

Kinematiikkaa kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa

Lasse Manninen

26. elokuuta 2021

Tästä materiaalista

Tässä materiaalissa tutustutaan 2- ja 3-ulotteiseen liikkeeseen. Esitietoina hyvä olla perusasiat vektoreista, derivaatasta ja integraalista. Vektoreista on hyvä tietää, miten vektori jaetaan komponentteihin ja miten vektorin komponentit määrittelevät vektorin. Derivaatasta on hyvä tietää yksinkertaiset derivoimissäännöt ja funktion ääriarvon etsiminen. Integraalia käytetään opetusvideoilla raja-arvona funktion alle jäävästä pinta-alasta. Integroida ei tarvitse osata kuin polynomeja.

Tämä materiaali liittyy lukion fysiikan kurssiin/moduuliin voima ja liike, mutta matemaattisten esitietojen vuoksi on syytä harkita, missä vaiheessa kurssia tätä materiaalia hyödyntää. Syventävässä materiaalissa on luku sähkö- ja magneettikentistä, jota voi hyödyntää sähkömagnetismin kurssilla.

Luvussa 1.1 harjoitellaan derivaatan ja integraalin käyttämistä liikkuvan kappaleen paikan, nopeuden ja kiihtyvyyden määrittämiseen. Luvussa 1.2 tutustutaan, miten yksiulotteinen kinematiikka yleistyy vektoreiden avulla 2- ja 3-ulotteiseen kinematiikkaan. Luvussa 1.3 syvennytään heittoliikkeeseen. Jokainen näistä luvuista käsittää opetusvideon ja aiheeseen liittyviä tehtäviä. Matemaattisista taidoista riippuen jokaiseen näistä luvuista on hyvä varata 30-45 minuuttia.

Luvussa 2 perehdytään koordinaatistoihin ja niiden käyttämiseen fysiikassa. Koordinaa-

Tämä materiaali on lisensoitu Nimeä-JaaSamoin 4.0 Kansainvälinen (CC BY-SA 4.0) -lisenssillä. lasse.m.manninen@gmail.com

tistot ovat aina karteesisia. Tämän luvun opetusvideot ovat englanniksi. Tehtävissä tutkitaan sitä, miten erilaisissa tilanteissa voi ja kannattaa valita koordinaatisto. Tämän luvun tehtävät ovat lähinnä käsitteellisiä ja luvun opiskeluun voi varata noin 30 minuuttia.

Luku 3 käsittelee suhteellista liikettä ja Galilein muunnoksia. Tässä luvussa on hieman enemmän tehtäviä ja viimeiset tehtävät vaativat osaamista vektoreista ja trigonometriasta. Opetusvideo on lyhyt (5 min), joten käsitteellisellä tasolla tämän asian opiskeluun ei mene kauaa. Viimeiset tehtävät voivat olla haastavia ja niihin voi varata 15-30 min per tehtävä.

Luvussa 4 palataan tutkimaan alussa esiteltyä pulmaa ja ratkaistaan se tukikysymysten avulla.

Luvussa 5 on syventävää materiaalia ja haastavia tehtäviä. Sähkömagnetismin osalta käsitellään nopeudesta riippuvia voimia ja sitä, miten nämä voimat havaitaan eri koordinaatistoissa. Tarkoituksena on vahvistaa linkkiä sähkö- ja magneettikenttien välillä. Luku 5.1 sopii käytettäväksi sähkömagnetismin kurssilla/moduulissa esimerkiksi induktion yhteydessä.

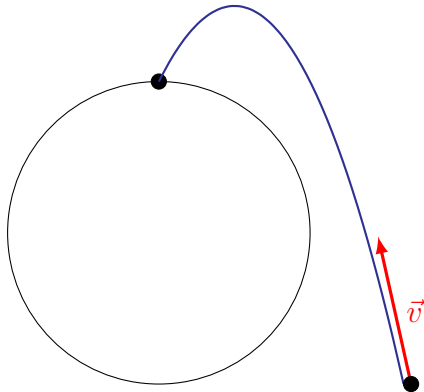
Esimerkki

Tarkastellaan heittoliikettä. Kiinnitetään koordinaatisto siten, että seisot origossa, y-akselin osoittaessa ylöspäin. Heität pallon lähtönopeudella v_0 . Mihin kaikkiin pisteisiin voit osua x-y-tasossa, kun voit valita pallon lähtökulman vapaasti? Mikä on paras kulma heittää pallo, jos haluat heittää mahdollisimman kauas?

Näiden tilanteiden analysoimiseen tarvitaan melko paljon taustatietoa. Kinematiikassa nopeutta ja kiihtyvyyttä voidaan käsitellä derivaatan ja integraalin avulla. Kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa liikettä analysoidaan vektoreiden avulla. Kun systeemejä tutkittaessa pitää ottaa huomioon, täytyy valita jokin koordinaatisto, jonka mukaan suunnat ilmoitetaan. Tätä varten tutustutaan koordinaatistojen valitsemiseen ja suhteelliseen liikkeeseen eri koordinaatistoissa.

Pohditaan vielä pulmaa, johon palataan, kun tarvittavat esitiedot on kasassa. Tarkoitus on heittää pallo pallonmuotoisen rakennuksen katolle korkeimpaan kohtaan ilman, että

pallo osuu matkalla rakennukseen. Mikä on pienin lähtönopeus, jolla heitto onnistuu? (Yksi esimerkki pallonmuotoisesta rakennuksesta on Nagoya City Science Museum)



Jos haluat jo alkaa pohtimaan tätä tehtävää, voit käyttää tietoa, että kun pallo lähtee origosta alkunopeudella v_0 , kaikki pisteet joihin voi osua saadaan epäyhtälöstä

$$y \leq y_0 - kx^2,$$

jossa y_0 ja k ovat selvitettäviä vakioita.

1 Kinematiikkaa

Vektoreita, derivaattaa ja integraalia voi kerrata hyödyntämällä Jyväskylän yliopiston ylläpitämää Matikkapakkaa¹ ja sen osia Vektorit , Derivaatta ja Integraali. Matemaattisista menetelmistä fysiikassa on myös materiaali Suomen fysiikan olympiavalmennukseen liittyen².

1.1 Yksiulotteista kinematiikkaa

Katso video Kinematiikkaa yksiulotteisessa liikkeessä³. Tee muistiinpanot, joista näet miten paikan funktiosta saadaan derivoimalla nopeus ja kiihtyvyys ja miten kiihtyvyyden funktiosta saadaan integroimalla nopeus ja paikka. Pyri myös ymmärtämään käsitteelli-

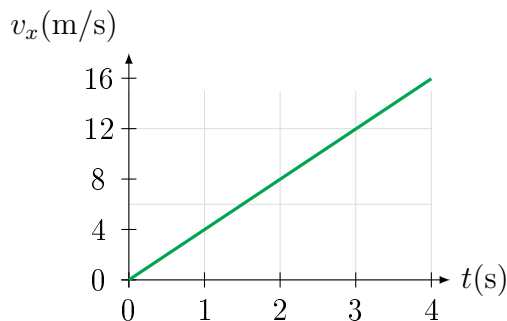
¹<https://tim.jyu.fi/view/kurssit/matematiikka/matikkapakki/etusivu>

²<https://www.jyu.fi/science/fi/fysiikka/opiskelu/suomen-fysiikan-olympiavalmennus/valmennusmateriaalia/fmm.pdf>

³<https://www.youtube.com/watch?v=NFjE1B5zLL8>

sesti, miksi juuri derivaatat ja integraalit ovat oikeita työkaluja kinematiikan tutkimisessa.

1. Hiukkasen paikka ajan funktiona on $x(t) = (-t^3 + 3t)\text{m}$
 - a) Mikä on hiukkasen paikka ja nopeus, kun $t = 2\text{ s}$?
 - b) Piirrä $x(t)$:n ja $v_x(t)$:n graafit välillä $-3\text{ s} \leq t \leq 3\text{ s}$.
2. Allaolevassa kuvaajassa on kiihdytyskilpailuissa ajavan auton nopeus ajan funktiona. Laske auton kulkema matka ensimmäisen kolmen sekunnin aikana
 - a) integroimalla
 - b) geometrisesti



3. Hiukkasen liikettä x -akselilla kuvaa funktio $x(t) = (t^2 - 4t + 2)\text{m}$.
 - a) Hahmottele x :n kuvaaja. Yritä arvioida, missä funktio leikkaa akselit ja funktion käyttäytyminen, kun t kasvaa suureksi. Piirrä tämän jälkeen kuvaaja tietokoneella/laskimella ja vertaa hahmotelmaasi.
 - b) Määritä hiukkasen nopeus ajanhetkellä $t = 1,0\text{ s}$.
 - c) Missä kohdassa hiukkasen liikkeen suunta muuttuu?
 - d) Missä hiukkanen on, kun sen nopeus on $v_x = 4,0\text{ m/s}$?

1.2 Kinematiikka kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa

Katso video Kinematiikka kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa⁴. Tee muistiinpanot, joista käy ilmi, miksi kaksi- tai kolmeulotteinen kinematiikka palautuu yksiulotteiseen kinematiikkaan paikkavektorin komponenttien suhteen.

⁴<https://www.youtube.com/watch?v=bYuwmGIaDrE>

1. Hiukkasen liikettä xy -tasossa kuvaa yhtälöt

$$x = 2t^2 \text{ m}$$

$$y = (5t + 5) \text{ m}$$

Mikä on hiukkasen vauhti ajan funktiona?⁵

2. Purjevene liikkuu itään 5 m/s. Äkillinen tuulenpuuska aiheuttaa veneeseen kiihtyvyyden $\vec{a} = (0,8 \text{ m/s}^2, 40^\circ \text{ pohjoiseen idästä})$. Mikä on veneen nopeuden suunta ja suuruus 6 s myöhemmin, kun tuulenpuuska laantuu?
3. Hiukkasen liikettä kuvaa yhtälöt

$$x = \cos(t)$$

$$y = \sin(t)$$

Hahmottele hiukkasen rata xy -koordinaatistossa. Mikä on hiukkasen nopeus ajan funktiona? Entä kiihtyvyys?

1.3 Heittoliike

Katso opetus.tv:n sivulta Vaino heittoliike ja Angry Birds ainakin video "2. Vainon heittoliikkeen yhtälöt". Kiinnitä huomiota ainakin heittoliikkeessä olevan kappaleen nopeuksien komponentteihin.

1. Pallo heitetään vaakasuoraan 25 m/s ja se lentää 50 m:n vaakasuoran etäisyyden ennen maahan osumista. Kuinka korkealta pallo heitettiin?
2. Lähtönopeudella v_0 ja kulmassa θ vaakatasosta heitetään pallo. Mikä on pallon kantama? (ilman ilmanvastusta)
3. Lähtökulma, jolla saavutetaan suurin etäisyys (ilman ilmanvastusta).
4. Pallon maksimikorkeus h ?

⁵Vihje: Miten nopeuden komponenteista saa vauhdin?

2 Koordinaatistot fysiikassa

Katso Khan Academyn video (englanniksi) johdatus koordinaatistoihin (Introduction to Frames of Reference)⁶. Yritä miettiä erilaisia tilanteita, joissa liikut tasaisella nopeudella. Miltä muut nopeudet näyttävät sinulle, jos tarkastelet nopeuksia pelkästään suhteessa sinuun itseesi?

Toinen hyvä video (englanniksi, dizauvi) Introduction to Reference Frames.

Kun fysiikassa tutkitaan kappaleiden kinematiikkaa ja dynamiikkaa, on analyysiä varten valittava jokin koordinaatisto, jossa nopeusvektorit esitetään. Koordinaatiston valinta riippuu tarkasteltavasta tilanteesta. Koordinaatiston voi esimerkiksi kiinnittää johonkin tasaisesti liikkuvaan kappaleeseen ja tutkia muiden kappaleiden liikettä tässä koordinaatistossa. Tutuin tällainen kiinnitetty koordinaatisto on maan pinta, jonka suhteen lähökohtaisesti ilmoitetaan kaikki nopeudet, joita arkisin mitataan. Tutkittavan kappaleen mukana liikkuvan koordinaatiston lisäksi yleinen valinta on kääntää koordinaattiakseleita siten, että esimerkiksi tutkittavan kappaleen nopeus on x-akselin suuntainen.

Harjoitellaan parin tehtävän avulla koordinaatistojen valintaa.

1. Istut tasaisella nopeudella liikkuvassa autossa. Heität pallon ilmaan ja otat sen kiinni. Mieti, miltä pallon liike näyttää sinulle auton sisällä ja auton ulkopuolella olevalle katsojalle.
2. Laatikko on levossa kaltevalla tasolla. Kirjoita tason laatikkoon kohdistama tukivoima (vektori)
 - a) Koordinaatistossa, jossa x-akseli, y-akseli ja kalteva taso muodostavat suora-kulmaisen kolmion.
 - b) Koordinaatistossa, jossa x-akseli on kaltevan tason suuntainen.
3. Suomessa laskettelurinteiden haastavuutta merkitään siten, että rinteiden kaltevuuskulman kasvaessa rinne on haastavampi⁷. Helpossa rinteessä kaltevuuskulma on korkeintaan 15° , kun taas vaikeissa rinteissä kulma on yli 25° . Mieti, miten valitsit koordinaatiston, kun tehtävänäsi on analysoida laskettelijan kiihtyvyyttä ja

⁶<https://www.youtube.com/watch?v=3yaZ7lkQPUQ>

⁷<https://en.wikipedia.org/wiki/Piste#Ratings>

maksiminopeutta eri kaltevuuksisissa rinteissä?

4. Kaksi palloa törmää täysin kimmoisasti siten, että nopeudet ovat täysin päinvas-
taksiin suuntiin ja vauhdit yhtä suuret. Mieti, miltä törmäys näyttää
 - a) pallojen etäisyyden puolivälissä.
 - b) toisen pallon mukana liikkuvassa koordinaatistossa.
 - c) Entä jos pallot törmäävät vinottain? Miltä törmäys silloin näyttää edellisissä
koordinaatistoissa?

3 Suhteellinen liike

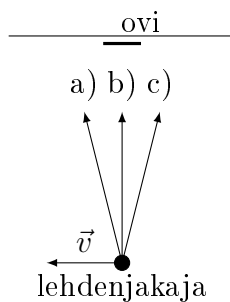
Katso video Galilein muunnos⁸.

Kiinnitä erityistä huomiota siihen, että eri inertiaalikoordinaatistoissa olevat havaitsijat ovat kuitenkin aina samaa mieltä kappaleiden kiihtyvyyksistä. Tämä johtaa siihen, että Newtonin toisen lain mukaan havaitsijat ovat myös samaa mieltä kappaleeseen kohdistu-
vista voimista. Edellisen osion tehtävässä 2 selvitetty voimat aiheuttavat siis molemmissa koordinaatistoissa samansuuruisen kiihtyvyyden laatikkoon.

1. Lentokone lentää itään nopeudella 100 m/s helikopterin ohi, joka lentää pohjoiseen
nopeudella 20 m/s. Mikä on lentokoneen vauhti ja suunta helikopterin lentäjän nä-
kökulmasta?
 - a) Koilliseen, vähemmän kuin 100 m/s.
 - b) Koilliseen, 100 m/s.
 - c) Koilliseen, enemmän kuin 100 m/s.
 - d) Kaakkoon, vähemmän kuin 100 m/s.
 - e) Kaakkoon, 100 m/s.
 - f) Kaakkoon, enemmän kuin 100 m/s.
2. Kärystä, joka liikkuu tasaisella nopeudella vaakasuoralla tasolla, heitetään pallo
suoraan ylöspäin.
 - a) Kun pallo tulee takaisin alas, laskeutuuko se heittäjän eteen, taakse, vai sa-
maan kohtaan kuin heitettäessä? Perustele.
 - b) Muuttuuko vastauksesi, jos kärri on kiihtyvässä liikkeessä? Miksi/miksi ei?

⁸<https://www.youtube.com/watch?v=XxYBojNO0JI>

3. Teette ystäväienne kesken kokeen. Juokset suoraan eteenpäin ja sinua kohti heitetään pallot edestä ja takaa. Miten pallot tulee heittää, että sinun näkökulmastasi ne tulevat sinua kohti yhtä suurilla nopeuksilla?
4. Jaat sanomalehtiä siten, että saat jättää lehdet kotioven eteen. Päätät nopeuttaa jakamista heittämällä lehden polkupyöräsi kyydistä ja yrität tähdätä mahdollisimman lähelle ovea. Jos heität oven kohdalla, pitääkö sinun tähdätä:
 - a) kulkusuuntasi puolelle ovea
 - b) suoraan kohti ovea
 - c) hieman taaksepäin?



5. Veneellä kestää 3 tuntia matkata 30 km alajuoksun suuntaan ja 5 tuntia matkata takaisin. Kuinka nopeasti vesi virtaa joessa?
6. Lentokentällä liukukäytävän ollessa rikki, sinulla kestää 50 sekuntia kävellä portilta hakemaan matkalaukkuasi. Kun liukukäytävä toimii ja käytät sitä kävelemättä sillä, sama matka kestää 75 sekuntia. Kuinka nopeasti matka taittuu, kun kävelet koko matkan ja käytät liukukäytävää?
7. Ajat autolla kohti pohjoista nopeudella 25 m/s vesisateessa ja voit havaita, että vesisade on 38° kulmassa pystysuunnasta. Kun hetken kuluttua ajat kotia kohti päinvastaiseen suuntaan, voit havaita, että vesi putoaakin kohtisuoraan alaspäin. Päättele näillä tiedoilla vesipisaroiden nopeus maahan nähden, suuntana kulma pystytasosta.

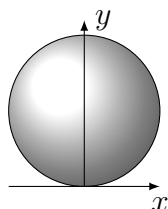
4 Palataan alun pulmaan

Hahmotellaan aluksi hieman tilannetta. Mitä tarkoittaa, että kaikki pisteet, joihin origosta heittämällä voidaan osua saadaan epäyhtälöstä

$$y \leq y_0 - kx^2$$

Miltä tämä alue xy -tasossa näyttää?

1. Hahmottele annettu alue.
2. Mitä ovat vakiot y_0 ja k ?⁹
3. Jos nyt tavoitteena on osua pallonmuotoisen rakennuksen korkeimpaan kohtaan, miltä pallon lentoradat näyttäivät? Hahmottele lentoratoja erilaisilla kulmilla.



4. Eroavatko lentoradat tilanteesta, jossa pallo heitetäänkin rakennuksen katolta? Miltä tällaiset lentoradat näyttäivät?
5. Edellisen johdattelevan kysymyksen perusteella siirrytään tutkimaan tilannetta, jossa pallo lähtee liikkeelle rakennuksen huipulta. Mieti nyt, miltä näyttää sellainen lentorata, jossa lähtönopeus on mahdollisimman pieni, mutta pallo ei osu rakennukseen matkalla maahan.
6. Optimaalinen heitto on siis sellainen, että heitetty pallo sivuaa rakennusta. Tällaisella heitolla voidaan osua mihin tahansa pisteeseen rakennuksen sisällä (miksi?). Toisaalta tähdättävissä olevien pisteiden joukon reunan tulee sivuta rakennusta (miksi?). Siispä optimaalisella nopeudella v_0 heitetyn pallon tähdättävissä olevan alueen reuna $y = y_0 - kx^2$ sivuaa rakennusta. Kirjoita yhtälöpari tämän paraabelin ja rakennuksen leikkauspisteille¹⁰

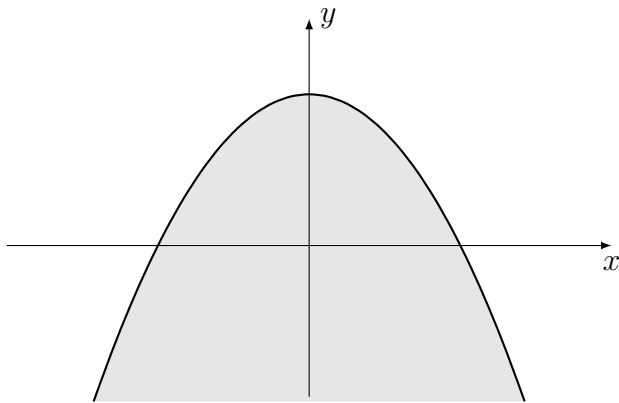
⁹Vihje: y_0 liittyy heiton maksimikorkeuteen, k :ta voi etsiä siten, että tutkii ratoja, joilla heitto osuu mahdollisimman pitkälle x -akselilla.

¹⁰Vihje: Koordinaatisto kannattaa valita siten, että rakennuksen huippu on origossa.

7. Muokkaa yhtälöitä siten, että saat neljännen asteen polynomin (muuttujana x).
8. Milloin tällä neljännen asteen polynomilla on täsmälleen kaksi nollakohtaa? Kirjoita tästä ehto nopeudelle v_0 .
9. Lopullista vastausta varten täytyy muistaa, että nyt tehtävässä tarkastelussa pallo heitettiin rakennuksen huipulta. Ratkaise nyt samalle lentoradalle lähtönopeus maan pinnalta heitettäessä.

4.1 Mallivastaus

1. Epäyhtälö kuvaa paraabelin alapuolelle jääviä pisteitä.



2. Paraabelissa $y = y_0 - kx^2$ vakiotermi on paraabelin ja y -akselin leikkauspisteen y -koordinaatti. Heittoliikettä ajatellen tähän pisteeseen voi osua vain heittämällä suoraan ylöspäin. Suoraan ylöspäin heitetyn heiton maksimikorkeus saadaan selville energian säilymisen avulla

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \iff h = \frac{v^2}{2g} \implies y_0 = \frac{v^2}{2g}.$$

Kertoimen k selvittämiseksi pohditaan heittoa lähtökulmalla 45° . Tämä heitto on sellainen, joka leikkaa x -akselin kaikkein kauimpana origosta. Pallon kantama tällaiselle heitolle on $x = v^2/g$ (ks. tehtävä 1.3.2). Siispä paraabeli $y = y_0 - kx^2$ leikkaa x -akselin pisteissä $\pm v^2/g$, eli

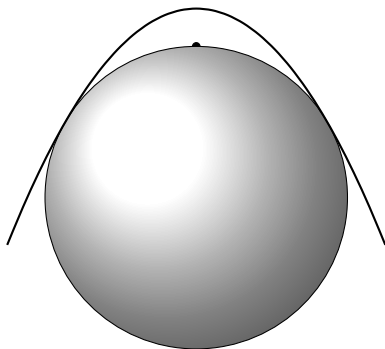
$$y = \frac{v^2}{2g} - kx^2 = 0 \implies \frac{v^2}{2g} = k \left(\frac{v^2}{g} \right)^2 \implies k = \frac{g}{2v^2}.$$

3. Radat riippuvat lähtönopeudesta ja heittokulmasta. On kuitenkin mahdollista löytää aina lentorata, joka sivuaa rakennusta ja osuu rakennuksen huipulle.
4. Newtonin lakien ominaisuus on, että kun ajan suunta käännetään ja voimien suunnat muutetaan päinvastaisiksi, hiukkaset seuraavat samaa rataa. Lentoradat näyttävät siis täsmälleen samoilta.
5. Mahdollisimman pieni lähtönopeus tarkoittaa, että pallon täytyy sivuta rakennusta matkalla maahan. Jos pallo ei sivua rakennusta, samalla lähtökulmalla voi lähtönopeutta pienentää, kunnes pallo sivuaa rakennusta. Jos taas lähtökulma on aluksi 0 ja nopeus sellainen, että pallo ei osu rakennukseen, on mahdollista kasvattaa lähtökulmaa. Tällöin pallo ei edelleenkään osu rakennukseen, joten taas on mahdollista pienentää lähtönopeutta. Optimaalinen lentorata on siis sellainen, jonka lähtökulma on $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ja joka sivuaa rakennusta.
6. R -säteisen ympyrän, jonka keskipiste on $(0, -R)$ yhtälö on $x^2 + y^2 + 2yR = 0$. Kaikki heitot kattavan paraabelin yhtälö on $y = v^2/(2g) - (gx^2)/(2v^2)$.
7. Sijoitetaan paraabelin yhtälön y ympyrän yhtälöön ja saadaan

$$x^4 \left(\frac{g}{2v^2} \right)^2 + x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v^2} \right) + \left(\frac{v^2}{4g} + R \right) \frac{v^2}{g} = 0.$$

8. Nyt optimaaliselle heitonopeus saadaan ehdosta, että ylläolevalla polynomilla on täsmälleen kaksi nollakohtaa, eli että kaikkia ratoja kuvaava paraabeli sivuaa ympyrää kahdessa pisteessä (ks. alla olevaa kuvaa). Tämä ehto on yhtäpitävää sen kanssa, että yllä olevaa yhtälöä vastaavan toisen asteen yhtälön diskriminantti on 0.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v^2} \right)^2 - 4 \left(\frac{g}{2v^2} \right)^2 \left(\frac{v^2}{4g} + R \right) \frac{v^2}{g} = 0 \\ \iff & \left(\frac{g}{2v^2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{gR}{v^2} \\ \implies & \frac{gR}{v^2} = 2 \implies v^2 = \frac{gR}{2} \end{aligned}$$



9. Kun tilanne käännetään siten, että heitto tapahtuu maan pinnalta, täytyy tähän nopeuteen lisätä nopeus, jolla pallo saadaan rakennuksen huipulle. Lisätään siis nopeuteen energian säilymisestä saatava nopeuden neliö $4gR$ ja saadaan

$$v_{min} = \sqrt{v_2 + 4gR} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}}$$

5 Syventävää materiaalia

5.1 Sähkömagnetismia

Liikkuva varaus luo magneettikentän. Toisaalta paikallaan olevalla varauksella on staattinen sähkökenttä. Jos siis varaus liikkuu tasaisella nopeudella ja kiinnitämme koordinaatiston maahan, havaitsemme sekä magneettikentän, että sähkökentän. Jos taas siirrymme varauksen mukana liikkuvaan koordinaatistoon, havaitsemme enää vain sähkökentän. Mistä siis on kyse?

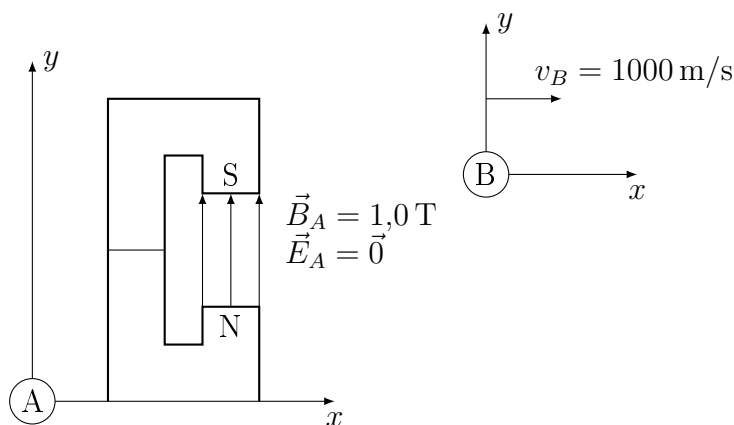
Entäpä siinä tapauksessa, kun varaus liikkuu tasaisella nopeudella homogeenisessa magneettikentässä? Magneettikentässä liikkuvaan varaukseen kohdistuu voima. Toisaalta taas liikkuvan varauksen mukana liikkuvassa koordinaatistossa varaus on paikallaan magneettikentässä, jolloin siihen ei kohdistu voimaa.

Tämä näennäinen paradoksi johtuu siitä, että magneettikentät ja niiden aiheuttamat voimat riippuvat nopeuksista, mutta tähän mennessä olemme oppineet, että nopeus riippuu koordinaatiston valinnasta. Ratkaisu tähän ongelmaan onkin, että sähkö- ja magneettikentät eivät ole toisistaan erillisiä ilmiöitä, vaan ovat saman ilmiön erilaisia ilmentymiä.

Nämä ideat esitellään videolla Galilein kenttämuunnokset¹¹. Videolla johdetaan kenttämuunnokset sähkö- ja magneettikentille toistensa suhteen tasaisella nopeudella liikkuvissa koordinaatistoissa.

5.2 Haastavia tehtäviä

1. Tivolissa on peli, jossa tarkoituksena on liu'uttaa kiekkoa lähes kitkattomalla rampilla siten, että palkinnon saa mikäli kiekko käy vähintään 10 cm:n päässä rampin reunasta menemättä kuitenkaan reunan yli. Työnnät kiekon liikkeelle vauhdilla 5,0 m/s ja päästät irti, kun kiekko on 8,5 m:n päässä rampin reunasta. Kun kiekko on matkannut 3 m, sen vauhti on 4,0 m/s. Saatko palkinnon?
2. Tehokas laboratoriomagneetti on pöydällä siten, että 1,0 T:n suuruinen magneettikenttä osoittaa suoraan ylöspäin. Tutkija lentää laboratorion ohi raketilla 1000 m/s maan pinnan suuntaisesti. Millaiset kentät raketilla lentävä tutkija mittaa magneettin napojen välillä?



3. Lue artikkeli Suurin kiihtyvyys 100 m:n pikajuoksussa¹², jossa perehdytään siihen, miten pikajuoksijan juoksua voidaan mallintaa kinematiikan avulla.
4. Tutustu kysymykseen <https://physics.stackexchange.com/questions/469395/picking-the-right-reference-frame>¹³, jossa pohditaan liikemäärän säilymiseen liittyvää tehtävää. Kysymyksen vastauksessa tehtävä on ratkaistu kolmessa eri koor-

¹¹<https://www.youtube.com/watch?v=PvNeZMoq1DI>

¹²<https://www.wired.com/2012/08/maximum-acceleration-in-the-100-m-dash/>

¹³<https://physics.stackexchange.com/questions/469395/picking-the-right-reference-frame>

dinaatistossa. Eri näkökulmilla päädytään aina samaan ratkaisuun, mutta jostain näkökulmasta tilanne voi olla helpompi hahmottaa, kun taas toisesta näkökulmasta saadaan helpommat laskut.

6 Tehtävien vastaukset

1.1.1 a) Paikan saa sijoittamalla paikan funktioon annetun ajan:

$$x(2) = (-(2)^3 + 3 \cdot 2)\text{m} = (-8 + 6)\text{m} = -2\text{m}.$$

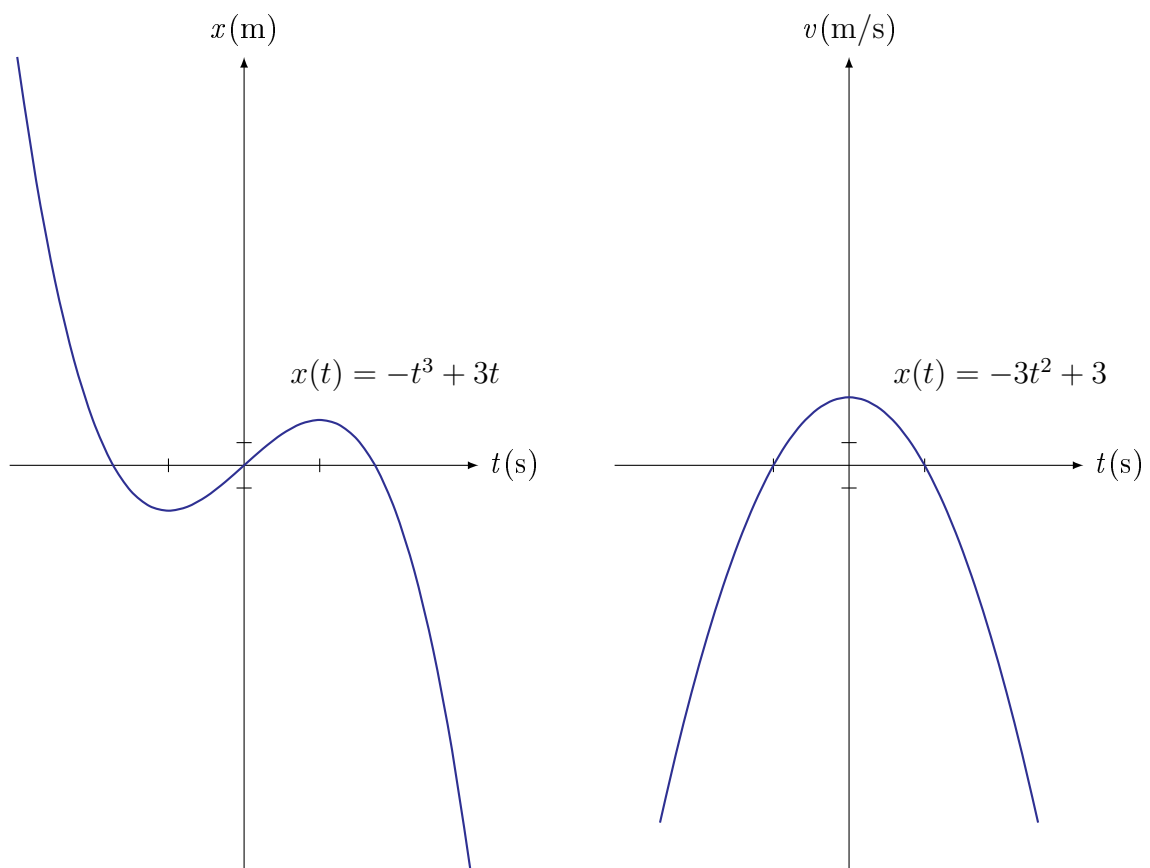
Nopeuden saa paikan derivaatasta:

$$v_x(t) = x'(t) = (-3t^2 + 3)\text{m/s}$$

ja hetkellinen nopeus

$$v_x(2) = (-3 \cdot 2^2 + 3)\text{m/s} = -8\text{m/s}$$

b) Kuvissa y-akselin skaala on pienempi kuin x-akselin.



1.1.2 a) Selvitetään suoran yhtälö:

$$y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0).$$

Suora kulkee origon kautta, joten $x_0 = y_0 = 0$ ja

$$y = \frac{12}{3}x = 4x.$$

Integroidaan suoran yhtälö 0:sta 3:een:

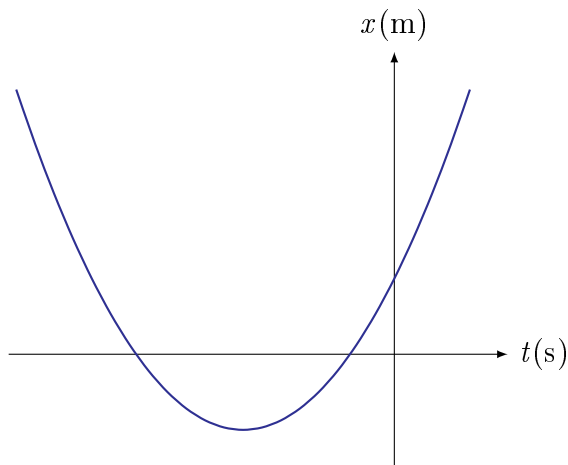
$$\int_0^3 4x dx = \left| 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 \right|_0^3 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0^2 = 18.$$

Siispä siirtymä on 18 m.

b) Kuvasta voi laskea suoraan kolmion pinta-alan

$$x = 3 \text{ s} \cdot 12 \text{ m/s} \cdot \frac{1}{2} = 18 \text{ m}.$$

1.1.3 a) Kuvaajan kulkua voi hahmotella sijoittamalla funktioon pari yksinkertaista arvoa, kuten -1, 0, 1. Tässä tapauksessa lisää vihjeitä saa siitä, että termi t^2 on aina positiivinen ja siitä, että $t^2 > -4t \iff t > 4$ tai $t < -4$. Tämä jälkimmäinenhän viittaa siihen, että ainakin näillä t :n arvoilla x on positiivinen. Tarkemmin funktion kuvaajan kulkua voi tutkia derivaatan avulla, mutta fysiikan tehtävissä on usein hyödyllistä hahmotella nopeasti funktion käyttäytymistä välittämättä tarkoista lukuarvoista.



b) Hiukkasen nopeus saadaan paikan funktion derivaatasta

$$v_x(t) = x'(t) = 2t - 4 \implies v_x(1) = (2 - 4)\text{m/s} = -2\text{m/s}$$

c) Liikkeen suunta muuttuu, kun nopeus vaihtaa merkkiä. Nopeuden nollakohdasta saadaan siis suunnanmuutoksen ajanhetki

$$v_x(t) = 0 \iff 2t - 4 = 0 \iff t = 2.$$

d) Selvitetään, millä ajanhetkellä nopeus on 4m/s.

$$v_x(t) = 2t - 4 = 4 \iff t = 4\text{s}$$

Paikan funktion mukaan

$$x(0) = 2\text{m},$$

eli hiukkanen on 2 metrin päässä origosta (jonka paikan mittaaaja on valinnut.)

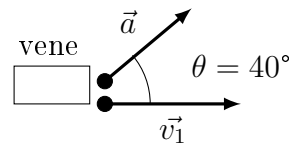
1.2.1 Hiukkasen vauhti on sen nopeuden suuruus. Nopeuden komponentit saadaan derivoimalla paikan funktiot

$$v_x = x' = 4t \quad \text{ja} \quad v_y = y' = 5$$

Nopeusvektorin pituus saadaan pythagoraan lauseella

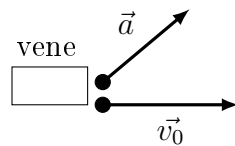
$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(4t)^2 + 5^2} = \sqrt{16t^2 + 25}.$$

1.2.2 Tilanteesta kannattaa piirtää kuva.



Alussa: $x_0, y_0, t_0, v_{0x}, v_{0y}$

Lopussa: $x_1, y_1, t_1, v_{1x}, v_{1y}$



Voimme tut-

kia kiihtyvyyden aiheuttamaa nopeuden muutosta komponenteittain. Kiihtyvyyden komponentit saamme trigonometrialla

$$a_x = (0,8 \text{ m/s}^2) \cos 40^\circ \approx 0,613 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = (0,8 \text{ m/s}^2) \sin 40^\circ \approx 0,514 \text{ m/s}^2$$

Nopeuden komponentit muuttuvat yhtälön $v(t) = v_0 + at$ mukaisesti, joten kuuden sekunnin kuluttua ne ovat

$$v_{1x} = 5,0 \text{ m/s} + 0,613 \text{ m/s}^2 \cdot 6 \text{ s} = 8,68 \text{ m/s}$$

$$v_{1y} = 0 \text{ m/s} + 0,514 \text{ m/s}^2 \cdot 6 \text{ s} = 3,09 \text{ m/s}$$

Nopeuden suunta ja suuruus ovat siten

$$|v| = \sqrt{(8,68 \text{ m/s})^2 + (3,09 \text{ m/s})^2} \approx 9,2 \text{ m/s}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_{1y}}{v_{1x}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{3,09 \text{ m/s}}{8,68 \text{ m/s}} \right) \approx 20^\circ \text{ idästä pohjoiseen.}$$

1.2.3 Hiukkanen on ympyräradalla. Nopeus saadaan paikkavektorin $\vec{r} = \cos(t)\hat{i} + \sin(t)\hat{j}$

derivaatasta

$$\vec{v} = -\sin(t)\hat{i} + \cos(t)\hat{j}$$

ja kiihtyvyys edelleen nopeuden derivaatasta

$$\vec{a} = -\cos(t)\hat{i} - \sin(t)\hat{j},$$

eli ympyräliikessä kiihtyvyys osoittaa ympyrän keskipistettä kohti.

- 1.3.1 Valitaan karteesinen koordinaatisto siten, että heitto tapahtuu origosta x-akselin suuntaan. Nopeuden vaakasuora komponentti on $v_x = 25 \text{ m/s}$. Lasketaan kuinka kauan tällä nopeudella kestää $s = 50 \text{ m:n}$ matka:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{50 \text{ m}}{25 \text{ m/s}} = 2 \text{ s}$$

Lähtönopeuden pystysuora komponentti on alussa 0. Vapaassa pudotuksessa oleva kappale on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä siten, että $a = -g = -9,8 \text{ m/s}^2$ (suunta tässä koordinaatistossa negatiivisen y-akselin suuntaan). Liiketyhtälö y-akselin suunnassa on siten

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \implies y = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}9,8 \text{ m/s}^2(2 \text{ s})^2 = -19,62 \text{ m}.$$

Eli pallo heitettiin noin 20 m:n korkeudelta.

- 1.3.2 Kantama on pallon x-akselin suuntainen matka. Tämä matka saadaan lähtönopeuden x-komponentin ja lentoajan avulla. Lentoaika taas on helpoin määrittää kappaleen pystysuorasta liikkeestä. Lentoaika saadaan määritettyä esimerkiksi siten, että tutkitaan milloin tasaisella kiihtyvyydellä nopeuden y-komponentti on nolla. Tällöin pallo on lentoratansa lakipisteessä. Pallolla kuluu sama aika matkata lakipisteestä maahan, kuin heitosta lakipisteeseen. Kokonaisaika pallon matkalle on siis kaksi kertaa aika heitosta lakipisteeseen. Käytetään liiketyhtälöä y-akselin suunnassa. Lähtönopeuden y-akselin suuntainen komponentti saadaan trigonometrialla

$v_{0y} = |v_0| \sin \theta$. Siispä aika t' , jossa v_{0y} vähenee nollaan, saadaan yhtälöstä

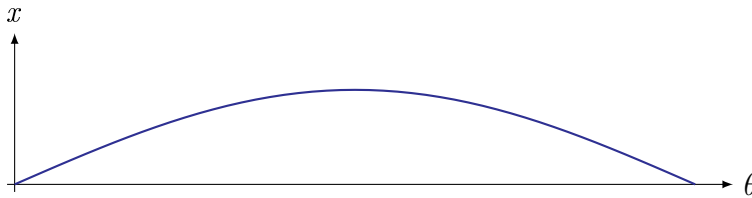
$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} + at' = |v_0| \sin \theta - gt' \\ \Leftrightarrow t' &= \frac{|v_0| \sin \theta}{g} \end{aligned}$$

Joten kokonaisaika $t = 2t' = 2|v_0| \sin \theta / g$. Nyt kantama saadaan pallon x-suuntaisesta liikeyhtälöstä

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}at^2 = |v_0| \cos \theta \cdot t = |v_0| \cos \theta \cdot 2 \frac{|v_0| \sin \theta}{g} = \frac{2|v_0|^2 \cos \theta \sin \theta}{g}$$

Pohditaan hieman tuloksen järkevyyttä. Suuri painovoima tarkoittaa suurta putoamiskiihtyvyyttä, joka pienentää kantamaa. Kantaman riippuvuus lähtökulmasta ei ehkä ole aivan ilmeinen, mutta ainakin jos heittää suoraan ylöspäin, eli $\theta = 90^\circ$, niin kantama on nolla. Tässä on ajateltu, että pallo lähtee liikkeelle aivan maan pinnalta, joten kun lähtökulma on nolla, on myös kantama nolla.

1.3.3 Tarkoitus on siis tutkia, missä kohtaa funktiolla $x(\theta)$ on maksimi. Hahmotellaan ensin funktion kuvaaja. Asetetaan kerroin $2|v_0|^2/g = 2,5$ m.



Funktiolla näyttäisi siis olevan maksimi nollakohtien $\theta = 0^\circ$ ja $\theta = 90^\circ$ puolella välissä. Funktion ääriarvokohdan saa selville tutkimalla sen derivaatan nollakohtaa:

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= \frac{2|v_0|^2}{g} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0 \\ \Leftrightarrow \cos^2 \theta &= \sin^2 \theta \\ \Rightarrow \theta &= 45^\circ, \end{aligned}$$

jossa hyödynnettiin tulon derivoimissääntöä, tulon nollasääntöä ja sitä, että haluttu kulma on välillä $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

1.3.4 Maksimikorkeuden voi selvittää käyttämällä esimerkiksi energian säilymistä. Jälleen voidaan tutkia vain y-suunnassa tapahtuvaa liikettä, jolloin mekaanisen energian säilymisestä saadaan

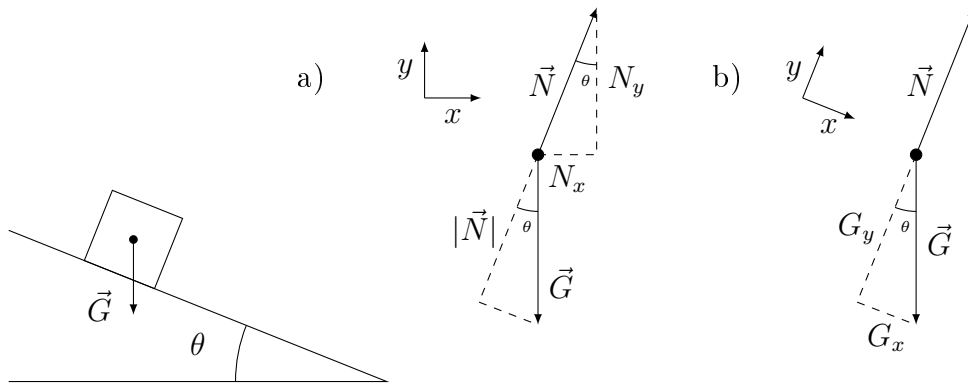
$$\frac{1}{2}mv_{0y}^2 = mgh$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{|v_0|^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

Tätäkin tulosta voidaan arvioida eri lähtökulmilla. Suoraan ylöspäin heitettäessä $\sin(90^\circ) = 1$ saadaan suurin korkeus. Suurempi lähtönopeus nostaa korkeutta ja suurempi putoamiskiihtyvyys pienentää korkeutta.

2.1 Suhteessa sinuun pallo lentää suoraan ylös ja takaisin alas. Liike näyttää siis samalta, kuin jos olisit heittänyt palloa seistessäsi maan suhteen paikoillasi. Sivusta katsojalle pallo piirtää kaaren, koska pallo liikkuu auton mukana. Sivusta katsojalle tilanne vastaa sitä, että pallon nopeuden vaakasuora komponentti on yhtäsuuri kuin auton nopeus ja pystysuora komponentti riippuu heitosta ylöspäin.

2.2 Piirretään vapaakappalekuvat, jotta eri koordinaatistojen erot tulevat paremmin esille.



a)-kohdan koordinaatistossa tukivoimalla $\vec{N}$ on sekä x-akselin, että y-akselin suuntaiset komponentit ja painovoimalla $\vec{G}$ vain y-akselin suuntainen komponentti. b)-kohdassa taas painovoimalla on x- ja y-suuntaiset komponentit ja tukivoimalla vain y-suuntainen komponentti. Jos tehtävänä olisi tutkia tilannetta, jossa laatikko liukuu kaltevalla tasolla, olisi b)-kohdan koordinaatisto huomattavasti parempi valinta. Tässä koordinaatistossa painovoiman x-komponentti olisi liikkeen suuntainen ja

liikeyhtälöstä tulee yksinkertainen, koska laatikko ei liiku y-suunnassa. a)-kohdan koordinaatistolla täytyisi selvittää vielä erikseen tason suuntainen voima ja tässä koordinaatistossa laatikon nopeudella on sekä x-, että y-komponentit.

a) Tukivoiman suuruus $|\vec{N}|$ on nyt pintaa vasten kohtisuora projektio painovoimasta. Trigonometriallla saadaan alemmasta apukolmiosta $|\vec{N}| = \cos \theta |\vec{G}| = \cos(\theta)mg$. Ylemmstä apukolmiosta saadaan nyt tukivoiman komponentit

$$N_x = mg \sin \theta \cos \theta; \quad N_y = mg \cos^2 \theta$$

b) Tässä koordinaatistossa tukivoimalla on ainoastaan y-akselin suuntainen komponentti, joka saadaan trigonometriallla apukolmiosta

$$N_x = 0; \quad N_y = mg \cos \theta$$

2.3 Edellisestä tehtävästä viisastuneena koordinaatisto on lienee syytä valita siten, että x-akseli on rinte suuntainen ja positiivinen suunta rinnettä alas.

2.4 a) Pallojen etäisyyden puolivälissä pallot liikkuvat kohti origoa erisuuntaisilla nopeuksilla.

b) Toisen pallon mukana liikkuvassa koordinaatistossa näyttää siltä, että toinen pallo lähestyy kaksinkertaisella nopeudella edelliseen tilanteeseen verrattuna. Törmäyksen jälkeen pallo etääntyy vastaavasti.

c) Näyttää siltä, että pallot lähestyvät toisiaan hitaammin, mutta edelleen suoraviivaisesti.

3.1 f) Helikopterin lentäjän näkökulmasta kaikkien muiden nopeuksiin lisätään etelän suuntainen komponentti, jonka suuruus on 100 m/s.

3.2 a) Ilman ilmanvastusta pallo laskeutuu samaan kohtaan kuin heitettäessä. Jos tarkastelu tehdään karrin mukana liikkuvassa koordinaatistossa, pallolla on nopeutta pelkästään ylöspäin ja se tulee myös suoraviivaisesti alas.

b) Jos karrin on kiihtyvässä liikkeessä, sen mukana liikkuva koordinaatisto ei ole inertiaalikoordinaatisto. Tässä tapauksessa tarkastelu voi olla helpompi tehdä maan

pintaan kiinnitetyssä paikallaan olevassa koordinaatistossa. Tässä koordinaatistossa pallo saa lähtönopeuden, jonka maanpinnan suuntainen komponentti on sama kuin karryn nopeus heittohetkellä. Kun karry on kiihtyvässä liikkeessä, pallo jää karrystä jälkeen, koska pallon nopeuden maanpinnan suuntainen komponentti ei muutu.

- 3.3 Pallot tulee heittää siten, että takaapäin heitettävän pallon vauhti on suurempi kuin edestäpäin tulevan pallon ja näiden vauhtien erotus on juoksuvauhtisi.
- 3.4 Sillä hetkellä, kun lehti irttaa kädestäsi, sen nopeudella on komponentti etenemissuuntaasi. Lehti siis lentää jonkin verran siihen suuntaan, mihin olet menossa, eli sinun tulee tähdätä hieman taaksepäin.
- 3.5 Valitaan koordinaatisto siten, että vesi virtaa positiivisen x-akselin suuntaan. Merkitään veneen nopeutta veden suhteen v_{pv} , veneen nopeutta maan suhteen v_{pm} ja veden nopeutta maan suhteen v_{vm} . Meidän tulee siis saada selville v_{vm} .

$$\text{Veneen nopeus alavirtaan : } v_{pm} = v_{pv} + v_{vm} = \frac{30 \text{ km}}{3,0 \text{ h}} = 10 \text{ km/h}$$

$$\text{Veneen nopeus ylävirtaan : } v_{pm} = -v_{pv} + v_{vm} = -\frac{30 \text{ km}}{5,0 \text{ h}} = -6,0 \text{ km/h}$$

Nämä yhtälöt voidaan laskea yhteen ja saadaan $2v_{vm} = 4,0 \text{ km/h}$, joten vesi virtaa $2,0 \text{ km/h}$.

- 3.6 Valitaan koordinaatisto siten, että liike tapahtuu pelkästään x-akselin suunnassa. Merkitään matkaa portilta matkalaukulle Δx :llä. Olkoon kävelynopeutesi v , liukukäytävän nopeus u ja nopeutesi, kun kävelet liukukäytävällä $v + u = w$. Täytyy siis saada selville Δt , joka kuluu, kun kävelet liukukäytävää pitkin matkan Δx .

$$\text{Kävellessä : } v = \frac{\Delta x}{50 \text{ s}}$$

$$\text{Seisten liukukäytävällä : } u = \frac{\Delta x}{75 \text{ s}}$$

$$\text{Kävellessä liukukäytävällä : } w = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v + u = \frac{\Delta x}{50 \text{ s}} + \frac{\Delta x}{75 \text{ s}}$$

Jaetaan Δx :llä ja ratkaistaan t :

$$\frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{50 \text{ s}} + \frac{1}{75 \text{ s}} \iff \Delta t = \left(\frac{1}{50 \text{ s}} + \frac{1}{75 \text{ s}} \right)^{-1} \iff \Delta t = 30 \text{ s}$$

3.7 Merkitään autoa, vettä ja maata alaindekseillä a, v, m . Valitaan koordinaatisto siten, että auto liikkuu x-akselin suuntaisesti ja y-akseli osoittaa ylöspäin. Akselien suuntaisia yksikkövektoreita merkitään $\hat{i}, \hat{j}$. Vesisateen nopeus suhteessa maahan on $\vec{v}_{vm} = \vec{v}_{va} + \vec{v}_{am}$, eli veden nopeus suhteessa autoon ynnä auton nopeus suhteessa maahan. Kun ajat pohjoiseen, auton nopeus on $\vec{v}_{am} = (25 \text{ m/s})\hat{i}$ ja veden nopeus suhteessa maahan trigonometrian avulla $\vec{v}_{vm} = -v_v \sin \theta \hat{i} - v_v \cos \theta \hat{j}$, eli sateen nopeus suhteessa autoon on

$$\vec{v}_{va} = \vec{v}_{vm} - \vec{v}_{am} = (-v_v \sin \theta - 25 \text{ m/s})\hat{i} - v_v \cos \theta \hat{j}.$$

Koska autossa istuva havaitsija näkee nyt vesisateen tulevan kulmassa 38° , saadaan vesisateen nopeudesta auton suhteen

$$\frac{-v_v \sin \theta - 25 \text{ m/s}}{v_v \cos \theta} = \tan 38^\circ.$$

Etelään päin ajaessa $\vec{v}_{am} = -(25 \text{ m/s})\hat{i}$ ja $\vec{v}_{vm} = -v_v \sin \theta \hat{i} - v_v \cos \theta \hat{j}$. Siispä

$$\vec{v}_{va} = (-v_v \sin \theta + 25 \text{ m/s})\hat{i} - v_v \cos \theta \hat{j}.$$

Koska nyt vesipisarat putoavat suoraan alaspäin, niin

$$\frac{-v_v \sin \theta + 25 \text{ m/s}}{v_v \cos \theta} = \tan 0^\circ = 0 \implies v_v \sin \theta = 25 \text{ m/s}.$$

Voimme nyt sijoittaa tämän aiempaan lausekkeeseen tangentille

$$\frac{25 \text{ m/s} + 25 \text{ m/s}}{v_v \cos \theta} = \tan 38^\circ \implies v_v \cos \theta = \frac{50 \text{ m/s}}{\tan 38^\circ} = 64,0 \text{ m/s}.$$

Nyt tiedämme vesisateen x- ja y-suuntaiset komponentit maahan kiinnitetyssä koor-

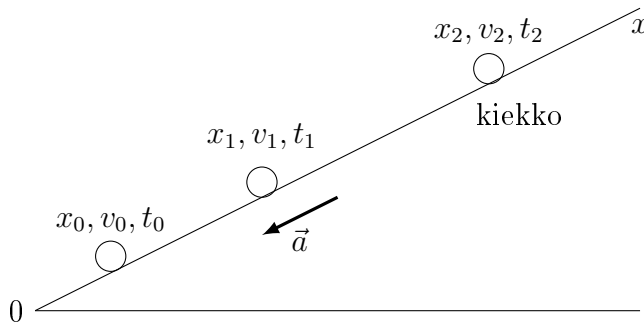
dinaatistossa ja saamme vauhdiksi

$$v_v^2 = (v_v \sin \theta)^2 + (v_v \cos \theta)^2 = (4721 \text{ m/s})^2 \implies v_v \approx 68,7 \text{ m/s}$$

ja kulmaksi

$$\tan \theta = \frac{v_v \sin \theta}{v_v \cos \theta} \implies \theta = 21,3^\circ.$$

5.1 Piirretään kuva tilanteesta.



Tehtävänannosta tunnemme suureet $x_0, t_0, v_0, x_1, v_1, v_2$ ja tehtävänä on löytää x_2 . Kiekon kiihtyvyys on vakio ja voidaan saada selville, kun tiedämme siirtymän ja alku- ja loppunopeudet:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= (v_0 + at)^2 = v_0^2 + 2v_0at + a^2t^2 \\ &= v_0^2 + 2a(v_0t + \frac{1}{2}at^2) = v_0^2 + 2a\Delta x \\ \implies (4,0 \text{ m/s})^2 &= (5,0 \text{ m/s})^2 + 2a(3,0 \text{ m}) \\ \iff a &= -1,5 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Voimme myös määrittää ajan, jossa kiekko pysähtyy

$$v_2 = v_0 + a(t_2 - t_0) \implies 0 \text{ m/s} = 5,0 \text{ m/s} + (1,5 \text{ m/s}^2)t_2 \implies t_2 = 3,3 \text{ s}$$

Nyt voimme käyttää löytämiämme kiihtyvyyden ja ajan arvoja selvittääksemme

kiekon pysähtymispaikan x_2 :

$$x_2 = x_0 + v_0(t_2 - t_0) + \frac{1}{2}a(t_2 - t_0)^2 \quad (1)$$

$$= 0 \text{ m} + (5,0 \text{ m/s})(3,3 \text{ s}) + \frac{1}{2}(-1,5 \text{ m/s}^2)(3,3 \text{ s}) \quad (2)$$

$$= 8,3 \text{ m}. \quad (3)$$

Koska päästit kiekosta irti 8,5 m:n päässä rampin reunasta ja kiekko liikkuu 8,3 m, kiekko jää 0,2 m:n päähän rampin reunasta ja jäät palkinnotta.

5.2 Koordinaatiston B nopeus suhteessa koordinaatistoon A on $\vec{v}_{BA} = 1000\hat{i}\text{m/s}$. Käytetään Galilein kenttämuunnoksia kenttien selvittämiseen koordinaatistossa B. Sähkökentälle

$$\vec{E}_B = \vec{E}_A + \vec{v}_{BA} \times \vec{B}_A = \vec{v}_{BA} \times \vec{B}_A.$$

Voimme käyttää ristitulon laskemiseen oikean käden sääntöä, jolla saamme sähkökentän suunnaksi z -akselin suunnan sivusta ulospäin. Koska raketin nopeus ja magneettikenttä ovat kohtisuorassa toisiaan vasten, tulee ristitulosta

$$\vec{E}_B = v_{BA}B_A\hat{k} = (1000 \text{ V/m})\hat{k}.$$

Samaan tapaan magneettikentälle

$$\vec{B}_B = \vec{B}_A - \frac{1}{c^2}\vec{v}_{BA} \times \vec{E}_A = 1,0 \text{ T}\hat{j}$$

Raketilla lentävät tutkijat mittaavat siis

$$\vec{E}_B = (1000 \text{ V/m})\hat{k} \quad \text{ja} \quad \vec{B}_B = 1,0 \text{ T}\hat{j}.$$