

Vaihtovirtapiirit

Lasse Manninen

26. elokuuta 2021

Tästä materiaalista

Tämä materiaali on lisämateriaalia lukion sähkömagnetismin kurssille. Materiaalissa opitaan perusteet vaihtovirtapiireistä opetusvideoiden ja tehtävien avulla. Luvussa 1 käsitellään kelan ja kondensaattorin toimintaa tasavirtapiiriissä. Luvussa 2 tutustutaan vaihevektoreihin ja eri komponenttien ominaisuuksiin vaihtovirtapiirissä. Luvussa 3 opitaan LRC-vaihtovirtapiireistä, RC-suodattimista, piirin impedanssista ja resonanssista.

Jokaiseen lukuun kuuluu opetusvideo ja tehtäviä. Luku 1 voi olla lyhyempi kuin muut, jos tasavirtapiirit ovat hyvin hallussa. Lukuun 2 liittyy paljon asiaa. Tehtävät ovat perustehtäviä ja tämän luvun opiskeluun kuluu n. 30-45 minuuttia. Lukuun 3 on hyvä varata vielä enemmän aikaa, noin 45-60 minuuttia.

Motivointia

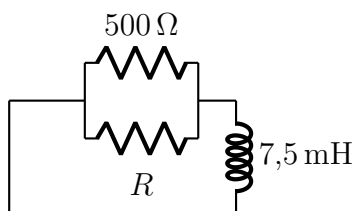
Moderni teknologinen yhteiskunta tarvitsee vaihtovirtaa. Generaattorit, joilla sähkö tuotetaan, tuottavat vaihtovirtaa, koska sitä on helpompi siirtää sähköverkossa kuin tasavirtaa. Radion, television ja matkapuhelimien virtapiireissä tarvitaan myös vaihtovirtapiirejä, joiden taajuudet vaihtelevat käyttökohteesta riippuen.

Tämä materiaali on lisensoitu Nimeä-JaaSamoin 4.0 Kansainvälinen (CC BY-SA 4.0) -lisenssillä. lasse.m.manninen@gmail.com

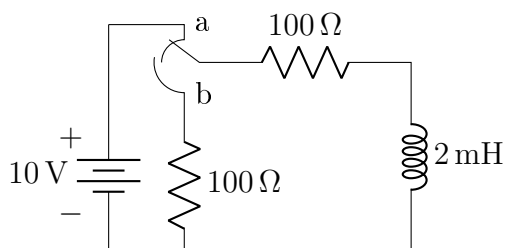
1 RLC-piiri, tasavirta

Katso aluksi video RLC piiri¹.

1. Radioasema lähettää ohjelmaa taajuudella 100 MHz. Mikä tulee olla kelan induktanssi LC-piirissä, jossa kondensaattorin kapasitanssi on 10 pF, jotta ohjelman vastaanottaminen onnistuu?
2. Mikä resistanssin R arvo alla olevassa virtapiirissä tuottaa piirille aikavakion $25 \mu\text{s}$?



3. Alla olevan kuvan kytkin on ollut asennossa a kauan. Kytkimen asento vaihdetaan b:hen ajanhetkellä $t = 0 \text{ s}$.
 - a) Mikä on piirissä kulkeva virta ajanhetkellä $t = 5,0 \mu\text{s}$?
 - b) Millä ajanhetkellä piirissä kulkeva virta on vähentynyt 1%:iin alkuperäisestä arvosta?



4. $1,0 \text{ A}$:n virta kulkee kelan läpi. Kelan induktanssi on 10 mH . Mikä jännite kelan yli muodostuu, kun virta vähenee nolnaan $5,0 \mu\text{s}$:ssa? Voit olettaa, että kela on ideaalinen ($R = 0 \Omega$) ja että virran muutos on lineaarinen ($dI/dt \approx \Delta I/\Delta t$).

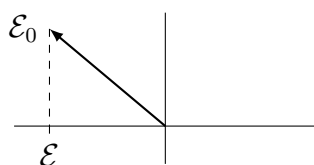
¹<https://www.youtube.com/watch?v=nAGJgHm796I>

2 AC-piirien perusteita

Katso video AC-piirien perusteita².

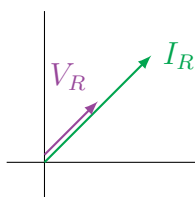
1. Allaolevan kuvan kuvaaman jännitteen hetkellinen suuruus

- a) kasvaa b) vähenee c) on vakio
d) arvoa ei voi tietää tietämättä t :tä.



2. Vastuksen, jonka jännitettä ja virtaa kuvaavat vaihevektorit on esitetty alla olevassa kuvassa, resistanssi on

- a) $> 1 \Omega$ b) $< 1 \Omega$ c) resistanssista ei voi sanoa mitään.



3. 200Ω vastus on kytketty vaihtojännitelähteeseen, jonka $\mathcal{E}_0 = 10 \text{ V}$. Mikä on vastuksen läpi kulkeva huippuvirta, kun jännitelähteen taajuus on
- a) 100 Hz ? b) 100 kHz ?
4. Mikä on $0,10 \mu\text{F}$ kondensaattorin kapasitiivinen reaktanssi 100 Hz ja 100 MHz taajuuksilla?
5. Kela on kytketty 15 kHz jännitelähteeseen. Huippuvirta on 65 mA , kun tehollinen (rms) jännite on $6,0 \text{ V}$. Mikä on kelan induktanssi L ?

²<https://www.youtube.com/watch?v=iSJQ92BcYc4>

3 LRC-vaihtovirtapiirit

Katso video LRC-vaihtovirtapiirit³.

1. Mitä ylipäästö- ja alipäästösuodattimet tekevät? Missä suodattimia voi käyttää?
2. Ylipäästösuodatin on kytketty jännitelähteeseen, jonka huippujännite on 10,0 V. Kondensaattorin huippujännite on 6,0 V. Mikä on jännite vastuksen yli?
3. Radioantenni vastaanottaa 1000 kHz signaalia 5,0 mV huippujännitteellä. Säädetty virtapiiri koostuu 60 μH kelasta kytkettynä sarjaan säädettyä kondensaattorin kanssa. Kelan vastus on 0,25 Ω . Muun virtapiirin vastuksen voi jättää huomiotta.
 - a) Mihin arvoon kondensaattori pitää säätää, jotta tätä signaalia voi kuunnella?
 - b) Mikä on virtapiirin huippuvirta, kun piiri on resonanssissa?
 - c) Toinen radioasema 1050 kHz taajuudella muodostaa antenniin 10 mV jännitteen. Mikä on virta tällä taajuudella, kun radio on viritetty 1000 kHz taajuudelle?
4. Sarjaan kytketyn RLC-piirin resonanssitaajuus on 200 kHz. Mikä on piirin resonanssitaajuus, jos kondensaattorin kapasitanssi kaksinkertaistuu ja samalla kelan induktanssi puolittuu?
5. Hiustenkuivaajan lämmityselementin teho on 1500 W, kun se on kytketty 230 V/50 Hz verkkovirtaan. Mikä on lämmittimen resistanssi?
6. Sarjaan kytketty RLC-piiri koostuu 50 Ω vastuksesta, 3,3 mH kelasta ja 480 nF kondensaattorista. Piiri on kytketty jaksolliseen jännitelähteeseen, jonka huippujännite on 5,0 V. Määritä impedanssi, huippuvirta ja vaihekulma taajuuksilla
 - a) 3000 Hz
 - b) 4000 Hz
 - c) 5000 Hz

³<https://www.youtube.com/watch?v=s0ARy18HDUI>

Tehtävien vastaukset

Luku 1

- 1.1 Sarjaan kytkettyjen kelan ja kondensaattorin resonanssitaajuuden määrää kelan induktanssi ja kondensaattorin kapasitanssi. Tiedämme taajuuden ja kapasitanssin, joten induktanssin voi ratkaista yhtälöstä

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \implies L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{2\pi(100 \times 10^6 \text{ Hz})^2(10 \times 10^{-12} \text{ F})} = 0,25 \mu\text{H}$$

- 1.2 Selvitetään rinnan kytkettyjen vastusten ekvivalenttiresistanssi aikavakion ja induktanssin avulla. Saamme ekvivalenttiresistanssiksi

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{eq}}} \implies R_{\text{eq}} = \frac{L}{\tau} = \frac{7,5 \times 10^{-3} \text{ H}}{25 \times 10^{-6} \text{ s}} = 300 \Omega$$

Rinnan kytkettyjen vastusten resistanssien summasta saamme tuntemattoman vastuksen resistanssin

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{500 \Omega} + \frac{1}{R} \implies R = \frac{(500 \Omega)(300 \Omega)}{500 \Omega - 300 \Omega} = 750 \Omega$$

- 1.3 Ennen kuin kytkimen asento vaihtuu, jännite kelan yli on $\Delta V_L = 0$ ja virta on $I_0 = 10 \text{ V}/100 \Omega = 0,10 \text{ A} = 100 \text{ mA}$. Tämä on virta sillä hetkellä, kun kytkimen asento muuttuu, koska kela vastustaa virran muutosta ja virta ei voi muuttua kelassa välittömästi. Kun kytkin on asennossa b, piirin resistanssi on $R = 200 \Omega$, joten piirin aikavakio on

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{2,0 \times 10^{-3} \text{ H}}{200 \Omega} = 1,0 \times 10^{-5} \text{ s} = 10 \mu\text{s}.$$

- a) Virta ajanhetkellä $t = 5,0 \mu\text{s}$ on

$$I = I_0 e^{-t/\tau} = (100 \text{ mA})e^{-(5,0 \mu\text{s})/(10 \mu\text{s})} = 61 \text{ mA}.$$

- b) Selvittääksemme ajan, jossa saavutetaan jokin tietty virta, ratkaistaan t yhtälöstä

$$I = I_0 e^{-t/\tau} \iff e^{-t/\tau} = \frac{I}{I_0} \iff -\frac{t}{\tau} = \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) \iff t = -\tau \ln\left(\frac{I}{I_0}\right).$$

Yksi prosentti alkuperäisestä virrasta on 1 mA, jolloin ajaksi saadaan

$$t = -(10 \mu\text{s}) \ln\left(\frac{1 \text{ mA}}{100 \text{ mA}}\right) = 46 \mu\text{s}.$$

- 1.4 Kun oletetaan, että virran muutos on lineaarinen, saadaan virran muutokseksi

$$\frac{dI}{dt} \approx \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{-1,0 \text{ A}}{5,0 \times 10^{-6} \text{ s}} = -2,0 \times 10^5 \text{ A/s}$$

Indusoitu jännite on siten

$$\Delta V_L = -L \frac{dI}{dt} \approx -(0,010 \text{ H})(-2,0 \times 10^5 \text{ A/s}) = 2000 \text{ V}$$

Luku 2

- 2.1 a) Jännitteen hetkellinen arvo on vaihevektorin projektio vaaka-akselille. Jännite on negatiivinen ja muuttuu negatiivisemmaksi, kun vaihevektori kiertää vastapäivään. Tällöin jännitteen suuruus (jännitteen itseisarvo) kasvaa.
- 2.2 c) Jännitettä ja virtaa mitataan eri asteikoilla ja yksiköillä, joten vaihevektorien näennäistä pituutta ei voi verrata.
- 2.3 a) Piirille, jossa on yksi vastus saadaan laskettua huippuvirta

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} = \frac{10 \text{ V}}{200 \Omega} = 50 \text{ mA}$$

- b) Huippuvirta ei riipu taajuudesta, joten se on sama kuin a-kohdassa.

2.4 Kapasitiivinen reaktanssi saadaan lausekkeesta $X = 1/\omega C$.

$$X(100 \text{ Hz}) = \frac{1}{2\pi(100 \text{ Hz})(1,0 \times 10^{-7} \text{ F})} = 16\,000 \, \Omega$$
$$X(100 \text{ MHz}) = \frac{1}{2\pi(100 \text{ MHz})(1,0 \times 10^{-7} \text{ F})} = 0,016 \, \Omega$$

2.5 Yhden kelan virtapiirille

$$I = \frac{V}{X} = \frac{V}{\omega L} = \frac{V}{2\pi\omega L}$$
$$\Rightarrow L = \frac{V}{2\pi f I} = \frac{\sqrt{2}V_{\text{rms}}}{2\pi f I}$$
$$= \frac{\sqrt{2}(6,0 \text{ V})}{2\pi(15 \times 10^3 \text{ Hz})(65 \times 10^{-3} \text{ A})} = 1,4 \times 10^{-3} \text{ H} = 1,4 \text{ mH}$$

Luku 3

3.1 Suodattimia voi käyttää esimerkiksi äänitaajuuksien suodattamiseen. Ylipäästösuodatinta voi käyttää esimerkiksi matalataajuisen melun poistamiseen puheen ($> 200 \text{ Hz}$) alta. Alipäästösuodatinta taas voi käyttää korkeataajuisen häiriöiden poistamiseen kuten esimerkiksi vinyylilevyjen korkeataajuisen suhinan.

3.2 RC-piirin huippujännitteistä

$$\mathcal{E}_0^2 = V_R^2 + V_C^2 \Rightarrow V_R = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 - V_C^2} = \sqrt{(10,0 \text{ V})^2 - (6,0 \text{ V})^2} = 8,0 \text{ V}$$

3.3 Kelan resistanssin voi ajatella sarjaan kytkettynä vastuksena, joten piiri on RLC-piiri.

a) Kondensaattori pitää säätää siten, että se on kelan kanssa resonanssissa taajuudella $\omega_0 = 2\pi \times 1000 \text{ kHz}$. Siispä kondensaattorin kapasitanssi saadaan

$$C = \frac{1}{L\omega_0^2} = \frac{1}{(60 \times 10^{-6} \text{ Hz})(6,28 \times 10^6 \text{ rad/s})^2} = 4,2 \times 10^{-10} \text{ F} = 420 \text{ pF}.$$

b) Resonanssissa $X_L = X_C$, joten huippuvirta on

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} = \frac{5,0 \times 10^{-3} \text{ V}}{0,25 \Omega} = 0,020 \text{ A} = 20 \text{ mA}$$

c) Nyt signaali ei ole piirin resonanssitaajuus, joten täytyy laskea X_L ja X_C taajuudella $\omega = 2\pi \times 1050 \text{ kHz}$:

$$X_L = \omega L = 396 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 361 \Omega.$$

Tällä taajuudella huippujännite on $\mathcal{E}_0 = 10 \text{ mV}$. Näillä arvoilla huippuvirraksi saadaan

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = 0,28 \text{ mA}.$$

Näistä laskuista voi huomata, että resonanssitaajuudesta eroava signaali on huomattavasti vaimeampi kuin signaali resonanssitaajuudella.

3.4 Resonanssitaajuus (kulmataajuus) on

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

joten taajuus on

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Kun kapasitanssi kaksinkertaistuu ja induktanssi puolittuu, niin taajuus on

$$f'_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\frac{L}{2} 2C}} = f_0 = 200 \text{ kHz}$$

3.5 Sähkölaite, jonka merkitty teho on 1500 W , on suunniteltu toimivan tällä teholla,

kun rms-jännite on $V_{\text{rms}} = 230 \text{ V}$. Resistanssi saadaan siis lausekkeella

$$R = \frac{V_{\text{rms}}^2}{P_{\text{avg}}} = \frac{(230 \text{ V})^2}{1500 \text{ W}} \approx 35,3 \Omega$$

3.6 Piirin impedanssi on

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Huippuvirran saa impedanssin avulla

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}.$$

Vaihekulman saa resistanssin, reaktanssin ja induktanssin avulla

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{X_L - X_C}{R} \right]$$

Kulmataajuuden tilalle sijoitetaan $\omega = 2\pi f$.

- a) $f = 3000 \text{ Hz}$, $Z \approx 70 \Omega$, $I = 72 \text{ mA}$, $\phi = -44^\circ$.
- b) $f = 4000 \text{ Hz}$, $Z \approx 50 \Omega$, $I = 0,10 \text{ A}$, $\phi = 0^\circ$.
- c) $f = 5000 \text{ Hz}$, $Z \approx 62 \Omega$, $I = 80 \text{ mA}$, $\phi = 37^\circ$.