

Optiikkaa

Lasse Manninen

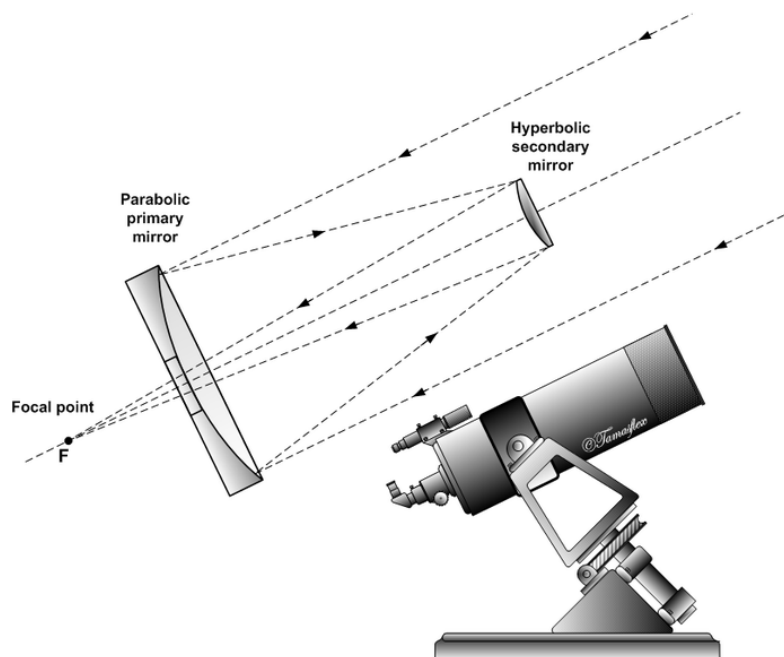
26. elokuuta 2021

Tästä materiaalista

Tämä materiaali liittyy sädeoptiikkaan ja geometriseen optiikkaan. Materiaali sopii hyvin lisämateriaaliksi kurssille 6/moduuliin 7 (sähkömagnetismi). Tässä materiaalissa tutustutaan ohuisiin linssihin, kaareviin peileihin ja optisiin laitteisiin (kaukoputkiin ja mikroskooppeihin). Jokainen tämän materiaalin luku alkaa aiheeseen liittyvällä suomenkielisellä videolla, jonka kesto on noin 10 minuuttia. Videon katsomisen jälkeen aiheesta on muutama tehtävä. Tehtävien vaikeustasot vaihtelevat ja osa tehtävistä on käsitteellisiä ja osa laskutehtäviä. Yhden luvun käsittelyyn voi siis mennä noin puolesta tunnista tuntiin riippuen siitä, miten hyvin optiikka on peruskoulusta muistissa.

Luvussa 1 on lyhyt motivointi optiikan opiskeluun. Luvussa 2 palautetaan mieliin, miten linssit ja peilit muodostavat kuvia. Luvussa 3 tutkitaan, miten ohuiden linssien teoria johdetaan. Luvussa 4 perehdytään suurentaviin optisiin laitteisiin, eli tässä tapauksessa kaukoputkiin ja mikroskooppeihin. Luvussa 4 on mukana myös hieman haastavampi geometrinen tehtävä. Luvussa 5 on syventävää materiaalia. Yksi video kameran toiminnasta, yksi video sateenkaarten syntyisestä ja haastavampia tehtäviä.

Tämä materiaali on lisensoitu Nimeä-JaaSamoin 4.0 Kansainvälinen ([CC BY-SA 4.0](#)) -lisenssillä. lasse.m.manninen@gmail.com



Kuva 1: Lähde: wikipedia, Tamasflex.

1 Yleistä optiikasta

Mitä hyötyä optiikasta on? Voit löytää optiikkaa ympäriltäsi helposti. Älypuhelimesi kamerasta, auton ajovalot, laserosoittimet ja kaupan kassan viivakoodinlukijat ovat esimerkkejä optisista systeemeistä. Keräämämme tieto mikroskooppisesta maailmasta ja avaruudesta tulee optisten laitteiden kautta. Silmä on yksi hienoimpia optisia järjestelmiä, mitä on olemassa. Modernia optiikkaa kutsutaan ftoniikaksi ja se perustuu kaikkiin kolmeen valon malliin, mutta sädeoptiikka on yleensä se perusta, jolla optiset laitteet suunnitellaan.

Alla olevassa kuvassa on esitetty cassegrain-tyyppinen kaukoputki. Tässä kaukoputkessa on paraboloidin muotoinen peili, jolla kerätään valonsäteet. Miksi juuri paraboloidin muotoinen peili on hyvä tähän tarkoitukseen?

Miten kuva muodostuu silmään? Silmässä on linssi, jonka avulla kuva muodostuu verkkokalvolle. Tähän liittyy sekä se, miten linssi taittaa valoa, että se miten valo käyttäytyy optisesti erilaisten aineiden rajapinnoissa.

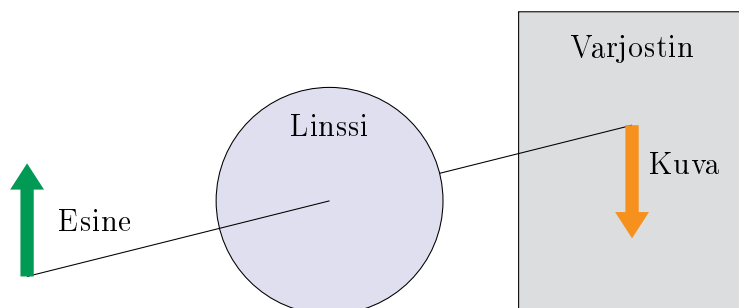
2 Kuvan muodostuminen

Palauta mieleen, mitä muistat linseistä ja kuvien muodostumisesta. Katso sitten Opi fysiikkaa -kanavan video [Linssien ja peilien geometrista optiikkaa](#)¹. Katso myös muistin virkistämiseksi video [Heijastuminen](#)², jossa käsitellään sitä, miten tasopeilit muodostavat kuvan.

Tee muistiinpanot, joissa esität kuinka linssit ja peilit muodostavat kuvia ja mikä on valekuvan ja todellisen kuvan ero.

Vastaa tehtäviin:

1. Linssi tuottaa terävän, ylösalaisin olevan kuvan varjostimelle. Mitä näet varjostimella, kun linssi poistetaan?
 - a) Kuva on ylösalaisin ja epätarkka.
 - b) Kuva on oikeinpäin ja terävä.
 - c) Kuva on oikeinpäin ja epätarkka.
 - d) Kuva on paljon himmeämpi, mutta ei muutu muuten.
 - e) Kuvaa ei muodostu lainkaan.



2. Mitä tapahtuu ylläolevassa tilanteessa kuvalle, kun linssin yläpuoli peitetään?
3. Kappale, jonka korkeus on 2 cm on 40 cm:n etäisyydellä kokoavasta linssistä, jonka polttoväli on 20 cm.

¹<https://www.youtube.com/watch?v=kA3ApQYGTqw>

²<https://www.youtube.com/watch?v=gawPCXrkhK0>

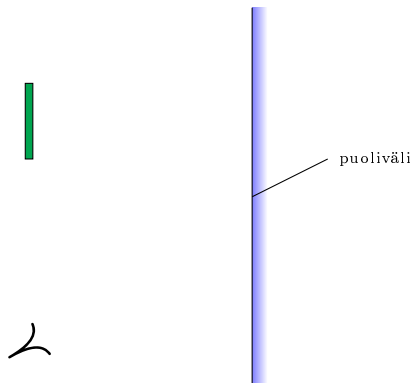
a) Käytä säteiden jäljitystä selvittääksesi kuvan sijainnin ja koon. Yritä tehdä tämä tarkasti käyttämällä viivainta ja mittaamalla kuvastasi etäisyydet. Vihje: Mieti aluksi, millä mittakaavalla piirrät kuvan.

b) Laske muodostuvan kuvan paikka ja koko. Vertaa tulostasi a-kohdassa määrittämääsi.

4. Katsot peilin heijastamaa kuvaa kynästä, kuten alla olevassa kuvassa.

a) Mitä tapahtuu kuvalle, jos peilin yläpuoli peitetään peilin puoliväliin saakka? Perustele.

b) Mitä kuvalle tapahtuu, jos peilin alapuoli peitetään? Perustele.



2.1 Kaarevat peilit

Minkä muotoinen kaarevan peilin tulee olla, jotta säteet oikeasti kulkevat polttopisteen kautta?

1. Kovera peili, jonka polttoväli on f , muodostaa kuvan Kuusta. Mihin kuva muodostuu?

a) Peilin pinnalle

b) Lähelle etäisyyttä f peilin taakse

c) Lähelle etäisyyttä f peilin eteen

d) Peilin taakse yhtä suurelle etäisyydelle kuin mitä Kuu on peilistä

2. Katsot suurentavaan kasvopeiliin ja näet oikeinpäin olevan suurennetun kuvan kasvoistasi. Mihin kuva muodostuu? Onko kuva peilin edessä, peilin pinnalla vai peilin takana? Perustele.
3. Kun katsot kuvaasi lusikan koverasta puolesta, se on ylösalaisin. Miksi?

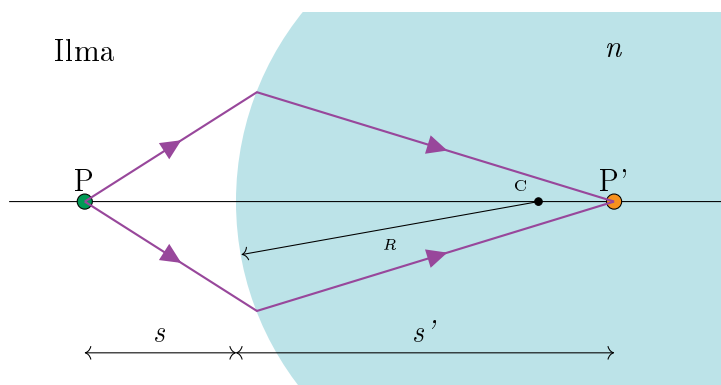
3 Ohuet linssit ja rajapinnat

Palauta mieleesi, mitä tiedät valon taittumisesta. Katso sitten Opi fysiikkaa -kanavan video [Ohuiden linssien teoriaa](#)³. Tee videolta muistiinpanot, joissa esittelet linssien kuvausyhtälön, linssintekijän yhtälön ja merkitset mitä yhtälöissä esiintyvät symbolit tarkoittavat.

Tee seuraavat tehtävät:

1. Mikä tai mitkä seuraavista toimista liikuttaa todellisen kuvan pistettä P' kauemmas reunasta? Useampi vaihtoehto voi olla oikein.
 - a) Kaarevuussäteen R suurentaminen.
 - b) Taitekertoimen n suurentaminen.
 - c) Kappaleen etäisyyden s suurentaminen.
 - d) Kaarevuussäteen R pienentäminen.
 - e) Taitekertoimen n pienentäminen.
 - f) Kappaleen etäisyyden s pienentäminen.

³<https://www.youtube.com/watch?v=Xo8bohzWjzU>



2. Linssi muodostaa todellisen kuvan hehkulampusta, mutta varjostimelle muodostuva kuva on sumea, koska varjostin on hieman kuvan muodostumistason edessä. Kumpaan suuntaan linssiä pitää siirtää, jotta kuva tarkentuu? Lähemmäs lamppua vai kauemmas lampusta. (Piirrä kuva tilanteesta.)
3. Suoraseinäisessä akvaariossa oleva kala katsoo akvaarion ulkopuolella vaanivaa nälkäistä kissaa. Näkeekö kala kissan todellista lähempänä, kauempana vai todellisen etäisyyden päässä? Perustele.

4 Suurentavat optiset laitteet

Katso video [Suurentavat optiset laitteet](#)⁴. Mikä on kulmasuurennoksen ja viivasuurennoksen ero? Miksi mikroskoopilla saadaan suurempi suurennos kuin tavallisella suurennuslasilla? Miksi pitkä kaukoputki mahdollistaa suuremman suurennoksen kuin lyhyt?

1. Ota selvää, mitä eroa on Newtonilaisella kaukoputkella ja Cassegrain kaukoputkella.
2. Mikroskoopin putken pituus on 20 cm. Mikä tulee olla objektiivin polttoväli, jotta suurennos on $500\times$, kun okulaarin polttoväli on 5,0 cm?

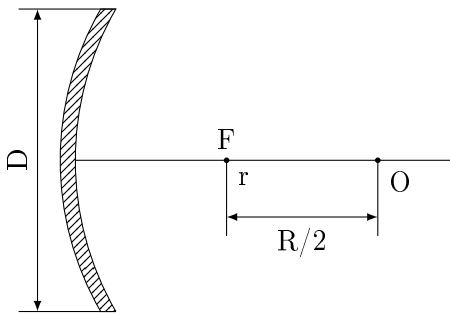
4.1 Pallopeilitehtävä

Kaarevat peilit tehdään usein pallopinnan muotoisiksi, koska niiden tekeminen on yksinkertaisempaa kuin monimutkaisempien muotojen. Tutkitaan seuraavaksi tarkemmin pallopeiliä ja sitä, mihin kovera pallopeili tarkkaan ottaen heijastaa valonsäteet.

⁴<https://www.youtube.com/watch?v=rlGItrR00a8>

Seuraava tehtävä on hieman haastava, mutta se on paloitteltu osiin, joiden avulla ratkaisuun pääsee käsiksi.

1. Pallopeili on asennettu kaukoputkeen. Sen halkaisija on $D = 5,0 \text{ cm}$ ja kaarevuussäde on $R = 2 \text{ m}$. Peilin pääpolttopisteessä on säteilynvastaanotin, joka on pyöreä kiekko. Kiekko asetetaan kohtisuoraan peilin optisen akselin kanssa. Mikä tulee olla kiekon säteen r , jotta siihen saadaan kerättyä kaiken peilin heijastaman säteilyn? Jos haluat lisähaasteen, voit yrittää suorittaa laskun ilman laskinta. Tässä tapauksessa voit käyttää pienillä luvuilla toimivaa approksimaatiota $\sqrt{1-x} \approx 1-x/2$. Diffraktiota ei tarvitse huomioida.



Miten lähdetään purkamaan tehtävää? Pitää siis tutkia valonsädettä, jonka tulokulma ja siten heijastumiskulma on mahdollisimman suuri. Kun piirrämme tämän valonsäteen ja sen heijastuksen, voimme käyttää tuttua geometriaa ja trigonometriaa vastataksemme kysymykseen. Voit yrittää ratkaista tehtävää jo nyt, mutta alla on tukikysymyksiä ja vinkkejä, joilla pääset varmasti alkuun. Tämä tehtävä on ollut vuoden 1970 kansainvälisten fysiikkaolympialaisten (IPhO) neljäs tehtävä.

- a) Mitä lähempänä optista pääakselia valonsäde tulee peiliin, sitä lähemmäs se heijastuu polttopistettä F . Nyt halutaan tutkia sitä kiekkoa, joka kerää kaikki säteet. Mihin kohtaan peiliä se valonsäde osuu, jota nyt halutaan tutkia? Piirrä se.
- b) Miten voit piirtää kuvaan heijastuvan valonsäteen tulokulman α ? Ts. miten saat piirrettyä normaalin siihen pisteeseen, johon valonsäde osuu?

- c) Piirrä nyt arvio heijastumiskulmasta ja valonsäteen jatkeesta. Nyt kannattaa ehkä piirtää havainnekuva, jossa korostat tutkittavia etäisyyksiä, jotta saat piirrettyä selkeämmän kuvan. Merkitään myöhempiä vaiheita varten valonsäteen ja pääakselin leikkauspistettä B:llä.
- d) Nyt voit osoittaa, että piste B on polttopisteen ja peilin välissä. (Tämän voit myös jättää myöhemmäksi, mutta perustelu on hyvä harjoitus.)
- e) Lopulta tarkoituksena on saada r kirjoitettua D :n ja R :n avulla. Aluksi on kuitenkin helpompaa kirjoittaa r trigonometristen funktioiden ja kulman α avulla. Piirrä apukolmio BFC, jossa C on heijastuneen valonsäteen ja polttopisteen kautta kulkevan pystysuoran leikkauspiste. Kolmiossasi siis $CF=r$.
- f) Kirjoita r kulman α avulla. (Vihje: samankohtaiset kulmat. Voit kirjoittaa sivun BF janojen BO ja OF erotuksena.)
- g) Kirjoita trigonometrisia relaatioita käyttämällä kulman α sini ja kosini käyttämällä D :tä ja R :ää. Nyt voit laskea etäisyyden r . (Vihje: kaksinkertaisten kulmien trigonometriset relaatiot)

Kun pallopeilin kaarevuussäde on riittävän suuri, se approksimoi paraabelin pohjaa riittävän hyvin sovelluksissa. Jos optiselta laitteelta kaivataan suurta tarkkuutta, peilistä tehdään paraboloidin muotoinen. Eräs paraabelin ominaisuus on, että paraabelin pinnasta heijastuneet optisen akselin suuntaiset valonsäteet kulkevat paraabelin polttopisteen kautta.

5 Syventävää materiaalia

5.1 Kameran optiikkaa

Katso video [Kameran optiikasta](#)⁵.

Vastaa kysymyksiin:

1. Linssin polttoväli on 35 mm ja aukon halkaisija on 7,0 mm. Mikä on linssin f -luku?

⁵<https://www.youtube.com/watch?v=9brPY1RRd90>

2. Kamera ottaa oikein valottuneen kuvan asetuksilla $f/5,6$ ja $1/125$ s. Mitä sulkimen nopeutta tulee käyttää, jos linssi vaihdetaan $f/4,0$:ksi?

5.2 Sateenkaari (syvällisesti)

Katso video [Sateenkaaren geometrista optiikkaa](#)⁶. Videon seuraamista helpottaa, jos tietää, miten funktion derivaattaa käytetään sen ääriarvojen ratkaisemisessa.

5.3 Haastavia tehtäviä

1. Tehtävänäsi on rakentaa mikroskooppi kahdesta linssistä. Toisen linssin polttoväli on $2,0\text{ cm}$ ja toisen $1,0\text{ cm}$. Päättät käyttää optisesti tehokkaampaa linssiä objektiivina ja haluat, että okulaari on $16,0\text{ cm}$:n etäisyydellä objektiivista.⁷
 - a) Kuinka kaukana näytteen tulee olla objektiivista, kun mikroskooppia käytetään rennolla silmällä?
 - b) Mikä on mikroskooppisi suurennos?
2. Osoita, että paraabelin $y = ax^2$, $a > 0$, symmetria-akselin suuntaisesti kulkevat valonsäteet heijastuvat polttopisteeseen. Oleta, että valonsäteiden heijastumiskulma pinnan normaaliin on sama kuin tulokulma.⁸

⁶<https://www.youtube.com/watch?v=MwU-PlhBKgI>

⁷Vihje: Etsi määritelmä "optical power"

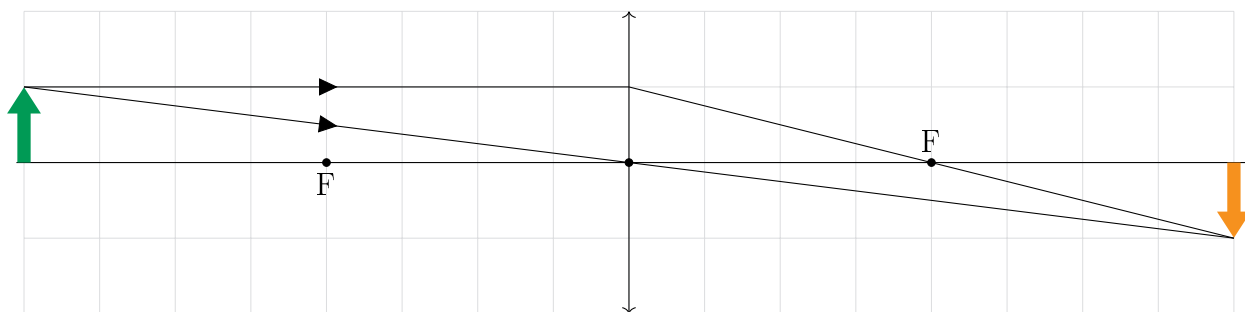
⁸Vihje: Jos polttopisteen selvittäminen tuntuu haastavalta, voit käyttää tunnettua polttopistettä $(0, 1/(4a))$.

6 Tehtävien vastaukset

2.1 e) Kuvaa ei muodostu lainkaan. Voit kokeilla pitää jotakin esinettä seinän edessä. Seinälle ei muodostu kuvaa.

2.2 Kuva muodostuu varjostimelle kokonaan, mutta on himmeämpi, koska linssin läpi kulkee vähemmän valoa. Tätä auttaa hahmottamaan, jos piirrät esineestä lähtevät valonsäteet sekä linssin yläpuolen että alapuolen kautta. Muista, että kappaleesta lähtee valonsäteitä joka suuntaan.

2.3 a) Piirretään kuva



Kuvan perusteella kuva näyttäisi syntyvän 40 cm:n etäisyydelle linssistä ja yhtä suurena kuin esine.

b) Käytetään linssien kuvausyhtälöä. Nyt koska esineen etäisyys s kokoavasta linssistä on suurempi kuin linssin polttoväli, syntyy todellinen kuva. Siispä

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \iff s' = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{f} \right)^{-1}.$$

Annetuilla tiedoilla saamme

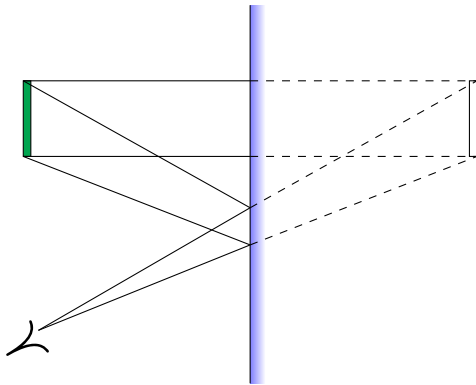
$$s' = \left(\frac{1}{40 \text{ cm}} - \frac{1}{20 \text{ cm}} \right)^{-1} = -40 \text{ cm}$$

Kuvan koon voi laskea viivasuurennoksesta

$$m = -\frac{s'}{s} = -\frac{-40 \text{ cm}}{40 \text{ cm}} = 1,$$

eli kuva on samankokoinen kuin esine. Tulos on järkevä, koska esine on täsmälleen kahden polttovälin etäisyydellä linssistä. Tulos myös täsmää piirtämämme kuvan kanssa.

- 2.4 Valo siroaa jokaisesta kynän pisteestä jokaiseen suuntaan avaruudessa. Jos valo, joka heijastuu kynästä, heijastuu peilin kautta silmääsi, näet kynän kuvan. Alla olevasta kuvasta näet, että kynästä silmään tuleva valo kulkee peilin alemman puoliskon kautta. (a) Jos peilin yläpuoli peitetään, kynästä tuleva valo voi heijastua peilin kautta silmääsi ja näet kuvan. (b) Jos peilin alapuoli peitetään, et voi nähdä kuvaa.



- 2.11 Kovera peili muodostaa todellisen kuvan peilin eteen. Koska kuun etäisyys on $s \approx \infty$, kuvan etäisyys on $s' \approx f$.
- 2.12 Suurentava peili, joka muodostaa kuvan oikeinpäin, on kovera peili, jolla on suuri polttoväli. Jotta kuva muodostuisi oikeinpäin, tulee olla $s < f$. Tällöin muodostuu valekuva, joka on peilin takana.
- 2.13 Lusikka toimii koverana peilinä, jolla on lyhyt polttoväli. Tällöin kun siitä ihailee omaa kuvaansa, on esineenä toimivat kasvot polttoväliä kauempana $s > f$, jolloin peili muodostaa ylösalaisin olevan todellisen kuvan. Jos katsot kuvaasi lusikasta hyvin läheltä, se kääntyy oikeinpäin.
- 3.1 a), e) tai f). Voit ratkaista yhtälöstä

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

kuvan etäisyyden s' ja tutkia, miten eri suureiden muuttaminen muuttaa s' :n suuruutta.

3.2 Mietitään linssin kuvausyhtälöä

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}.$$

Käytössämme on vain yksi linssi, joten f pysyy vakiona, siispä yhtälön vasemman puolen summa on vakio. Siispä kun linssiä siirretään kohti lamppua, s pienenee, joten s' :n täytyy vastaavasti kasvaa. Kun taas linssiä siirretään poispäin lampusta, s kasvaa, jolloin s' pienenee, ja kuva saadaan muodostumaan varjostimelle.

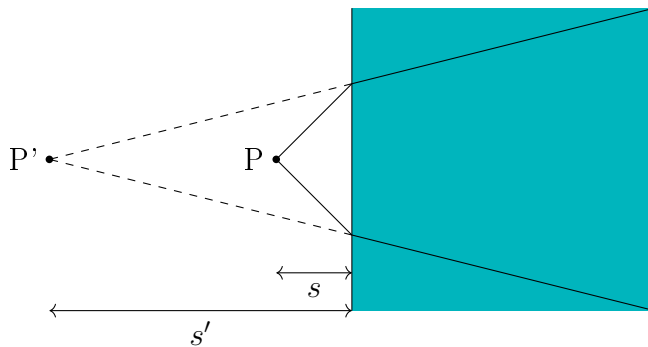
3.3 Tutkitaan taas yhtälöä

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

Akvaarion seinät ovat suorat, joten $R \rightarrow \infty$ ja saamme

$$\frac{n_1}{s} = -\frac{n_2}{s'} \iff s' = -\frac{n_2}{n_1}s.$$

Kun valo tulee ilmasta veteen (oletetaan, että akvaarion lasiseinä on niin ohut, ettei sitä tarvitse huomioida), säteet taittuvat pinnan normaalia kohti. Tämän seurauksena valonsäteiden jatkeet vedestä ilmaan päin kohtaavat kauempana kuin, mitä kissa on. Katso ideaa kuvasta



4.1 Molemmat kaukoputket toimivat sillä periaatteella, että valonsäteet kootaan kaa-revalla peilillä ja käytetään toista peiliä syntyneen kuvan katselemiseen. Newtoni-laisessa kaukoputkessa kootut valonsäteet ohjataan peilin avulla sivuun, josta niitä

katsotaan. Cassegrainin kaukoputkessa käytetään kuperaa peiliä, jonka avulla voidaan säädellä helpommin sitä, miltä etäisyydeltä kaukoputken takaa kuva näkyy tarkasti.

4.2 Mikroskoopin suurennokselle pätee

$$M = -\frac{L}{f_{obj}} \frac{25 \text{ cm}}{f_{okul}},$$

josta voidaan ratkaista f_{obj}

$$f_{obj} = \frac{L}{M} \frac{25 \text{ cm}}{f_{okul}} = \frac{20 \text{ cm}}{500} \frac{25 \text{ cm}}{5,0 \text{ cm}} = 0,2 \text{ cm}.$$

4.1.1.1 Alla olevaan kuvaan on piirretty saapuva valonsäde ja säteen heijastus. Ympyrän säde on aina kohtisuorassa ympyrän kaarta vasten, joten OA on peilin pinnan normaalin suuntainen. Kuvasta nähdään alustavasti, että heijastunut valonsäde ei kulje polttopisteen kautta. Osoitetaan tämä. Merkitään tulokulmaa α :lla. Koska tulokulma MAO ja kulma AOB ovat samankohtaiset ja MA ja OB ovat yhdensuuntaiset, ovat MAO ja AOB yhtäsuuret. Siispä $AOB = \alpha$. Koska heijastumiskulma ja tulokulma ovat yhtäsuuret ja OA on peilin normaalin suuntainen, on kulma OAB on yhtäsuuri kuin α . Siispä kolmio $\triangle ABO$ on tasakylkinen. Yksi kolmion ominaisuuksista on, että kahden lyhyemmän sivun pituuksien summa on aina suurempi kuin pisimmän sivun pituus. Nyt siis $AB + BO > OA = R$. Koska kolmio on tasasivuinen, niin $AB + BO = 2BO > R$, eli $BO > R/2$. Näin ollen piste B sijaitsee polttopisteen F ja peilin välissä.

Kirjoitetaan sitten apukolmion $\triangle BCF$ avulla pituus r :

$$r = BF \tan 2\alpha = BF \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Sivun BF pituus saadaan erotuksesta OB-OF. OB saadaan apukolmiosta $\triangle BOP$:

$$OB = \frac{R}{2} \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Siispä

$$r = \frac{R}{2} \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Voimme käyttää kaksinkertaisten kulmien relaatioita

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

ja saamme sijoittamalla

$$r = \frac{R}{2} \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha}.$$

Kun sijoitamme saatuun yhtälöön

$$\sin \alpha = \frac{D}{2R} \quad \text{ja} \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{R^2 - (D/2)^2}}{R}$$

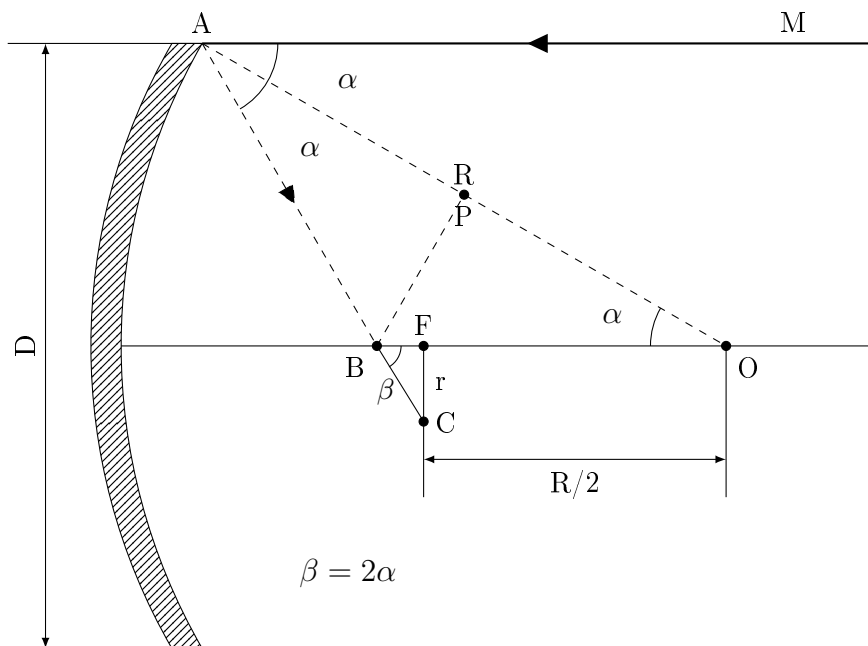
saamme laskun lopputulokseksi $r = 2,024 \dots \text{ mm} \approx 2 \text{ mm}$. Lisähaasteena oli tehdä tämä lasku ilman laskinta. Tätä varten voimme tehdä arvion $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \approx 1 - \sin^2 \alpha / 2$. Nyt saamme säteeksi

$$r \approx \frac{R}{2} \frac{\sin^3 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Tähän voi jo sijoittaa $\sin \alpha$:n, mutta kohtuullisen hyvin toimiva arvio edelleen on

$$r \approx \frac{R}{2} \sin^3 \alpha \approx \frac{D^3}{16R^2},$$

josta saamme säteeksi $r \approx 1,95 \text{ mm} \approx 2 \text{ mm}$.



5.1.1 Kameran linssin f -luvun määritelmällä

$$f - \text{luku} = \frac{f}{D} = \frac{35 \text{ mm}}{7,0 \text{ mm}} = 5$$

5.1.2 Haluamme molemmissa tapauksissa saman valotusajan. Valotusaika riippuu intensiteetin ja suljinnopeuden tulosta $I\Delta t$. Intensiteetti taas riippuu f -luvun neliön käänteisluvusta. Siispä

$$\text{valotusaika} = I\Delta t \propto \frac{1}{(f - \text{luku})^2} \Delta t.$$

Siispä asettamalla ensimmäisen ja jälkimmäisen valotusajan yhtäsuureksi

$$\begin{aligned}\frac{1}{(f - \text{luku})^2} \Delta t &= \frac{1}{(f - \text{luku})'^2} \Delta t' \\ \Leftrightarrow \Delta t' &= \frac{(f - \text{luku})'^2}{(f - \text{luku})^2} \Delta t \\ &= \frac{(4,0)^2}{(5,6)^2} \frac{1}{125} \text{s} \\ &= \frac{1}{245} \text{s} \approx \frac{1}{250} \text{s}\end{aligned}$$

5.3.1 Tutkitaan ensin kumpi linseistä on tehokkaampi. Optinen teho on $P = 1/f$. Siispä

$$P_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{0,02 \text{ m}} = 50 \text{ m}^{-1} \quad ; \quad P_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{0,01 \text{ m}} = 100 \text{ m}^{-1}.$$

Siispä objektiivina käytetään linssiä 2, jonka polttoväli on $f_{obj} = 1,0 \text{ cm}$. Okulaarin polttoväli on $f_{oku} = 2,0 \text{ cm}$.

(a) Katso videolla olevaa kuvaa mikroskoopista. Linssien välinen etäisyys on $L = 16 \text{ cm}$. Objektiivin muodostaman kuvan paikka on siten $s' = 16 \text{ cm} - f_{oku} = 14 \text{ cm}$. Nyt saamme kuvausyhtälöstä esineen etäisyyden objektiivista

$$s = \frac{f s'}{s' - f} = \frac{1,0 \text{ cm} \cdot 14 \text{ cm}}{14 \text{ cm} - 1,0 \text{ cm}} = 1,07692 \dots \text{ cm} \approx 1,1 \text{ cm}.$$

(b) Käytetään viivasuurennosta

$$M = m_{obj} M_{oku} = \frac{-s'}{s} \frac{25 \text{ cm}}{f_{oku}} = -160.$$

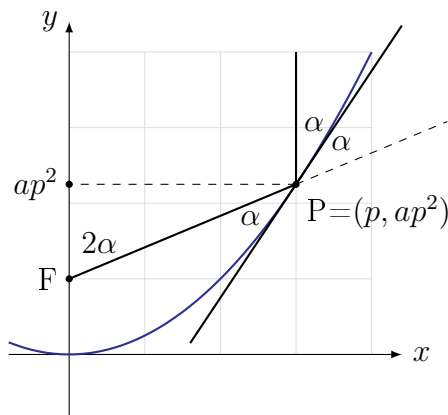
Käyttämällä approksimaatiota

$$M = \frac{L}{f_{obj}} \frac{25 \text{ cm}}{f_{oku}} = -200.$$

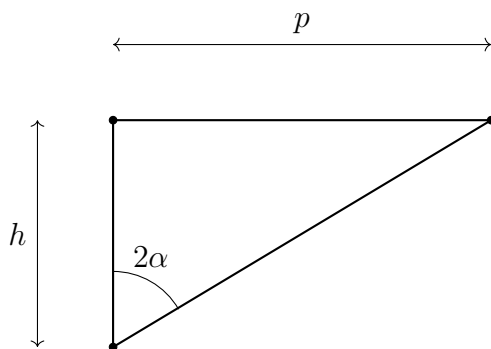
Tulos on samansuuntainen, mutta tälle mikroskoopille approksimaatio ei ole kovin hyvä.

5.3.2 Tutkitaan tilannetta, jossa valonsäde saapuu ylhäältä y -akselin suuntaisesti paraabeliin ja osuu pisteeseen $P = (p, ap^2)$. Se, että tulokulma ja heijastuskulma ovat normaalin suhteen yhtä suuret, on yhtäpitävää sen kanssa, että kulmat tangenttiin verrattuna ovat myös yhtäsuuret. Merkitään tätä kulmaa α :lla. Paraabelin tangentin kulmakerroin pisteessä P on $k = 2ap$. Yleisesti suoran ja y -akselin välinen kulma saadaan kulmakertoimen käänteisluvusta, joten tässä tapauksessa:

$$\tan \alpha = \frac{1}{2ap}.$$



Nyt voidaan tutkia apukolmiota $\triangle FPP(ap^2)$. Merkitään etäisyyttä pisteestä $(0, ap^2)$ heijastuneen säteen ja paraabelin symmetria-akselin leikkauspisteeseen h :lla. Kulman 2α voi löytää käyttämällä ristikkäiskulmien ja samankohtaisten kulmien yhtäsuuruuksia.



Apukolmiosta saamme

$$\tan 2\alpha = \frac{p}{h}.$$

Kaksinkertaisen kulman tangentille

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha},$$

johon voimme sijoittaa $\tan \alpha$:n, ja saamme

$$\frac{p}{h} = \frac{2 \frac{1}{2ap}}{1 - \left(\frac{1}{2ap}\right)^2} = \frac{1}{ap - \frac{1}{4ap}} \quad (1)$$

$$\iff \frac{h}{p} = ap - \frac{1}{4ap} \quad (2)$$

$$\iff h = ap^2 - \frac{1}{4a}. \quad (3)$$

Nyt saamme heijastuneen säteen ja symmetria-akselin leikkauspisteen y -koordinaatiksi

$$y = ap^2 - h = ap^2 - ap^2 + \frac{1}{4a} = \frac{1}{4a}$$

eli heijastuneet valonsäteet osuvat aina samaan pisteeseen.

Tutkitaan seuraavaksi tilannetta, jossa polttopiste tunnetaan. Tämän paraabelin polttopiste on $F = (0, \frac{1}{4a})$. Olkoon nyt piste $P = (p, ap^2)$ piste paraabelilla. Tehtävänä on osoittaa, että valonsäde, joka tulee y -akselin suuntaisesti pisteeseen P heijastuu polttopisteeseen. Tiedämme heijastumisen tapahtuvan siten, että säteen tulokulma on yhtä suuri kuin heijastumiskulma. Tulokulman ja heijastumiskulman yhtäsuuruus on yhtäpitävää sen kanssa, että säteen ja pinnan tangentin väliset kulmat ovat yhtä suuret. Paraabelin tangentin kulmakerroin on $2ax$, jolloin pisteen P kautta kulkevan tangentin yhtälö on

$$y_{tg} - ap^2 = 2ap(x - p) \iff y_{tg} = 2ap(x - p) + ap^2.$$

Tämän suoran ja y -akselin väliselle kulmalle

$$\tan \alpha_1 = \frac{1}{2ap}.$$

Polttopisteen ja pisteen P kautta kulkevan suoran yhtälö on

$$\begin{aligned} y_{\text{FP}} - \frac{1}{4a} &= \frac{ap^2 - \frac{1}{4a}}{p}x \\ \Leftrightarrow y_{\text{FP}} &= \left(ap - \frac{1}{4ap}\right)x + \frac{1}{4a}. \end{aligned}$$

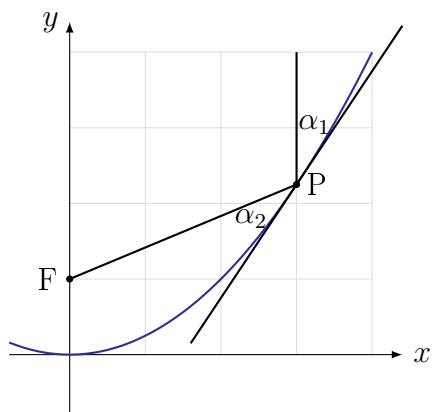
Kahden suoran väliselle kulmalle on yhtälö

$$\tan \phi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|,$$

johon voimme nyt sijoittaa tuntemamme suorien kulmakertoimet ja saamme

$$\begin{aligned} \tan \alpha_2 &= \left| \frac{ap - \frac{1}{4ap} - 2ap}{1 + 2ap \left(ap - \frac{1}{4ap}\right)} \right| \\ &= \dots \\ &= \left| \frac{1}{2ap} \right|. \end{aligned}$$

Näin ollen meillä on $\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2$ ja siten $\alpha_1 = \alpha_2$. Olemme osoittaneet, että mikäli y -akselin suuntaisesti saapuva valonsäde heijastuu pisteeseen F, on tulokulma yhtä suuri kuin heijastumiskulma. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että mikäli y -akselin suuntaisesti saapuva valonsäde heijastuu paraabelista siten, että tulokulma on yhtäsuuri kuin heijastumiskulma, valonsäde osuu pisteeseen F.



Paraabelin polttopisteen löytämisestä voit lukea tarkemmin esim. Wikipediasta https://en.wikipedia.org/wiki/Parabola#Definition_as_a_locus_of_points