

Maxwellin yhtälöt

Lasse Manninen

26. elokuuta 2021

Tästä materiaalista

Tässä materiaalissa esitellään opetusvideoiden avulla Gaussin laki, Faradayn laki ja Ampèren-Maxwellin laki ja miten nämä yhdessä Gaussin lain magnetismille kanssa muodostavat Maxwellin yhtälöt. Tarkoitus on tutustua sähkömagnetismissa vastaan tuleviin merkintöihin viiva- ja pintaintegraaleille. Tehtävissä käsitellään sellaisia tapauksia, joissa symmetrian avulla integraaleista tulee yksinkertaisia.

Tätä materiaalia voi käyttää lisämateriaalina sähkömagnetismin kurssilla sellaisille oppilaille, joille vektorit, derivaatta ja integraali ovat perustasolla tuttuja.

Luvussa 1 esitellään vuon käsite integraalin avulla. Pintaintegraaleja ei kuitenkaan laskea, vaan pidättäydytään tapauksissa, joissa pistetulosta tulee 0 tai kertolasku ja pinnan pinta-ala tiedetään. Kesto opetusvideon kanssa on noin 30 min.

Luvussa 1.1 tutustutaan gaussin lakiin ja siihen, kuinka gaussin pinta valitaan. Kesto noin 30-60 minuuttia. Tehtävien laskut eivät ole vaikeita, mutta aihe on haastava. Luvussa 1.2 käsitellään vastaavalla tavalla Ampèren lakia ja luvussa 1.3 Faradayn lakia. Jos Faradayn laki on entuudestaan tuttu, voi videon "Sähkömagneettinen induktio"jättää pois. Luvussa 2 esitellään Maxwellin yhtälöt yhtenä kokonaisuutena opetusvideon avulla. Lisäyksenä luvun 1 materiaaleihin tulee Gaussin laki magneettikentille ja Ampèren lain laajennus kenttävirtojen käsitteen avulla.

Tämä materiaali on lisensoitu Nimeä-JaaSamoin 4.0 Kansainvälinen (CC BY-SA 4.0) -lisenssillä. lasse.m.manninen@gmail.com

Motivointia

Maxwellin yhtälöt yhdessä Lorentzin voiman kanssa luovat pohjan klassiselle sähkömagnetismille. Yhdessä ne ovat matemaattinen malli, joka kuvaa makroskooppisessa mitataavassa koko sähkömagnetismin. Yhtälöt kuvaavat, kuinka sähkövaraus tuottaa sähkökentän, kuinka magneettisia monopoleja ei ole olemassa, kuinka muuttuva magneettikenttä tuottaa sähkökentän ja kuinka sähkövirta ja muuttuva sähkökenttä tuottavat magneettikentän.

Sähkömagnetismin teoria luo pohjan erilaisille teknologioille kuten sähköntuotannolle, sähkömoottoreille ja langattomalle viestinnälle. Teoria ennustaa myös, että sähkömagneettisen säteilyn etenemisnopeus tyhjiössä on vakio.

Melko yksinkertaisissa tapauksissa Maxwellin yhtälöiden avulla voidaan helposti tutkia erilaisten sähkö- ja magneettikenttien voimakkuuksia ja sähkömagneettista induktiota. Yhtälöt tarjoavat laskennallisia työkaluja esimerkiksi virtajohtimen muodostaman magneettikentän tutkimiselle ja generaattorin tuottaman jännitteen suuruudelle. Yleisissä tapauksissa laskuista tulee nopeasti työläisiä ja tässä materiaalissa tarkoitus onkin enemmän yhtälöiden käsitteellisessä ymmärtämisessä.

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0}$	Gaussin laki
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	Gaussin laki magnetismille
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$	Faradayn laki
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{läpi}} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$	Ampèren-Maxwellin laki

1 Sähkö- ja magneettikenttien määrittäminen

Katso video Vuon käsite ja sähkökentän vuo¹.

¹https://www.youtube.com/watch?v=XB59XYNW_e8

Jos vektorikenttä on vakio, esimerkiksi homogeeninen sähkökenttä, niin

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A}.$$

Yleisen vektorikentän $\vec{f}$ vuon pinnan A läpi voi laskea

$$\Phi = \int \vec{f} \cdot d\vec{A}.$$

Erikoistapaukset ovat ne, kun pistetulo on nolla tai 1.

Jos kenttä on vakio pinnalla A , niin integraalista tulee

$$\Phi = \int_{\text{pinta}} \vec{f} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{pinta}} f \cos \theta dA = f \cos \theta \int_{\text{pinta}} dA,$$

jossa integroitavaksi jää kaikki pinta-ala-alkiot pinnalla A , eli pinnan A pinta-ala

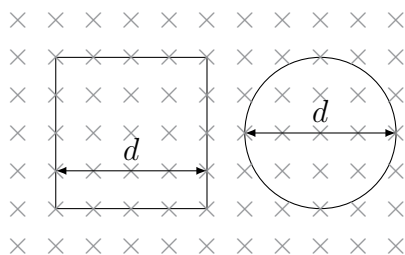
$$\int_{\text{pinta}} dA = A.$$

Tämä on erityisen hyödyllistä esimerkiksi sähkökenttien vuota laskettaessa, kun sähkökentän muoto tunnetaan tai voidaan arvata.

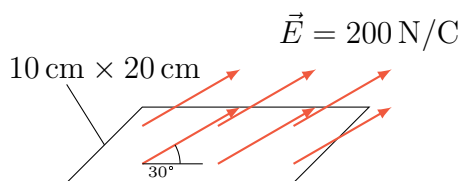
Yksinkertaisimmat tapaukset sähkökentän vuosta ovat ne, kun pinta on jokaisessa kohdassa samansuuntainen sähkökentän kanssa ja kun pinta on joka kohdassa kohtisuorassa sähkökentän kanssa. Kun pinta on samansuuntainen kentän kanssa, on kenttävektorin ja pintavektorin pistetulo $\vec{E} \cdot \vec{A}$ kaikkialla nolla ja vuo pinnan läpi on nolla. Kun pinta on kohtisuorassa sähkökentän kanssa, pistetulo on kertolasku $\vec{E} \cdot \vec{A} = EA$ ja vuo on

$$\Phi = \int_{\text{pinta}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{pinta}} E dA = E \int_{\text{pinta}} dA = EA$$

1. Neliö ja ympyrä ovat samassa homogeenisessa kentässä. Ympyrän halkaisija on sama kuin ympyrän sivun pituus. Onko vuo ympyrän läpi suurempi, pienempi vai yhtä suuri kuin ympyrän läpi? Perustele.



2. Mikä on sähkökentän vuo kuvassa esitetyn pinnan läpi?



1.1 Gaussin laki

Katso video Gaussin laki².

- Käy huolellisesti läpi videolla esitetty esimerkki tasaisesti varatun pallon kentästä.
- Tutkitaan videolla esitettyä äärettömän pitkän ohuen tasaisesti varatun johtimen sähkökenttää. Kuten videolla todettiin, Gaussin pinnaksi kannattaa valita sylinteri, jolloin sähkökenttä on kohtisuorassa sylinterin vaippaa vasten ja samansuuntainen sylinterin päätyjen kanssa. Johtimen pituusvaraustiheys on λ .
 - Mikä on L :n pitusen johtimen osan varaus Q ?
 - Mikä on vuo sylinterin päätyjen läpi?
 - Mikä on vuo sylinterin vaipan läpi?
 - Mikä on kokonaisvuo sylinterin läpi?
 - Mikä on sähkökentän suuruus etäisyydellä r johtimesta?
- Tutkitaan videolla esitettyä tasaisesti varatun äärettömän laajan levyn aiheuttamaa sähkökenttää. Millaisen Gaussin pinnan valitsisit tämän kentän tutkimiseksi? Mikä on vuo valitsemasi pinnan läpi? Mikä on pintasi sisään jäävä varaus Q , kun levyn pintavaraustiheys on η ? Mikä on levyn aiheuttama sähkökenttä?

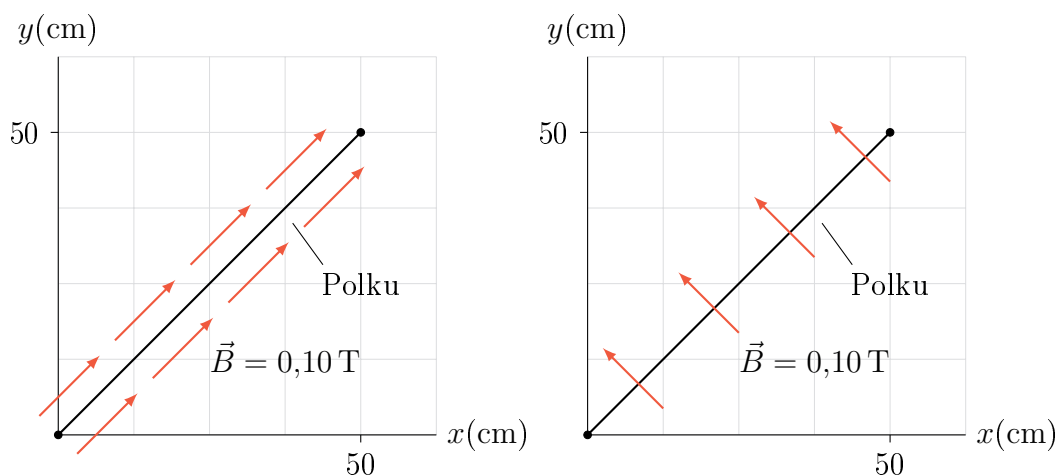
²<https://www.youtube.com/watch?v=HctFKHdWPRw>

1.2 Ampèren laki

Katso video Ampèren laki³.

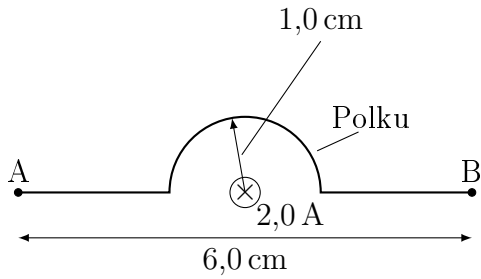
Ampèren laki muistuttaa Gaussin lakia. Nyt pinnan sijaan integroidaan pistetuloa käyrän yli. Jälleen, jos magneettikentän muoto tunnetaan symmetriasta, voidaan käyrä valita sellaiseksi, että integraalista tulee kertolasku tai vakion integraali. Näin voidaan laskea magneettikentän vuontiheyksiä erilaisille systeemeille.

1. Käy huolellisesti läpi videolla esitetty esimerkki äärellisen paksuisen johtimen magneettikentästä. Perustele, miksi integraali pistetulon yli muuttuu kertolaskuksi.
2. Mieti tarkasti, miksi videolla esitetyissä esimerkeissä integroitavat polut valitaan juuri tietyntalaiseksi. Voisiko polut valita eri tavoin, mutta kuitenkin säilyttää laskun yksinkertaisuuden?
3. Laske alla olevan kuvan mukaiset magneettikentän $\vec{B}$ viivaintegraalit. Integrointipolku on jana origosta pisteeseen (50,50).



4. Mikä on magneettikentän $\vec{B}$ viivaintegraali pisteiden A ja B välillä?

³<https://www.youtube.com/watch?v=yIcWfJv00rA>

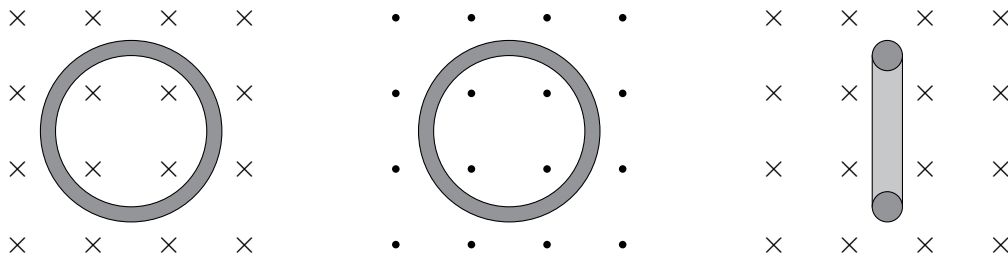


1.3 Faradayn laki (sähkömagneettinen induktio)

Katso video Sähkömagneettinen induktio⁴.

1. Alla olevissa kuvissa on johdinsilmukka, jonka halkaisija on 10,0 cm ja resistanssi on $0,20\ \Omega$. Mikä on kuhunkin silmukkaan indusoituvan virran suuruus ja suunta?

(a) B suurenee $0,50\ \text{T/s}$ (b) B pienenee $0,50\ \text{T/s}$ (c) B pienenee $0,50\ \text{T/s}$



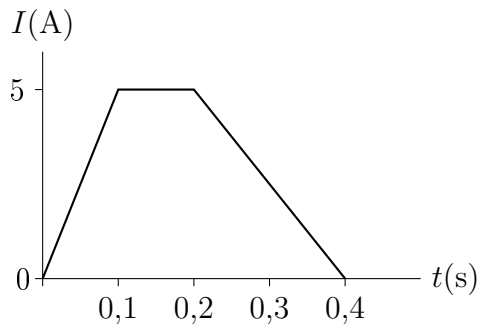
2. Katso video Indusoitunut sähkökenttä⁵.
3. Alla on kuvaaja virrasta ajan funktiona solenoidissa, jossa on 400 kierrosta, jonka pituus on 20,0 cm ja halkaisija on 4,0 cm. Virta I aiheuttaa solenoidissa magneettikentän

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L}.$$

Piirrä kuvaaja indusoituneen sähkökentän voimakkuudesta ajan funktiona 1,0 cm:n päässä solenoidin akselista.

⁴<https://www.youtube.com/watch?v=0iMW4Iwny0g>

⁵<https://www.youtube.com/watch?v=eh818oHgqVw>



2 Maxwellin yhtälöt

Katso video Maxwellin yhtälöt⁶.

Tutustutaan vielä kenttävirran käsitteeseen tehtävien avulla.

1. Osoita, että suureella

$$\epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$$

on sama yksikkö kuin virralla.

2. Levykondensaattorin levyt ovat halkaisijaltaan 10 cm ja 1,0 mm:n etäisyydellä toisistaan. Sähkökenttä levyjen välissä kasvaa $1,0 \times 10^6$ V/s. Mikä on magneettikentän vuontiheys
 - a) levyjen keskiakselilla
 - b) 3,0 cm:n etäisyydellä akselista?
 - c) 7,0 cm:n etäisyydellä akselista?
3. Levykondensaattorin levyt ovat halkaisijaltaan 5,0 cm ja 0,50 mm:n etäisyydellä toisistaan. Mikä on kenttävirta kondensaattorissa, kun potentiaaliero levyjen välillä kasvaa 500 000 V/s

⁶<https://www.youtube.com/watch?v=ealHy8iAlEE>

Tehtävien ratkaisut

Luku 1

1.1 Vuot pintojen läpi ovat $\Phi_{\text{neliö}} = \vec{E}_{\text{neliö}} \cdot \vec{A}_{\text{neliö}} = E_{\text{neliö}} A_{\text{neliö}}$ ja $\Phi_{\text{ympyrä}} = \vec{E}_{\text{ympyrä}} \cdot \vec{A}_{\text{ympyrä}} = E_{\text{ympyrä}} A_{\text{ympyrä}}$. Sähkökenttä on homogeeninen, joten $E_{\text{neliö}} = E_{\text{ympyrä}}$. Pinta-alat ovat $A_{\text{neliö}} = d^2$ ja $A_{\text{ympyrä}} = \pi \frac{d^2}{4} = \frac{\pi}{4} d^2$. Koska $\pi/4 < 1$, niin $A_{\text{neliö}} > A_{\text{ympyrä}}$ ja siten $\Phi_{\text{neliö}} > \Phi_{\text{ympyrä}}$.

1.2 Lasketaan pistetulo $\vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos(\theta)$. Pinta-alavektori $\vec{A}$ osoittaa pinnan *normaalin* suuntaan, joten vektoreiden $\vec{E}$ ja $\vec{A}$ välinen kulma on 60° . Sähkökentän suuruus on annettu $E = 200 \text{ N/C}$ ja pinta-ala on $A = 10 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 200 \text{ cm}^2 = 0,02 \text{ m}^2$. Siispä

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = 200 \text{ N/C} \cdot 0,02 \text{ m}^2 \cos 30^\circ \approx 3,46 \text{ Nm}^2/\text{C}.$$

Luku 1.1

- 1.1.2 a) Pituusvaraustiheys λ kertoo kuinka paljon varausta on pituusyksikköä kohti. Siispä L :n pituisen johtimen pätkän varaus on $Q = \lambda L$.
- b) Sylinterin päädyissä pinta-alavektori $\vec{A}$ on kohtisuorassa sähkökenttävektorin $\vec{E}$ kanssa, joten näiden vektoreiden välinen pistetulo on nolla ja siten vuo sylinterin päätyjen läpi on nolla.
- c) Vaipan kohdalla pinnan normaalin suuntainen pinta-alavektori on joka kohdassa samansuuntainen sähkökentän kanssa, joten pistetulosta tulee kertolasku $\Phi_{\text{vaippa}} = EA_{\text{vaippa}} = E2\pi rL$, jossa r on sylinterin säde ja L sen pituus.
- d) $\Phi = \Phi_{\text{päädyt}} + \Phi_{\text{vaippa}} = 0 + E2\pi rL$.
- e) Nyt voimme käyttää Gaussin lakia, jonka mukaan vuo suljetun pinnan läpi on $\Phi = Q_{\text{in}}/\epsilon_0$. Siispä nyt saamme

$$\frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = E2\pi rL \iff E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

1.1.3 Gaussin pinnaksi voi valita esimerkiksi sylinterin, jonka vaippa on kohtisuorassa varauslevyä vastaan. Varauslevyn sähkökenttä osoittaa joka kohdassa kohtisuoraan

levystä ulospäin (jokaista vinoa sähkökenttävektoria vastaa symmetrian perusteella vektori, joiden summassa tason suuntaiset komponentit kumoutuvat). Tällöin vuo vaipan läpi on nolla ja kokonaisvuo valitun pinnan läpi on vuo päätyjen läpi $\Phi = 2EA$. Pinta-alan A sisään jäävä varaus, kun pintavaraustiheys on η , on $Q_{\text{in}} = \eta A$. Nyt gaussin lain avulla

$$\Phi = 2EA = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{\eta A}{\epsilon_0} \iff E = \frac{\eta}{2\epsilon_0}$$

Luku 1.2

1.2.2 Vaikka integrointipolun voi valita miten hyvänsä, erimuotoisten polkujen esittäminen funktiona voi olla haastavaa (funktion parametrisointi). Olennaista on aina magneettikentän symmetrioiden hyödyntäminen.

1.2.3 a) Koska magneettikenttä $\vec{B}$ on samansuuntainen integrointipolun $\vec{s}$ kanssa alkupisteestä i loppupisteeseen f , $\vec{B}$:n ja $d\vec{s}$:n välinen pistetulo on Bds . Siten polkuintegraali on

$$\begin{aligned} \int_i^f \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \int_i^f B ds = B \int_i^f ds = B \left(\sqrt{(0,50 \text{ m})^2 + (0,50 \text{ m})^2} \right) \\ &= (0,10 \text{ T}) \sqrt{2} (0,50 \text{ m}) \\ &= 0,71 \text{ T m} \end{aligned}$$

b) Koska $\vec{B}$ on kohtisuorassa integrointipolkua kohti koko polun matkalta, pistetulo $\vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$, joten polkuintegraalin tulos on nolla.

1.2.4 Jaetaan integraali kolmeen osaan

$$\int_i^f \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{vasen jana}} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_{\text{puoliympyrä}} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_{\text{oikea jana}} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Johtimen muodostama magneettikenttä on ympyräsymmetrinen johtimen ympärillä. Siispä magneettikenttä on samansuuntainen ympyränmuotoisten polkujen kanssa ja kohtisuorassa tehtävässä annettujen janojen kanssa. Siispä integraalit janojen yli ovat nollia. Puoliympyrällä $\vec{B}$ on samansuuntainen polun kanssa ja magneetti-

kentän suuruus on $B = \mu_0 I / 2\pi d$. Siispä

$$\int_i^f \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 + BL + 0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}(\pi d) = \frac{\mu_0 I}{2} = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A})(2,0 \text{ A})}{2} = 1,26 \times 10^{-6} \text{ Tm}$$

Luku 1.3

1.3.1 Indusoitunut jännite on $\mathcal{E} = |d\Phi/dt|$ ja indusoitunut virta on $I = \mathcal{E}/R$. Kenttä B muuttuu, mutta pinta-ala A ei.

- a) Olkoon pinta-alavektorin suunta sivusta ulospäin ja samansuuntainen $\vec{B}$:n kanssa, jolloin $\Phi = AB$. Siispä

$$\mathcal{E} = \left| A \frac{dB}{dt} \right| = \left| \pi r^2 \frac{dB}{dt} \right| = \left| \pi (0,050 \text{ m}^2) (0,50 \text{ T/second}) \right| = 3,9 \times 10^{-3} \text{ V}$$

ja virta on

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{3,93 \times 10^{-3} \text{ V}}{0,20 \Omega} = 2,0 \times 10^{-2} \text{ A} = 20 \text{ mA}.$$

Kentän voimakkuus kasvaa sivun sisään. Vastustaakseen kentän kasvamista, indusoituneen kentän täytyy osoittaa sivusta poispäin, jolloin oikean käden säännöllä virran suunnaksi saadaan vastapäivään.

- b) Kuten (a)-kohdassa, $\mathcal{E} = A(dB/dt) = 3,9 \text{ mV}$ ja $I = 20 \text{ mA}$. Nyt kentän suunta on sivusta ulos ja kentän voimakkuus pienenee. Muutosta vastustavan kentän täytyy siis osoittaa sivusta ulospäin ja siten indusoitunut virta on jälleen vastapäivään.
- c) Nyt pinta-alavektori $\vec{A}$ on kohtisuorassa kenttän $\vec{B}$ kanssa, joten $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \text{ Wb}$. Koska $\Phi = 0 \text{ Wb}$, niin $\mathcal{E} = |d\Phi/dt| = 0 \text{ V/m}$ ja $I = 0 \text{ A}$. Indusoitunutta virtaa ei synny.

1.3.2 Virta I solenoidissa synnyttää magneettikentän

$$B_{\text{solenoidi}} = \frac{\mu_0 N I}{L}.$$

Indusoituneen sähkökentän voimakkuuden saa yhtälöstä

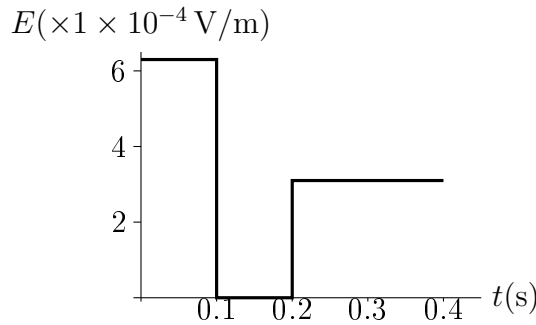
$$E = \frac{r}{2} \left| \frac{dB}{dt} \right|.$$

Koska vain virta muuttuu, sähkökentän voimakkuus on

$$E = \frac{r\mu_0 N}{2L} \left| \frac{dI}{dt} \right| = 1,26 \times 10^{-5} \text{ Vs/Am} \left| \frac{dI}{dt} \right|.$$

Virran muutoksen saa annetun kuvaajan kulmakertoimesta. Välillä $t = 0 \text{ s} - t = 0,1 \text{ s}$ kulmakertoimen itseisarvo on $|dI/dt| = 50 \text{ A/s}$. Välillä $t = 0,1 \text{ s} - t = 0,2 \text{ s}$ virta ei muutu, eli kulmakerroin on nolla. Välillä $t = 0,2 \text{ s} - t = 0,4 \text{ s}$ kulmakertoimen itseisarvo on $|dI/dt| = 25 \text{ A/s}$.

Siispä sähkökentän suuruus on $E = 6,3 \times 10^{-4} \text{ V/m}$ ensimmäisellä välillä, 0 toisella välillä ja $E = 3,1 \times 10^{-4} \text{ V/m}$.



Luku 2

2.1

$$[\epsilon_0] \left[\frac{d\Phi}{dt} \right] = \frac{C^2}{N m^2} \times \frac{(N/C)(m^2)}{s} = \frac{C}{s} = A$$

2.2 Sähkökenttä levykondensaattorin sisällä on homogeeninen. Kun kondensaattori varautuu, muuttuva sähkökenttä induoi magneettikentän. Indusoituneen magneettikentän kenttäviivat ovat ympyröitä, joiden keskipiste on sama kuin kondensaattorien levyillä.

a) Ampèren-Maxwellin lain mukaan

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi}{dt} = \epsilon_0 \mu_0 A \frac{dE}{dt},$$

jossa EA on sähkökentän vuo r -säteisen ympyrän läpi. Magneettikentän kenttäviiva on ympyrä, joten pistetulon $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ integraali r -säteisen ympyrän yli on $B(2\pi r)$. Ampèren-Maxwellin laista tulee

$$2\pi r B = \epsilon_0 \mu_0 (\pi r^2) \frac{dE}{dt} \implies B = \epsilon_0 \mu_0 \frac{r}{2} \frac{dE}{dt}.$$

Levyjen keskiakselilla $r = 0$ m, joten $B = 0$ T.

b) Kun $r = 3,0$ cm,

$$B = \frac{1}{(3,0 \times 10^8 \text{ m/s})^2} \left(\frac{0,030 \text{ m}}{2} \right) (1,0 \times 10^6 \text{ V/ms}) = 1,67 \times 10^{-13} \text{ T}$$

c) Kun $r > 5,0$ cm, sähkökentän vuo Φ on vuo halkaisijaltaan 10 cm:n ympyrän läpi, koska sähkökenttä levyjen ulkopuolella on $E = 0$ V/m. Ampèren-Maxwellin laista saadaan

$$\begin{aligned} B(2\pi r) &= \epsilon_0 \mu_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt} \\ \implies B &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{R^2}{2r} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{(3,0 \times 10^8 \text{ m/s})^2} \frac{(0,050 \text{ m})^2}{2(0,07 \text{ m})} = 1,98 \times 10^{-13} \text{ T} \end{aligned}$$