

Termodynamiikkaa

Lasse Manninen

26. elokuuta 2021

Tästä materiaalista

Tämä materiaali laajentaa ja syventää kurssin/moduulin energia ja lämpö sisältöjä. Eri-tyisesti opitaan termodynamiikan toinen pääsääntö ja termodynaamisista kiertoprosesseista. Nämä ovat sisältöjä, joita saatetaan tarvita kansainvälisissä fysiikkaolympialaisissa. Pääpaino on Carnot'n kierrossa.

Osat koostuvat 1-2 opetusvideosta ja tehtävistä. Ensimmäinen osa käsittelee termodynamiikan II pääsääntöä. Tämän aiheen opetusvideo kestää 17 minuuttia, mutta tästä aiheesta on vain 2 tehtävää, joten osan käsittelyyn voi varata noin 30 minuuttia.

Toisessa osassa on kaksi videota, joissa tutustutaan lämpövoimakoneisiin ja ideaalikaasuprosesseihin. Lämpövoimakoneista opitaan hyötysuhteet ja hyvyysluvut. Lisäksi opitaan kiertoprosesseissa tehdyn työn määrittäminen ja mono- ja diatomisten kaasujen kaasulakien erot. Tämän osan käsittelyyn menee noin 45 minuuttia.

Kolmannessa osassa keskitytään Carnot'n kiertoprosessiin. Videolla aiheeseen tutustutaan perustelemalla ensin, miksi tehokkaimman lämpövoimakoneen on oltava reversiibeli. Lopulta johdetaan Carnot'n koneen hyötysuhde ja hyvyysluku. Tämän osan käsittelyyn menee noin 45 minuuttia riippuen siitä, millaiset yhtälönratkaisutaidot opiskelijalla on.

Neljännessä osassa opetellaan laskemaan entropian muutos erilaisissa prosesseissa. Tätä

Tämä materiaali on lisensoitu Nimeä-JaaSamoin 4.0 Kansainvälinen (CC BY-SA 4.0) -lisenssillä. lasse.m.manninen@gmail.com

osiota varten esitietona on perusasiat integroinnista. Tässä osassa ei ole opetusvideoita. Tämän osan opiskeluun kannattaa varata noin 45 minuuttia

1 Termodynamiikan II pääsääntö

Katso aluksi video Irreversiibelit prosessit ja termodynamiikan toinen pääsääntö ¹. Tee muistiinpanot, joista voit kerrata mitä tarkoittaa reversiibeli ja irreversiibeli prosessi, sekä sen mitä termodynamiikan toinen pääsääntö kertoo. Tee sitten seuraavat tehtävät.

1. Miksi valtamerilaivat eivät käytä meren lämmöstä saatavaa energiaa etenemiseen? Tai miksi lentokoneet eivät käytä ilmasta saatavaa lämpöä?
2. Kymmenen grammaa jäätä, jonka lämpötila on $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, absorboi ilmasta lämpöä kunnes jää on sulanut. Onko prosessi reversiibeli, kun
 - a) ympäristön lämpötila on juuri ja juuri nollan yläpuolella?
 - b) ympäristön lämpötila on $20\text{ }^{\circ}\text{C}$?

2 Lämpövoimakoneet

Katso aluksi videot Lämpövoimakoneet ja jäähdyttimet ² ja Ideaalikaasulämpövoimakoneet ³. Tee muistiinpanot, joista voit kerrata ideaalikaasuprosessien kaasulait, työt, lämmöt ja termisen energian muutokset. Tee sitten seuraavat tehtävät.

1. Mitä tapahtuu huoneen lämpötilalle, kun jääkaapin ovi jätetään auki?
2. Lämpövoimakone toimii siten, että se ottaa 5000 J lämpöä kuumasta lämpökylvystä ja 3000 J lämpöä poistuu kylmään lämpökylpyyn.
 - a) Kuinka paljon työtä kone tuottaa?
 - b) Mikä on koneen hyötysuhde?
3. Työnäsi on suunnitella jäähdytyskone, joka tekee 300 J työtä per sykli ja ottaa pakastimesta 2100 J lämpöä pitääkseen pakastimen lämpötilan $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$. Mikä on suu-

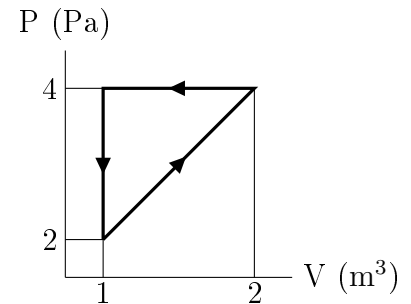
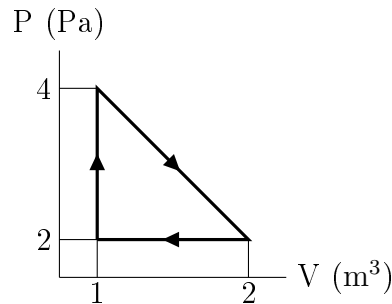
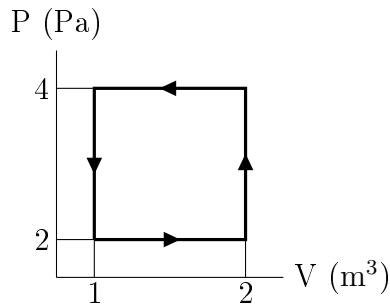
¹<https://www.youtube.com/watch?v=wuraCruUuiw>

²https://www.youtube.com/watch?v=wCFU_VfvCVU

³<https://www.youtube.com/watch?v=Ozr28Lmhm6Q>

rin huoneen ilman lämpötila, jossa kone voi toimia? Onko tämä realistinen rajoite koneelle?

4. Alla olevat PV-diagrammit kuvaavat termodynaamisia prosesseja. Laske kokonais-työ jokaisessa prosessissa.



5. Lämpövoimakoneen hyötysuhde on 0,40. Jos kone tekee työtä 200 J per sykli, kuinka paljon lämpöä kone absorboi ja luovuttaa?

3 Carnot'n kiertoprosessi

Katso video Carnot'n kiertoprosessi⁴. Kirjoita muistiinpanoihisi ainakin Carnot'n koneen hyötysuhde ja jäähdyttimenä käytettävän Carnot'n koneen hyvyysluku. Tee seuraavat tehtävät.

1. Piirrä Carnot'n sykli tilavuus-lämpötila-koordinaatistossa (V,T).
2. Parantaaksesi Carnot'n koneen tehokkuutta, tuleeko kuumen lämpöosan lämpötilaa nostaa vai laskea? Entä kylmän?
3. Carnot'n konetta käytetään lämpövaraston lämpötilan mittaamiseen. Koneen toinen lämpökylpy koostuu vedestä veden kolmoispisteessä.
 - a) Jos 400 J lämpöä per sykli poistetaan lämpövarastosta ja 200 J lämpöä siirtyy kolmoispisteessä olevaan veteen, mikä on lämpövaraston lämpötila?
 - b) Jos 400 J lämpöä per sykli poistetaan kolmoispisteessä olevaan veteen ja 200 J lämpöä siirtyy lämpövarastoon, mikä on lämpövaraston lämpötila?

⁴<https://www.youtube.com/watch?v=jfZY9QsK3Fc>

4. Carnot'n kone toimii 600 K ja 300 K lämpökylpyjen välillä. Jos kone absorboi 100 J lämpöä per sykli, kuinka paljon työtä kone tuottaa?
5. Lämpövoimakone toimii 20 °C ja 200 °C lämpökylpyjen välillä ja ottaa 1000 J lämpöä kuumasta kylvystä per sykli.
 - a) Mikä on suurin mahdollinen määrä työtä, jonka kone voi tehdä per sykli?
 - b) Tälle työn määrälle, kuinka paljon lämpöä kone ottaa kylmästä lämpökylvystä per sykli?

4 Entropia

Tässä luvussa tutustutaan lyhyesti entropian muutoksiin termodynaamisissa prosesseissa. Tämä osio on osittain käännetty avoimesta oppikirjasta University Physics Volume 2 (Samuel J. Ling, Jeff Sanny, William Moebs), joka on saatavilla osoitteesta <https://openstax.org/details/books/university-physics-volume-2>.

Termodynamiikan toinen pääsääntö voidaan esittää entropian muutoksen avulla. Reversiibelin vakio­lämpötilassa tapahtuvan prosessin entropian muutos on

$$\Delta S = \frac{Q}{T},$$

jossa Q on systeemin ja ympäristön välillä siirtynyt lämpö, kun systeemin lämpötila on vakio T .

Muissa prosesseissa entropian muutoksen selvittämiseksi muokataan yhtälöä $\Delta S = Q/T$. Tarkastellaan prosessia, jossa systeemin tila muuttuu tilasta A tilaan B hyvin pienissä askelissa. Näiden lopputilojen lämpötilat ovat T_A ja T_B . Jokaisessa prosessin askeleessa systeemin lämpö muuttuu ΔQ_i :n verran reversiibelisti lämpötilassa T_i . Jokaisen askeleen entropian muutos on siten $\Delta S_i = \Delta Q_i/T_i$. Entropian kokonaismuutos prosessissa on siten

$$\Delta S = \sum_i \Delta S_i = \sum_i \frac{\Delta Q_i}{T_i}.$$

Kun nyt otetaan raja-arvo $\Delta Q_i \rightarrow 0$, askelten lukumäärä lähestyy ääretöntä ja kokonai-

sentropiaksi tulee integraali

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T}.$$

Tämä pätee vain reversiibleissä prosesseissa.

Esimerkki: entropian muutos isobaarisessa prosessissa

Määritetään m massaisen kappaleen entropian muutos vakioaineessa lämpötilasta T_h lämpötilaan T_c , kun kappaleen ominaislämpökapasiteetti on c .

Käytetään siis yhtälöä

$$\Delta S = \int_{T_h}^{T_c} \frac{dQ}{T}.$$

Kappaleen lämpökapasiteetin määritelmästä $\Delta Q = mc\Delta T$, kun muutos on infinitesimaalisen pieni

$$dQ = mc dT.$$

Nyt voimme sijoittaa tämän integraaliin ja laskea

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{T_h}^{T_c} \frac{mc dT}{T} \\ &= mc \left[\ln T \right]_{T_h}^{T_c} \\ &= mc(\ln T_c - \ln T_h) \\ &= mc \ln \frac{T_c}{T_h}. \end{aligned}$$

Nyt jos $T_c < T_h$, niin $\Delta S < 0$, eli kappaleen entropia pienenee, kun sen lämpötila laskee.

Esimerkki: kaasun hidas isoterminen laajeneminen

Määritetään entropian muutos, kun kaasu laajenee isotermisesti tilavuudesta V_1 tilavuuteen V_2 . Kun lämpötila on vakio, niin $\Delta S = Q/T$. Isotermisessä laajenemisessa lämpö on yhtäsuuri kuin työ ja

$$Q = W = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

Ideaalikaasulain $pV = nRT$ avulla

$$Q = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1},$$

jossa integraali lasketaan samoin kuin edellisessä esimerkissä. Nyt entropian muutokseksi saadaan

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = nR \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Tehtäviä

1. Ideaalikaasua, jonka lämpötila on 300 K, puristetaan isotermisesti yhteen viidesosaan sen alkuperäisestä tilavuudesta. Mikä on kaasun entropian muutos per mooli?
2. 200 g vettä, jonka lämpötila on 0 °C tuodaan kontaktiin 80 °C lämpökylvyn kanssa. Kun systeemi saavuttaa termodynaamisen tasapainon, mikä on veden lämpötila? Entä lämpökylvyn? Kuinka paljon lämpöä siirtyy prosessissa? Mikä on veden entropian muutos? Entä lämpökylvyn?
3. Yksi mooli monoatomista ideaalikaasua on suljetussa jäykässä astiassa. Kun kaasuun lisätään reversiibelisti lämpöä, sen lämpötila muuttuu lämpötilasta T_1 lämpötilaan T_2 .
 - a) Kuinka paljon lämpöä lisätään kaasuun?
 - b) Mikä on kaasun entropian muutos?

5 Tehtävien vastaukset

Luku 1

- 1.1 Esimerkiksi laivan tapauksessa laivan runko ja merivesi pyrkivät termodynaamiseen tasapainoon, eli käytännössä laivan runko on samassa lämpötilassa meriveden kanssa. Jotta merestä saataisiin hyödyllistä lämpöä laivaan, laivassa pitäisi olla merivettä kylmempi säiliö, johon meriveden lämpö johtuisi. Tämän säiliön ylläpitämiseksi tarvitaan jälleen energiaa, joten tämä energia voidaan käyttää suoraan moottorin toimintaan.
- 1.2 (a) Prosessi on reversiibeli. Jää ja ympäristö ovat koko prosessin ajan hyvin lähellä termodynaamista tasapainoa. Prosessin suunta muuttuu hyvin pienellä muutoksella ympäristössä.
- (b) Prosessi on irreversiibeli. Jää ja ympäristö ovat kaukana termodynaamisesta tasapainosta. Ympäristön lämpötilaa pitää muuttaa paljon prosessin suunnan kääntämiseksi.

Luku 2

- 2.1 Lämpötila nousee, koska jääkaapin moottori tuottaa enemmän lämpöä kuin mitä se pystyy viilentämään jääkaapin sisustaa.
- 2.2 (a) $W = Q_h - Q_c = 2000 \text{ J}$
- (b) Hyötysuhde on työn suhde otettuun lämpöön: $\eta = W/Q_h = 0,4 = 40\%$
- 2.3 Jäähdyttävän koneen hyvyysluku on $K = Q_c/W$. Optimaalinen jäähdytin on käänteinen Carnot'n kone, jolloin hyvyysluku on myös $K = T_c/(T_h - T_c)$. Yhdistämällä

nämä yhtälöt saadaan

$$\begin{aligned}\frac{Q_c}{W} &= \frac{T_c}{T_h - T_c} \\ \Leftrightarrow (T_h - T_c) \frac{Q_c}{W} &= T_c \\ \Leftrightarrow T_h - T_c &= \frac{T_c W}{Q_c} \\ \Leftrightarrow T_h &= \frac{T_c W}{Q_c} + T_c,\end{aligned}$$

johon sijoittamalla annetut tiedot

$$T_h = \frac{263 \text{ K} \cdot 300 \text{ J}}{2100 \text{ J}} + 263 \text{ K} \approx 300 \text{ K} = 27^\circ \text{C}.$$

Rajoite ei ole mahdoton, jos tietää, että tila jossa konetta käytetään pysyy suhteellisen viileänä.

- 2.4 Kun prosessi kulkee PV-diagrammissa vastapäivään, kokonaistyö on negatiivinen, eli systeemiin tehdään työtä. Syklin kokonaistyö saadaan sen rajaamasta pinta-alasta. Siispä ensimmäisessä prosessissa

$$W = -1 \text{ m}^3 \cdot 2 \text{ Pa} = -2 \text{ J}$$

Toisessa prosessissa

$$W = \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ m}^3 \cdot 2 \text{ Pa} = 1 \text{ J}$$

Kolmannessa prosessissa

$$W = -\frac{1}{2} \cdot 1 \text{ m}^3 \cdot 2 \text{ Pa} = -1 \text{ J}$$

- 2.5 Lämpövoimakoneen hyötysuhteesta saadaan kuinka paljon lämpöä kone vastaanottaa kuumasta lämpökylvystä

$$\eta = \frac{W_{out}}{Q_h} \Leftrightarrow Q_h = \frac{W_{out}}{\eta} \Rightarrow Q_h = \frac{200 \text{ J}}{0,40} = 500 \text{ J}.$$

Hyötysuhteen toisesta muotoilusta saadaan

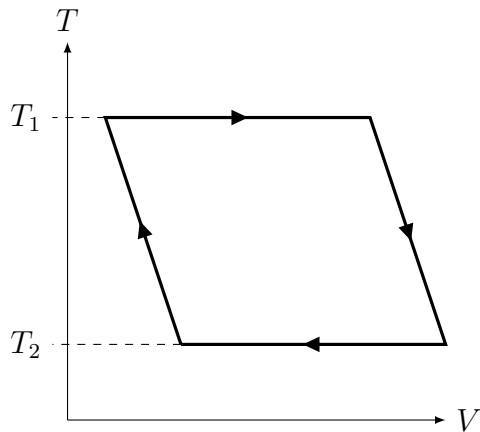
$$\eta = 1 - \frac{Q_c}{Q_h} \iff \frac{Q_c}{Q_h} = 1 - \eta \iff Q_c = Q_h(1 - \eta)$$

joten koneen luovuttama lämpö on

$$Q_c = 500 \text{ J}(1 - 0,4) = 300 \text{ J}.$$

Luku 3

3.1 Tässä koordinaatistossa isotermit ovat vaakasuoria ja adiabaatit ovat suoria isotermien välillä



3.2 Kuuman osan lämpötilaa tulee nostaa ja kylmän laskea mahdollisimman paljon tehokkuuden parantamiseksi.

3.3 (a) Käytetään yhtälöä

$$\frac{T_c}{T_h - T_c} = \frac{Q_c}{Q_h - Q_c}.$$

Nyt lämpövarastosta siirretään lämpöä kolmoisasteessa olevaan veteen, joten läm-

pövarasto on kuuma lämpövarasto. Siispä yllä olevasta yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned}\frac{T_c}{T_h - T_c} &= \frac{Q_c}{Q_h - Q_c} \\ \Leftrightarrow T_h - T_c &= \frac{T_c(Q_h - Q_c)}{Q_c} \\ \Leftrightarrow T_h &= \frac{T_c(Q_h - Q_c)}{Q_c} + T_c \\ \Rightarrow T_h &= \frac{273 \text{ K}(400 \text{ J} - 200 \text{ J})}{200 \text{ J}} + 273 \text{ K} = 546 \text{ K}\end{aligned}$$

(b) Merkitään välivaiheiden selkeyttämiseksi

$$a = \frac{Q_c}{Q_h - Q_c}.$$

Nyt ensimmäisestä yhtälöstä saadaan, kun lämpövarasto on kylmemmässä lämpötilassa

$$\begin{aligned}\frac{T_c}{T_h - T_c} &= a \\ \Leftrightarrow T_c &= a(T_h - T_c) \\ \Leftrightarrow T_c &= aT_h - aT_c \\ \Leftrightarrow T_c + aT_c &= aT_h \\ \Leftrightarrow T_c(1 + a) &= aT_h \\ \Leftrightarrow T_c &= \frac{aT_h}{1 + a} \\ \Rightarrow T_c &= \frac{T_h}{2} = 137 \text{ K},\end{aligned}$$

koska

$$a = \frac{Q_c}{Q_h - Q_c} = \frac{200 \text{ J}}{400 \text{ J} - 200 \text{ J}} = 1.$$

3.4 Carnot'n koneen hyötysuhteesta saadaan

$$\eta = 1 - \frac{T_c}{T_h} = \frac{W_{out}}{Q_h} \Leftrightarrow W_{out} = Q_h \left(1 - \frac{T_c}{T_h}\right).$$

Siispä

$$W_{out} = 100 \text{ J} \left(1 - \frac{300 \text{ K}}{600 \text{ K}} \right) = 50 \text{ J}.$$

3.5 a) Carnot'n kone on tehokkain lämpövoimakone kahden lämpökylvyn välillä. Suurin koneen tuottama työ saadaan siis Carnot'n koneen hyötysuhteesta kuten edellisessä tehtävässä

$$W_{out} = 1000 \text{ J} \left(1 - \frac{293 \text{ K}}{473 \text{ K}} \right) \approx 381 \text{ J}$$

b) Jälleen hyötysuhteesta

$$\eta = \frac{W_{out}}{Q_h} = 1 - \frac{Q_c}{Q_h} \iff Q_c = Q_h \left(1 - \frac{W_{out}}{Q_h} \right)$$

joten

$$Q_c = 1000 \text{ J} \left(1 - \frac{381 \text{ J}}{1000 \text{ J}} \right) \approx 619 \text{ J}$$

Luku 4

4.1 Isotermisessä kaasun tilavuuden muutoksessa

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1} \iff \frac{\Delta S}{n} = R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Nyt $V_2 = 1/5 V_1$, joten

$$\frac{\Delta S}{n} = R \ln \frac{\frac{1}{5} V_1}{V_1} = R \ln \left(\frac{1}{5} \right) \approx 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot (-1,61) \approx -13,38 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}.$$

4.2 Lämpökylpyä käsitellään laajana lämpövarastona, jonka lämpötila pysyy vakiona. Siispä tasapainossa veden ja lämpökylvyn lämpötilat ovat 80°C .

Siirtynyt lämpö saadaan yhtälöstä

$$Q = mc\Delta T \implies Q = 0,2 \text{ kg} \cdot 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 80 \text{ K} = 67\,200 \text{ J}$$

Veden entropian muutos saadaan yhtälöstä

$$\Delta S = mc \ln \frac{T_2}{T_1} \implies \Delta S = 0,2 \text{ kg} \cdot 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot \frac{353 \text{ K}}{273 \text{ K}} \approx 216 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Lämpökylvyn lämpötila pysyy vakiona, joten entropian muutos saadaan siirtyneestä lämmöstä

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \implies \Delta S = \frac{-67\,200 \text{ J}}{353 \text{ K}} \approx -190 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

4.3 a) Isokoorisessa prosessissa lämpö saadaan yhtälöstä

$$Q = nC_V \Delta T \implies Q = n \cdot \frac{3}{2} R \cdot (T_2 - T_1)$$

b) Nyt $dQ = 3/2 nR dT$, joten entropian muutos saadaan integraalista

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{3}{2} nR \frac{dT}{T} = \frac{3}{2} nR (\ln T_2 - \ln T_1) = \frac{3}{2} nR \ln \frac{T_2}{T_1}.$$