilla y x -akselin suuntaisen suorakaiteen, joka lähtee pisteestä $x = 0$ ja päättyy pisteeseen $x = \sqrt{y}$. Näin tehdään jokaisella y siten, että aluksi $y = 0$ ja lopuksi $y = 1$.

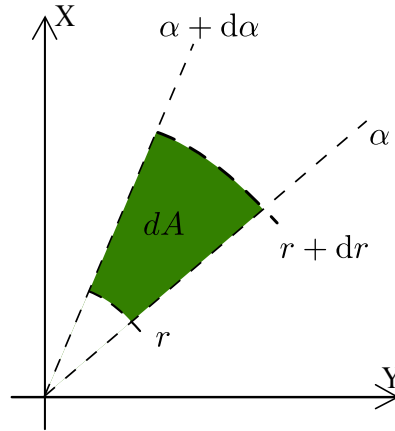
Kirjoitamme siis massan integraalina

$$\begin{aligned} \iint_D \rho(x,y) dA &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} \rho(x,y) dx \right) dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} xy dx dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} y \frac{1}{2} x^2 \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{2} y \cdot (|y| - 0) dy = \frac{1}{6} \int_0^1 x^3 = \frac{1}{6}, \end{aligned} \quad (62)$$

sillä koska $y > 0$ voimme kirjoittaa $\sqrt{y^2} = |y| = y$.

2.4.2 Integrointi napakoordinaatistossa

Jos integroimisalue ei ole kulmikas, saattaa integraalin rajojen kirjoittaminen olla hankalaa karteesisessä xy -koordinaatistossa. Tällöin kannattaa monesti käyttää jotain muuta koordinaatistoa. Monesti fysikaalisissa ongelmissa on olemassa jonkinlainen kiertosymmetria (esimerkiksi ympyrän kehältä on aina sama matka keskipisteeseen), joten monesti kannattaa käyttää napakoordinaatteja.



Kuva 5. Pinta-alaelementti dA napakoordinaatistossa.

Napakoordinaatistossa siis piste (x,y) määrätään antamalla etäisyys origosta r ja kulma α , jonka positiivinen x -akseli ja origosta pisteeseen kulkeva jana muodostavat (kulma kasvaa vastapäivään). Tällöin selvästikin on voimassa

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}. \quad (63)$$

Kartesisisessä koordinaatistossa pinta-alaelementti dA oli yksinkertaisesti suorakaiteen pinta-ala $dx dy$. Entä napakoordinaatistossa? Katsotaan kuvaa 5. Kun dr ja $d\alpha$ ovat pieniä, voidaan dA :ta approksimoida taas suorakaiteella, jonka toisen sivun pituus on $r + dr - r = dr$ ja toisen $r d\alpha$ (huomaa, että kulma ilmaistaan nyt radiaaneina, jolloin kulmaa $d\alpha$ vastaavan r -säteisen ympyränkaaren pituus on $r d\alpha$, ja rajalla jossa $d\alpha$ ja dr ovat pieniä, tämä on käytännössä suorakaiteen toisen sivun pituus¹⁰). Toteamme siis, että

$$dA = r d\alpha \cdot dr. \quad (64)$$

Esimerkki 7. Lasketaan R -säteisen ympyrälevyn D hitausmomentti keskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen, kun levyn pintamassatiheys on $\rho(x,y)$. Nyt x - ja y -koordinaattien miettiminen on vaikeaa, mutta voimme siirtyä napakoordinaatteihin, jossa koordinaatteina ovat r ja θ , ja nyt $0 \leq r \leq R$, ja $0 \leq \theta < 2\pi$.

Nyt pienen alkion massa $dm = \rho(r,\theta)dA = \rho(r,\theta)r dr d\theta$, ja tällaisen alkion hitaus-

10. Huomaa, että vaikka perustelemme asioita geometrisesti arvioiden käytöstä pienillä muutoksilla, ovat tuloksemme eksakteja, sillä tekemistämme arvioinneista aiheutuvat virheet häviävät tarkasti rajalla, jossa $d\alpha \rightarrow 0$ ja $dr \rightarrow 0$. Tämä voidaan tietysti osoittaa tarkasti, mutta siihen ei tässä mennä.

momentti on¹¹ $r^2 dm = \rho(r, \theta) r^3 dr d\theta$. Koko hitausmomentti saadaan summaamalla pienten massa-alkioiden hitausmomentit (ja rajalla, jossa alue jaetaan suureen määrään hyvin pieniä alkioita $\Sigma \rightarrow f$), joten hitausmomentiksi saadaan

$$J = \iint_D r^2 dm = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R = \int \rho(r, \theta) r^3 dr d\theta. \quad (65)$$

Jos levyn tiheys on vakio ρ , eli $\rho(r, \theta) = \rho$ kaikilla r, θ , saamme

$$J = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \rho r^3 dr d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{4} r^4 d\theta = \frac{2\pi}{4} \rho r^4. \quad (66)$$

Nyt toisaalta levyn massa $m = A\rho = \pi r^2 \rho$, joten

$$J = \frac{1}{2} m r^2. \quad (67)$$

Esimerkki 8. Puhtaan matemaattinen/laskennallinen esimerkki, mutta tulos on (ainakin kirjoittajan mielestä) jännä: Tehtävänä on laskea ns. Gaussinen integraali

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx. \quad (68)$$

Huomaa, että emme voi integroida funktiota e^{-x^2} suoraan, ts. sen integraalifunktiota ei voi esittää alkeisfunktioiden (peruslaskutoimitukset, logaritmi, trigonometriset funktiot jne) avulla. Voimme kuitenkin laskea tämä määrätyn integraalin, tehdään tämä laskemalla I^2 :

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy. \quad (69)$$

Koska x on y -integroinnin suhteen vakio ja päinvastoin, voimme kirjoittaa tämän muodossa

$$I^2 = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \quad (70)$$

missä kirjoitimme $e^{-x^2} e^{-y^2} = e^{-x^2-y^2}$. Tämä siis vastaa sitä, että integroimme funktiota $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ yli koko xy -tason. Siirrytään käyttämään napakoordinaatteja, jolloin integroimme sädetä r välillä $0 \rightarrow \infty$ ja kulmaa θ välillä $0 \rightarrow 2\pi$ (näin tulemme käyneeksi läpi koko tason). Tällöin $x^2 + y^2 = r^2$, joten

$$I^2 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta. \quad (71)$$

11. Jos differentiaalien, kuten dm , ajattelu tuntuu vaikealta, voit ajatella alueen jakamista pieniin (mutta äärellisen kokoisiin) alkioihin Δm , ja tämän jälkeen miettiä rajaa, jossa näitä alkioita on hyvin paljon ja ne ovat pieniä.

r -integraali on nyt helppo tehdä, sillä meillä on sisäfunktion derivaatta edessä kertoimena: funktion re^{-r^2} integraalifunktio on $1/2e^{-r^2}$. Siten saamme

$$I^2 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-r^2} \right) d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi. \quad (72)$$

Siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (73)$$

2.4.3 Kolmiulotteinen integrointi ja pallokoordinaatisto

Edellä esitetty prosessi yleistyy suoraan kahdesta ulottuvuudesta useampaan ulottuvuuteen, kun integroimme funktiota $f(x_1, \dots, x_N)$ yli alueen V , jaamme alueen pieniin dV :n kokosiin osiin (tilavuuselementteihin), ja summaamme funktion arvot kaikissa näissä alueissa. Integraali saadaan ottamalla raja-arvo, kun tilavuuselementtien määrä kasvaa äärettömäksi.

Kartesisisessa xyz -koordinaatistossa voimme siis kirjoittaa funktion $f(x, y, z)$ integraalin muodossa

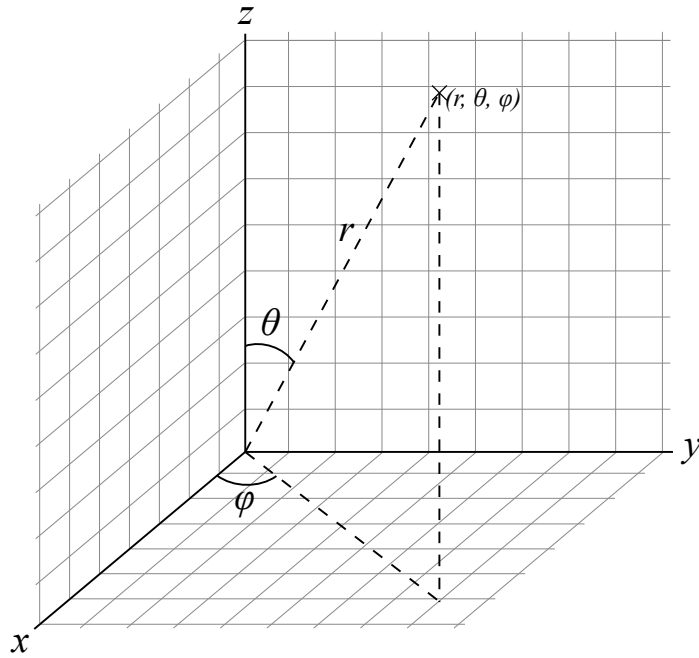
$$\int \int \int f(x, y, z) dx dy dz. \quad (74)$$

Huomaa, että taaskin integroimisjärjestyksellä (mikä muuttuja integroidaan ensin) ei sinänsä ole merkitystä, mutta integroimismuuttujien rajat on aina mietittävä tapauskohtaisesti.

Monesti tarkastellaan pallosymmetristä tilannetta, jolloin kannattaa käyttää pallokoordinaatistoa, joka on esitetty kuvassa 6. Huomaa esimerkiksi, että origokeskeisen 1-säteisen pallon rajaaman alueen kuvaaminen xyz -koordinaattien avulla on hankalaa. Pallokoordinaateissa se on kuitenkin helppoa: tarkastelemme aluetta, jossa säde (etäisyys origosta) on $0 \leq r \leq 1$, ja jossa kulma θ (mitattuna positiivisesta z -akselista) on välillä $[0, \pi]$ ja kulma ϕ (mitattuna positiivisesta x -akselista vastapäivään) välillä $[0, 2\pi]$. Huomaa, että θ :n yläraja on nimenomaan π eikä 2π , sillä jos myös se olisi rajoitettu välille $[0, 2\pi]$, käytäisiin pallo läpi kahdesti.

Pallokoordinaatiston tilavuusalkio $dV = dx dy dz$ on esitetty kuvassa 7. Kun θ kasvaa määrän $\theta + \delta\theta$, saadaan laatikon yhden sivun pituudeksi $r\delta\theta$ (r -säteisen ympyrän keskuskulmaa $\delta\theta$ vastaa kaaren pituus $r\delta\theta$, ja koska $\delta\theta$ on pieni, on kyseessä likimain suora sivu). Vastaavasti kun xy -tasossa oleva kulma ϕ kasvaa hieman, paikkavektorin xy -tason suuntainen komponentti (pituus $r \sin \theta$) piirtää laatikolle sivun, jonka pituus on $r \sin \theta \delta\phi$. Lisäksi kun r kasvaa arvon δr verran, saadaan laatikon korkeudeksi δr . Siten laatikon kooksi saadaan

$$\delta V = r\delta\theta \cdot r \sin \theta \delta\phi \cdot \delta r \rightarrow r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (75)$$



Kuva 6. Pallokoordinaatisto.

sillä rajalla kun δr , $\delta \theta$ ja $\delta \phi$ ovat hyvin pieniä (eri merkitsemme vain $\delta \rightarrow d$).

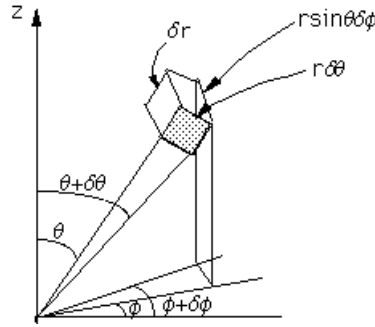
Esimerkki 9. Laske R -säteisen pallon tilavuus

R -säteisen pallon rajaama alue voidaan esittää pallokoordinaatistossa siten, että $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$ ja $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Siis

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint dV = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \left(\int_0^R r^2 dr \right) \sin \theta d\theta \right) d\phi \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \left(\frac{1}{3} R^3 \right) \sin \theta d\theta \right) d\phi \\
 &= \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi (-\cos \theta) d\theta \right) d\phi \\
 &= \frac{2R^3}{3} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4}{3} \pi R^3.
 \end{aligned} \tag{76}$$

2.5 Vektorifunktion integraali

Edellä tarkasteltiin reaaliarvosen funktion integroimista kaksi- tai kolmiulotteisen alueen yli. Tarkastellaan seuraavaksi vektoriarvoista funktiota, eli funktiota



Kuva 7. Tilavuusalkio pallokoordinaatistossa.

$f(\vec{r}) = (f_1(\vec{r}), f_2(\vec{r}), f_3(\vec{r}))^{12}$, ja sen integraalia kolmiulotteisessa avaruudessa. Tarvitsemme näitä taitoja erityisesti kun tarkastelemme Maxwellin yhtälöitä muualla valmennusmateriaalissa.

2.5.1 Viivaintegraali

Lähestytään viivaintegraalin käsitettä tuttujen fysikaalisten tilanteiden kautta. Jos kappaleeseen vaikuttaa liikkeen suuntainen vakiovoima F matkan s ajan, voima tekee työn $W = Fs$. Toisaalta jos voima on kohtisuorassa liikesuuntaa vastaan (esimerkiksi varattu hiukkanen magneettikentässä), voima ei tunnetusti tee lainkaan työtä. Työtä tekee siis voiman liikkeen suuntainen komponentti.

Jos $\hat{u}$ on yksikkövektori, vektorin $\vec{v}$ vektorin $\hat{u}$ suuntainen komponentti on tunnetusti $\hat{u} \cdot \vec{v}$ (perustele geometrisesti itsellesi jos et usko!). Edelleen mielivaltaisen (ei-yksikkövektorin) $\vec{u}$ suuntainen komponentti on $\vec{v} \cdot \vec{u}/|\vec{u}|$. Koska voiman tekemä työ on suoraan verrannollinen sekä voimaan että sen vaikutusmatkaan, ilmeisestikin $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

Siirrytään sitten tapaukseen, jossa voima $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ei ole vakio vaan riippuu paikasta (ja sitä myöten ajasta, koska yleensä $\vec{x} = \vec{x}(t)$, eli paikka on ajan funktio). Tarkastellaan nyt tilannetta, jossa hiukkanen liikkuu pisteestä $\vec{x}_0 = \vec{x}(t = 0)$ pisteeseen $\vec{x}_1 = \vec{x}(t = T)$. Siirrymme taas ajattelemaan pieniä muutoksia: kun hiukkanen liikkuu pienen matkan $d\vec{x}$, voima tekee työn $dW = \vec{F} \cdot d\vec{x}(t)$ (huomaa, että $\vec{F} = \vec{F}(x) = \vec{F}(x(t))$, mutta käytämme lyhennysmerkintää emmekä merkitse argumenttia näkyviin jokaiseen väliin).

Paikkavektorin pieni muutos $d\vec{x}$ saadaan ilmeisestikin vektorifunktion $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ derivaatasta $x'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t))$ joka siis edelleen on

12. Tarkastelu yleistyy toki useampaan ulottuvuuteen, mutta fyysikolle tärkein esimerkki on kolmiulotteinen avaruus.

vektori ja kertoo, mihin suuntaan ja kuinka nopeasti paikkavektori muuttu ($\vec{v}(t) = \vec{x}'(t)$). Nyt paikkavektorin pieni muutos on

$$d\vec{x} = \vec{x}'(t)dt, \quad (77)$$

minkä saamme esimerkiksi pyörittelemällä differentiaaleja

$$d\vec{x} = \frac{d\vec{x}}{dt}dt = \vec{x}'(t)dt. \quad (78)$$

Yhdistämällä edelliset tulokset saamme laskettua voiman tekemän työn kun hiukkanen liikkuu pisteestä $\vec{x}_0$ pisteeseen $\vec{x}_1$:

$$W = \int_0^T \vec{F}(t) \cdot \vec{x}'(t)dt. \quad (79)$$

Koska pistetulo on tavallinen luku, on tämä tavallinen yksiulotteinen integraali joka on helppo laskea.

Yleisesti vektorifunktion $\vec{f}(t)$ integraali reittiä γ pitkin, missä reitin antaa kuvaus $\vec{s}(t)$, ja $t \in [a, b]$, on

$$\int_{\gamma} \vec{f}(t) \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(t) \cdot \vec{s}'(t)dt. \quad (80)$$

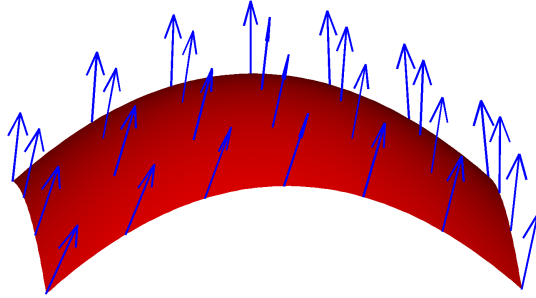
2.5.2 Vuo

Viivaintegraalia laskettaessa integroitiin vektorifunktiota yksiulotteista käyrää pitkin. Vastaavasti voimme tarkastella vektorifunktion integraalia pinnan yli, joka antaa *vuon*.

Geometrisesti tämä tarkoittaa esimerkiksi sitä, että meillä on virtaava neste, ja virtauksen pisteessä $\vec{x}$ antaa funktio $\vec{f}(\vec{x})$ (yksikkönä esim. $\text{kg}/(\text{m}^2\text{s})$). Toisena esimerkkinä voimme tarkastella esimerkiksi auringon säteilyn tehoa pinta-alayksikköä kohden, jolloin funktion f yksikkönä olisi $\text{W}/\text{m}^2 = \text{J}/(\text{m}^2\text{s})$.

Haluamme nyt laskea, paljonko nestettä virtaa nesteen poikkileikkauksen tai jonkin mielivaltaisen muotoisen pinnan läpi. Olkoon tämä pinta Σ . Nyt virtaus ei välttämättä ole kohtisuorassa pintaa Σ vastaan jokaisessa pinnan pisteessä, joten kun tarkastelemme pientä pinnan osaa (pinta-ala $d\vec{A}$ (pinta-alavektorin suunta on sellainen, että se on kohtisuorassa pintaa vastaan ja osoittaa ”ulospäin”), virtaus tämän pinta-alaelementin läpi on $\vec{f} \cdot d\vec{A}$, eli funktion $\vec{f}$ komponentti pintaa vastaan kohtisuoraan suuntaan.

Tilanne on esitetty kuvassa 8, jossa havainnollistetaan sitä, että vektorikenttä ei yleensä ole kohtisuorassa pintaa vastaan. Edellisen keskustelun perusteella



Kuva 8. Vektorikenttä (siniset nuolet) pinnan läpi.

huomaamme, että kokonaisvuo pinnan läpi saadaan summaamalla pienet vuot $\vec{f} \cdot d\vec{A}$ (huomaa, että esim. nestevirtausta tarkasteltaessa tämän yksikkö on kg/s). Siis saamme vuoksi

$$\Phi = \int \vec{f} \cdot d\vec{A}. \quad (81)$$

Tarkastellaan yksinkertaista tapausta: olkoon meillä nestevirtaus $\vec{f}(\vec{x}) = c\hat{e}_z$, missä c on vakio. Tämä vastaa siis vakionopeudella z -akselin suuntaan kulkevaa virtausta. Tällöin kokonaisvirtaus 1m^2 -säteisen xy -tasolla olevan ympyrän läpi on

$$\int \vec{f} \cdot d\vec{A} = c \int \hat{e}_z \cdot d\vec{A} = cA, \quad (82)$$

missä $A = 1\text{m}^2$, koska $d\vec{A}$ on z -akselin suuntainen.

Yleisessä tapauksessa vektorifunktion $\vec{f}$ ja pinta-alavektorin $d\vec{A}$ kulma voi olla mitä tahansa, ja tämä on huomioitava pistetuloa laskettaessa. Fysikaalisissa tilanteissa on yleensä mahdollista päätellä kulma tilanteen geometriasta.

Mainitsemme tässä täydellisyyden vuoksi myös vektorin $d\vec{A}$ laskemisen yleisessä tapauksessa (tätä tuskin kannattaa opetella ulkoa). Kaksiulotteisen pinnan S parametrisointiin tarvitsemme kaksi parametria, olkoot ne s ja t . Tällöin siis pinta koostuu pisteistä $\vec{S}(s,t)$, missä s ja t ovat jollein välille rajoitettuja reaalilukuja.

Nyt pieni pinta-alaelementti saadaan laskettua ristitulolla (muista, että kahden vektorin ristitulo on verrannollinen niiden rajaaman suunnikkaan pinta-alaan): pinta-alaelementin rajaavat vektorit

$$\frac{\partial \vec{S}(s,t)}{\partial s} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \vec{S}(s,t)}{\partial t}, \quad (83)$$

eli funktion $\vec{S}(s,t)$ osittaisderivaatat eri parametrien suhteen. Saamme siis

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{S}(s,t)}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{S}(s,t)}{\partial t} ds dt. \quad (84)$$

2.6 Tehtäviä

Tehtävä 7. Integroi

- (a) $\ln x$ (Vihje: osittaisintegrooi)
- (b) $(x^2 + 4x + 7)^{-1}$ (Vihje: kirjoita nimittäjä muodossa $(x - a)^2 + b$ joillakin vakioilla a, b ja tee sopiva sijoitus)

Tehtävä 8. Oletetaan, että hiukkasen kiihtyvyys on vakio $a(t) = a_0$. Hiukkanen on aluksi (ajan hetkellä $t = 0$) pisteessä x_0 ja liikkuu nopeudella v_0 . Laske integroimalla hiukkasen nopeus ja paikka jaan hetkellä t . Tuloksen pitäisi olla hyvinkin tuttu.

Tehtävä 9. Tutki funktion x^p ja x -akselin rajaaman alueen pinta-alaa

- (a) välillä $[0, 1]$.
- (b) välillä $[1, \infty]$.

Miten potenssi $p = -1$ on erityinen?

Tehtävä 10. Gravitaatiokentässä kappaleeseen vaikuttava voima on muotoa $f(r) = A/r^2$ (tässä siis $A = GmM$, jos m ja M ovat kappaleiden massat, mutta ne eivät ole tässä tehtävässä mielenkiintoisia). Oletetaan, että kappale on aluksi pisteessä $x = 1$. Laske työ, joka tarvitaan hiukkasen siirtämiseksi äärettömän kauas, ts.

$$W = \int_1^\infty f(x) dx. \quad (85)$$

Tehtävä 11. Laske esimerkki 6 käyttäen pystysuoria pylväitä.

Tehtävä 12. Laske tasasivuisen kolmion (sivun pituus a) hitausmomentti kolmion kärjen kautta kulkevan pyörimisakselin suhteen. Akseli on kohtisuorassa levyä vastaan ja levyn tiheys on ρ (yksiköissä kg/m^2).

Tehtävä 13. Laske R -säteisen puolipallon (pallo alueessa $z > 0$) hitausmomentti pallon keskipisteen kautta kulkevan z -akselin suuntaisen akselin suhteen. Ohje: jos pallon tiheys on vakio ρ , niin pienen tilavuusalkion massa on $dm = \rho dV$, ja hitausmomentti edelleen $dJ = r^2 dm = r^2 \rho dV$. Hitausmomentti saadaan laskemalla yhteen kaikkien näiden pienten alkoiden hitausmomentit, eli laskemalla $\int \int \int dJ$.

3 Differentiaaliyhtälöistä

Differentiaali- ja integraalilaskentaan liittyy läheisesti ns. differentiaaliyhtälöt. Siinä missä tavallista yhtälöä ratkaistaessa etsitään lukua x , joka toteuttaa yhtälön $y(x) = 0$, differentiaaliyhtälöä ratkaistaessa etsitään sellaista funktiota y , joka toteuttaa annetun yhtälön jossa on myös tuntemattoman funktion $y(x)$ derivaattoja.

Esimerkiksi differentiaaliyhtälö

$$y(x) + y'(x) + x = 0 \quad (86)$$

sisältää tuntemattoman funktion y ja sen ensimmäisen derivaatan. Tästä johtuen kyseessä on ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö. Tehtävänä on löytää mahdollisimman yleinen funktio $y(x)$, joka toteuttaa tämän yhtälön. Yleinen tarkoittaa tässä sitä, että yleisesti kertaluvun n differentiaaliyhtälöä ratkaistaessa saadaan ratkaisuun n integroimisvakiota, jotka ovat mielivaltaisia lukuja. Lukujen numeroarvot saadaan ratkaistua tehtävän *reunaehdoista*, esimerkiksi että $y(0) = 0$ (tai vaikkapa, että hiukkasen nopeus aluksi on 0).

Esimerkiksi yhtälön (86) ratkaisee funktio $y(x) = Ce^{-x} + 1 - x$, missä C on mielivaltainen vakio. Sijoittamalla tämän lausekkeen yhtälöön (86) voi todeta, että yhtälö pätee kaikilla luvuilla C . Differentiaaliyhtälöjen ratkaisut onkin aina mahdollista tarkistaa sijoittamalla.

3.1 Separoituvat yhtälöt

Helpoimmin ratkaistavia yhtälöitä ovat ns. separoituvat yhtälöt, jotka voidaan kirjoittaa muodossa

$$y'(x) = f(x)g(y(x)), \quad (87)$$

tai käyttäen derivaatalle differentiaalimerkintää

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y(x)), \quad (88)$$

missä f ja g ovat mielivaltaisia funktioita. Huomaa, että edellä käsitelty esimerkkiyhtälö (86) ei ole separoituva. Siirtämällä tässä yhtälössä kaikki y -riippuvat termit vasemmalle ja x -riippuvat termit oikealle saadaan¹³

$$\frac{dy}{g(y(x))} = f(x)dx, \quad (89)$$

13. Tässä siis on kerrottava yhtälön molemmat puolet differentiaalilla dx . Tämä ei matemaattisesti ole täysin eksaktia, mutta koska se toimii, se riittää tarkoituksiimme tässä yhteydessä.

mistä integroimalla saamme

$$\int \frac{dy}{g(y(x))} = \int f(x) dx. \quad (90)$$

Integroimalla puolittain saadaan tavallinen yhtälö, josta voidaan ratkaista funktio $y(x)$ kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki 10. Ratkaistaan yhtälö $y'(x) = x + xy(x)$. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi kirjoitetaan $y = y(x)$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x + xy \\ \frac{dy}{dx} &= x(1 + y) \\ \frac{dy}{1 + y} &= x dx \\ \int \frac{dy}{1 + y} &= \int x dx \\ \ln(1 + y) + C_1 &= \frac{x^2}{2} + C_2 \\ \ln(1 + y) &= \frac{x^2}{2} + \underbrace{C_2 - C_1}_{=C'} \\ 1 + y &= e^{\frac{1}{2}x^2} \underbrace{e^{C'}}_{=C} \\ y &= Ce^{\frac{1}{2}x^2} - 1. \end{aligned} \quad (91)$$

Huomaa, että voimme aina määritellä esimerkiksi kahden integroimisvakion summan uudeksi integroimisvakioiksi. Jos nyt lisäksi tunnetaan alkuehto $y(0) = 0$, voidaan ratkaista, että lisäksi $C = 1$, jolloin ratkaisufunktioon ei jää mielivaltaisia vakioita.

Edellinen lasku ei ole pätevä, jos $y(x) = -1$ kaikilla x (miksi?) Tämä on kuitenkin myös yksi mahdollinen yhtälön ratkaisu (jota ei saada lopullisesta ratkaisusta, koska emme voi valita $C = 0$, koska $C = e^{\text{luku}} = 0$). Tällaisia erityisratkaisuja saadaan esim. silloin, jos separoitaessa joudutaan jakamaan termillä, joka saattaa olla nolla. Monesti (joskaan ei aina) tällaiset erityisratkaisut eivät ole fysikaalisesti mielenkiintoisia.

Esimerkki 11. Ilmanvastus

Tarkastellaan kappaleen putomaista tilanteessa, jossa siihen vaikuttaa nopeudesta riippuva putoamista hidastava ilmanvastus, joka on verrannollinen nopeuteen v

(tämä pätee pienillä nopeuksilla, jos nopeudet ovat suuria verrannollisuus voi olla esimerkiksi v^2).

Olkoon kappaleen massa m jolloin siihen vaikuttaa vetovoima mg (valitaan suunta alaspäin positiiviseksi) ja ilmanvastus $-\beta v$ ($\beta > 0$ vakio, jolla on sopiva yksikkö). Nyt siis Newtonin 2. lain nojalla

$$ma = F = mg - \beta v. \quad (92)$$

Kirjoitetaan tästä differentiaaliyhtälö huomaamalla, että $a = a(t) = dv/dt$ ja ratkaistaan kyseinen yhtälö (oletamme tietysti, että $mg > \beta v$):

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= mg - \beta v \\ \frac{dv}{g - \frac{\beta}{m}v} &= dt \\ \int \frac{dv}{g - \frac{\beta}{m}v} &= \int dt \\ -\frac{m}{\beta} \ln \left(g - \frac{\beta}{m}v \right) &= t + C' \end{aligned} \quad (93)$$

Tästä voidaan ratkaista vaatimalla, että $v(t=0) = 0$,

$$v(t) = \frac{mg}{\beta} \left(1 - e^{-\beta t/m} \right). \quad (94)$$

Huomaa, että kappaleen nopeus lähestyy siis arvoa mg/β .

3.2 Harmoninen oskillaattori

Tarkastellaan seuraavaksi monesti eteen tulevaa esimerkkiä toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöstä, nimittäin harmonista oskillaattoria. Tällainen on esimerkiksi kitkattomalla vaakasuoralla pinnalla jouseen kiinnitetty palikka (jousen toinen pää on kiinnitetty kiinteään seinään). Jos merkitsemme jousen pituuden muutosta x :llä (pituuden muutos tasapainopituuteen nähden, voi siis olla myös negatiivinen), vaikuttaa kappaleeseen jousivoima $F = -kx$. Toisaalta voima aiheuttaa Newtonin lain nojalla kiihtyvyyden ma , joten saamme

$$-kx = ma. \quad (95)$$

Nyt paikka ja kiihtyvyys ovat ajan funktioita, ja edelleen kiihtyvyys on nopeuden toinen derivaatta. Saamme siis

$$-kx(t) = ma(t) = mx''(t), \quad (96)$$

joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$x''(t) = -\frac{k}{m}x(t). \quad (97)$$

Nyt on helppoa todeta sijoittamalla (tämä yhtälöhän ei nyt ole separoituva, joten edellisen luvun ratkaisutapa ei toimi tässä), että yhtälön ratkaisee funktio

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad (98)$$

missä $\omega = \sqrt{k/m}$ ja A ja B ovat vakioita jotka kiinnittyvät alkuehdosta. Huomaa, että toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisussa on kaksi mielivaltaista vakiota, jotka kiinnittyvät alkuehdosta. Jos esimerkiksi massakappale on alussa origossa ja sen alkunopeus on 1, saamme $x(0) = 0$ ja $x'(0) = 1$, joista saadaan ratkaistua $A = 0$ ja $B = \omega^{-1}$.

Harmoninen oskillaattori esiintyy monin paikoin fysiikassa. Esimerkiksi heiluria voidaan (pienillä heilahduskulmilla) kuvata harmonisena oskillaattorina. Yleisemmin, tarkastellaan potentiaalia $U(x)$ jossa hiukkanen (atomi, elektroni, planeetta, massapiste, Higgsin kenttä hiukkasfysiikassa...) liikkuu. Luonto ”pyrkii” yleisesti energiaminimiin, joten monesti riittää tarkastella kappaleen liikettä potentiaalin minimin ympäristössä. Jos piste x_0 on potentiaalin minimi, on tällöin $U'(x) = 0$. Siis potentiaalifunktion U Taylorin polynomi pisteen x_0 ympäristössä on vakio + $\frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2$, mikä on harmonisen oskillaattorin potentiaali¹⁴.

Miksi harmoninen oskillaattori sitten on niin tärkeä

3.3 Tehtäviä

Tehtävä 14. Ratkaise differentiaaliyhtälö

- (a) $y'(x) = x^2y^2(x)$ alkuehdolla $y(1) = 1$.
- (b) $y'(x) = y(x)$
- (c) $y'(x) = y(x) + x^2y^2(x)$ alkuehdolla $y(1) = 1$.

Tehtävä 15. Käy läpi ilmanvastusesimerkin (esimerkki 11) ratkaisu. Täydennä erityisesti välivaiheet jotka vaaditaan, jotta yhtälöstä (93) päästään yhtälöön (94).

Tehtävä 16. Näytä, että harmonisen oskillaattorin differentiaaliyhtälön (97) ratkaisee myös funktio $A \cos(\omega t + \phi)$ missä A ja ϕ ovat vakioita. Jos kompleksiluvut ovat tuttuja, huomaa, että ratkaisuksi käy myös funktio $Ae^{i\omega t} + B \cos(i\omega t)$. Totea, että nämä kaikki ovat itse asiassa sama funktio.

14. Muista, että voima saadaan potentiaalin gradienttina: $\vec{F} = -\nabla \vec{U}$, tai yksiulotteisessa tapauksessa $F = -U'(x)$

4 Matriisit ja lineaarialgebra

Tässä luvussa tutustumme matriiseihin ja lineaarikuvauksiin, joihin törmäämme esimerkiksi suhteellisuusteorian yhteydessä.

4.1 Matriisien peruslaskutoimitukset

Matriisi on periaatteessa vain taulukko, jonka alkiot ovat lukuja (yleensä reaali- tai kompleksilukuja, rajoitumme tässä vain reaalsiin matriiseihin). Matriisi A , jossa on m riviä ja n saraketta merkitään

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (99)$$

Alkiota, joka on rivillä i ja sarakkeessa j merkitään tässä siis symbolilla a_{ij} . Vektoria voidaan pitää matriisina, jossa on vain yksi sarake, esimerkiksi paikkavektori $r = (r_x, r_y, r_z)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$r = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}. \quad (100)$$

Matriisien välille määritellään kaikki peruslaskutoimitukset. Ensinnäkin luvulla kertoaminen on helppoa, λA saadaan kertomalla jokaista A :n alkiota luvulla λ :

Esimerkki 12.

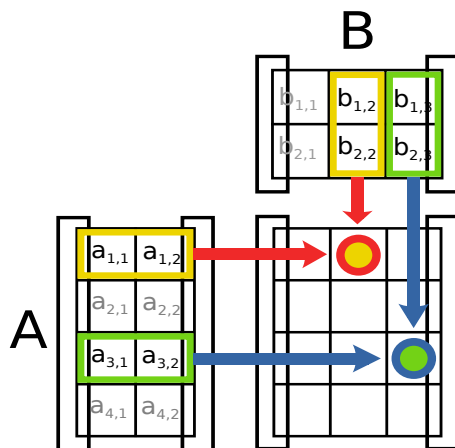
$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 8 & 2 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix} \quad (101)$$

Kahden matriisin summa saadaan laskemalla matriisien alkiot alkioittain yhteen seuraavan esimerkin mukaisesti (huomaa että matriisien pitää olla samankokoiset):

Esimerkki 13.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 3+0 & 1+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 8 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad (102)$$

Kahden matriisin tulo on hieman monimutkaisempi. Ensinnäkin matriisien ei tarvitse olla samankokoiset, vaan $m \times n$ -matriisi (m riviä, n saraketta) kertaa $m' \times n'$ -matriisi on määritelty, kunhan $n = m'$. Tulos on $n \times n'$ -matriisi.



Kuva 9. Kahden erikokoisen matriisin A ja B tulo.

Olkoot A ja B matriiseja. Tulomatriisin AB alkio riville i sarakkeeseen j saadaan kertomalla matriisin A rivi i matriisin B sarakkeen j kanssa (näissä on siis yhtä monta alkioita) alkioittain, ja laskemalla näiden tulojen summa. Tilannetta havainnollistetaan seuraavassa esimerkissä ja kuvassa 9.

Esimerkki 14. Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \quad (103)$$

Silloin

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw + by & ax + bz \\ cw + dy & cx + dz \end{bmatrix} \quad (104)$$

Jos A ja B ovat neliömatriiseja (yhtä monta riviä ja saraketta), voidaan laskea sekä tulo AB että tulo BA . Mutta kuten harjoitustehtävässä 17 todetaan, yleensä $AB \neq BA$!

Huomaa, että esimerkiksi 2×2 -matriisilla voidaan kertoa kaksikomponenttista pystyvektoria. Näin laskemme kiertoja seuraavassa luvussa.

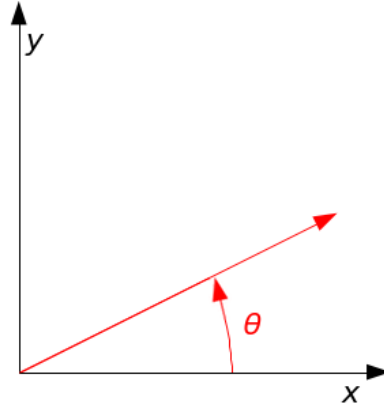
Matriisia, joka kerrottuna matriisilla A antaa *yksikkömatriisin* eli matriisin, jossa lävistäjä- eli diagonaali-alkiot ovat ykköistä ja muut nollaa, sanotaan käänteismatriisiksi ja merkitään A^{-1} .

Esimerkki 15. Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (105)$$

käänteismatriisi on

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (106)$$



Kuva 10. Kierto vastapäivään positiiviseen kiertosuuntaan.

sillä

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (107)$$

Matriisitulo saattaa alkuun vaikuttaa määritelmältään oudolta, se osoittautuu kuitenkin käteväksi työkaluksi nimenomaan tällä tavalla määriteltynä.

4.2 Kierrot tasossa

Yksi esimerkkisovellus matriisitulolle on kiertojen laskeminen tasossa. Tarkastellaan, miten piste (x, y) (tai origosta tähän pisteeseen piirretty paikkavektori) kiertyy, kun kierrämme sitä vastapäivään kulman θ verran.

Kun vektoria kierretään vastapäivään kulman θ verran, saadaan uudeksi paikka-vektoriksi (x', y') vektori

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (108)$$

Tällöin siis $x' = x \cos \theta - y \sin \theta$ ja $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$. Matriisia

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (109)$$

sanotaan kiertomatriisiksi. Ensinnäkin koska kierto vastakkaiseen suuntaan saman verran palauttaa vektorin alkuperäiseen pisteeseen, näemme, että käänteismatriisille pätee $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$. Lisäksi kaksi peräkkäistä rotaatiota ensin kulman α ja sitten kulman β verran on edelleen rotaatio, joten selvästi

$R(\beta)R(\alpha) = R(\alpha + \beta)$ (huomaa, että oikeanpuoleisin matriisi kertoo ensimmäisenä vektoria, joten se kierto tehdään ensin; tässä tapauksessa sillä ei ole väliä sillä selvästi $R(\alpha)R(\beta) = R(\beta)R(\alpha)$, mutta esimerkiksi kolmiulotteisen avaruuden rotaatioiden kanssa näin ei välttämättä ole).

4.3 Sovellus suhteellisuusteoriaan

IPhO-kilpailija saattaa törmätä matriiseihin tutustuessaan erityiseen suhteellisuusteoriaan, joka on kätevinä formuloida käyttäen matriiseja ja vektoreita. Suhteellisuusteoriaa käsitellään valmennuksessa omana kokonaisuutenaan, tässä yhteydessä mainitsemme lähinnä motivointisyyistä muutaman tilanteen, joissa matriisit ja vektorit esiintyvät suhteellisuusteoriassa.

Suhteellisuusteoriassa aika ja avaruus eivät ole erillisiä, vaan niitä on käsiteltävä yhdessä. Yksi aika ja kolme paikkaulottuvuutta muodostavat neliulotteisen aika-avaruuden, jossa esimerkiksi paikkavektori on nelikomponenttinen vektori

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (110)$$

missä siis ”nollas” komponentti on aika (jota on skaalattava valon nopeudella c jotta kaikkien komponenttien dimensio olisi sama¹⁵). Vastaavasti liikemäärän nelivektori on

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} -E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}, \quad (111)$$

missä nollas komponentti on oleellisesti hiukkasen energia¹⁶.

Nyt voimme siirtyä koordinaatistoon, joka liikkuu alkuperäisen koordinaatistomme suhteen nopeudella v positiivisen z -akselin suuntaan, kertomalla nelivektoreita ”kiertomatriisilla” (Lorentz-muunnoksella)

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad (112)$$

15. Joskus suhteellisuusteoriaa tehtäessä käytetään yksikköjärjestelmää, jossa $c = 1$.

16. Miinusmerkki energian edessä on konventio, etenkin hiukkasfysiikassa käytetään myös konventiota, jossa energian etumerkki on plus ja muiden komponenttien etumerkki miinus.

missä

$$\beta = \frac{v}{c}, \text{ ja } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (113)$$

Nelivektorin pituudeksi määritellään $\bar{p}^2 = -(\bar{p}^0)^2 + (\bar{p}^1)^2 + (\bar{p}^2)^2 + (\bar{p}^3)^2$. Tämä on vakio kaikissa koordinaatistoissa. Se, että kirjoitamme vektorin komponentteihin liittyvät indeksit ylös liittyy ns. kovariantteihin ja kontravariantteihin vektoreihin ja selviää suhteellisuusteoriata käsiteltäessä. Esimerkiksi $\bar{p}^2 = -(mc)^2$, joka on hiukkasen massa (koska $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$) ja siis sama kaikissa koordinaatistoissa. Yleisemmin nelivektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ pistetulo $\bar{a} \cdot \bar{b} = -\bar{a}^0\bar{b}^0 + \bar{a}^1\bar{b}^1 + \bar{a}^2\bar{b}^2 + \bar{a}^3\bar{b}^3$ on sama kaikissa koordinaatistoissa joiden välillä voidaan siirtyä Lorentz-puskulla (eli koordinaatistoissa, jotka liikkuvat vakionopeudella toisiinsa nähden).

Suhteellisuusteoriassa käytetään yleensä notaatiota x^μ , missä μ viittaa indekseihin 0,1,2 ja 3.

4.4 Tehtäviä

Tehtävä 17. Totea, että matriisitulo ei yleensä *kommutoi*, eli määritellään

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (114)$$

ja

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}. \quad (115)$$

Näytä, että $AB \neq BA$.

Tehtävä 18. Totea matriisitulo laskemalla, että $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$ (tarvitset trigonometrisia summakaavoja).

Tehtävä 19. Perustele geometrisesti, miksi tason kierroille pätee yhtälö (108) (tarkastele pisteen (x,y) paikkavektoria ja laske geometriasta paikkavektori (x',y') ja totea, että tulos on sama kuin yhtälön (108) antama).

5 Lopuksi

Tässä läpikäyty materiaali on sellaista, mihin törmätään yliopiston ensimmäisen vuoden ”fysiikan matemaattiset menetelmät” -kursseilla. Kaikki tässä läpikäyty asia ei ole sellaista, joka on syytä muistaa ulkoa fysiikkaolympialaisissa. Keskitimme pääasiassa differentiaali- ja integraalilaskentaan, joita ei edes juuri vaadita olympialaisissa.

Kuitenkin kuten muussa valmennusmateriaalissa huomataan, auttaa fysiikan lakien taustalla olevien matemaattisten menetelmien ymmärtäminen myös itse luonnonlakien ymmärtämistä ja käsittelyä. Lisäksi näitä nyt on vaan kiva tietää :)

Menestystä fysiikkakilpailuihin!

Kuvalähteet:

- Kuva 3: Wikipedia, lisenssi: GFDL/CC by-sa.
- Kuva 4: Wikipedia, lisenssi: GFDL/CC-by-sa. Kuvaa on muokattu.
- Kuva 6: Wikipedia, lisenssi GFDL/CC by-sa.
- Kuva 9: Wikipedia, lisenssi: GFDL/CC by-sa.
- Kuva 8: Wikipedia, lisenssi: PD.

Tätä monistetta saa kopioida ja levittää vapaasti. Tarkempi lisenssi: Creative Commons nimi mainittava (<http://creativecommons.org/licenses/by/1.0/fi/>). L^AT_EX-muotoinen lähdekoodi on saatavissa kirjoittajalta.

Liitteet

A Matemaattisia perusteita

Tässä liitteessä käsitellään asioita, jotka oletetaan tunnetuksi tässä monisteessa.

A.1 Raja-arvo

Raja-arvo (*limes*) kuvaa funktion käyttäytymistä, kun sen argumentti (muuttuja) lähestyy rajatta tiettyä pistettä joka voi olla myös $+\infty$ (positiivinen äärettömyys) tai $-\infty$ (negatiivinen äärettömyys).

Raja-arvomerkinä

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad (116)$$

tarkoittaa, että kun x viedään aina vain lähemmäs lukua c , lähestyttävät funktion $f(x)$ arvot lukua L . Huomaa, että $f(c)$ ei välttämättä ole edes määritelty, ja lisäksi voi olla, että $f(c) \neq L$.

Esimerkki 16. Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}. \quad (117)$$

Nyt selvästi $f(1)$ ei ole määritelty, koska se johtaisi jakamiseen nollalla (itse asiassa tapaukseen $0/0$, joka ei ole määritelty). Kuitenkin kun x viedään riittävän lähelle lukua 1, lähestyvät funktion arvot lukua 2 (kokeile laskimella). Merkitsemme siis

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2. \quad (118)$$

Esimerkki 17. Vastaavasti laskemme raja-arvot äärettömyyksissä, esimerkiksi funktiolle

$$f(x) = e^{-x} + \frac{x+1}{x} \quad (119)$$

saamme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 0 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+1/x}{1} = 1, \quad (120)$$

missä supistimme jälkimmäisen murtolausekkeen x :llä ja huomasimme, että termit jotka ovat muotoa $1/x$ menevät nollaksi, kun $x \rightarrow \infty$.

Tarkemmista matemaattisista määritelmistä kiinnostuneille:

Matemaattisesti raja-arvo määritellään seuraavaksi: funktiolla $f(x)$ on raja-arvo L kun $x \rightarrow c$, jos jokaisella $\epsilon > 0$ voidaan valita tästä epsilonista riippuva $\delta > 0$ siten, että kun $|x - c| < \delta$, on aina $|f(x) - L| < \epsilon$.

Vastaavasti raja-arvo äärettömyydessä määritellään luvuski L , jos jokaiselle $\epsilon > 0$ voidaan valita (taaskin ϵ :ista riippuva) $M > 0$ siten, että $|f(x) - L| < \epsilon$ aina kun $x > M$.