

Jäykän kappaleen dynamiikkaa

Lasse Manninen

26. elokuuta 2021

Tästä materiaalista

Tämä materiaalipaketti liittyy läheisesti lukion fysiikan kurssiin/moduuliin FY05 Jaksollinen liike ja aallot (uusi ja vanha lops). Tasaisen ympyräliikkeen ja normaalikiihtyvyyden käsittelyn yhteydessä voi tätä materiaalia hyödyntämällä käsitellä esimerkiksi kiihtyvään ympyräliikkeeseen liittyviä käsitteitä.

Tämän materiaalin luvut alkavat aiheeseen liittyvällä opetusvideolla, jonka pohjalta vastataan muutama kysymykseen. Tarkoituksena on oppia olennaiset asiat pyörimisliikkeestä ja vierimisestä. Alussa esitellään haastava ongelma, jonka ratkaisemista varten kerrytetään esitietoja. Ongelmaan palataan materiaalin lopussa ja ongelma ratkaistaan tukikysymysten avulla.

Luvuissa 1-6 käsitellään lukion fysiikan näkökulmasta jäykän kappaleen dynamiikkaan liittyviä asioita. Luvussa 1 motivoidaan aiheeseen ja esitellään aiheeseen liittyviä käsitteitä. Luvut 2 ja 3 käsittelevät yleistä pyörimisliikettä. Luku 4 esittelee pyörimisliikkeen perusyhtälön ja hitausmomentin, luku 5 rotaatioenergian ja sen säilymlain ja luku 6 pyörimismäärän ja sen säilymisen.

Luvussa 7 syvennetään aiempien lukujen käsitteitä matemaattisemmalla lähestymistavalla. Luvun 7 esitietoina olisi hyvä olla perustiedot vektoreista, derivaatasta ja integraalista (polynomien integrointi). Lukua 7 ei tarvita alussa esitellyn tehtävän ratkaisemisessa,

Tämä materiaali on lisensoitu Nimeä-JaaSamoin 4.0 Kansainvälinen (CC BY-SA 4.0) -lisenssillä. lasse.m.manninen@gmail.com

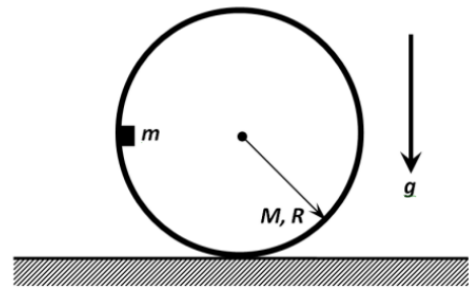
mutta tietojen syventämisestä on hyötyä.

Luvussa 8 ratkaistaan tuetusti alussa esitelty ongelma. Ongelma on ollut osatehtävänä vuoden 2014 kansainvälisissä fysiikkaolympialaisissa (ipho). Materiaalin lopussa on vastaukset tehtäviin.

Lukuihin 2-6 liittyy 1-2 n. 10 minuuttia kestävää videota ja 2-4 tehtävää. Tehtävät ovat käsitteellisiä ja yksinkertaisia laskuja vaativia tehtäviä. Näiden lukujen käsittelyyn on hyvä varata 20-45 minuuttia. Luku 7 on jaettu kolmeen alalukuun, joihin liittyy jälleen 1-2 videota ja pari tehtävää. Nämä videot ovat sisällöltään aiempia haastavia. Yhden luvun 7 alaluvun käsittelyyn on syytä varata 30-45 minuuttia.

Esimerkkisysteemi

Tarkoituksenamme on oppia analysoimaan kuvassa näkyvää systeemiä. Pieni m -massainen kiekko on asetettu onton ohuen sylinterin sisäpinnalle. Sylinterin massa on M ja säde R . Aluksi sylinteri lepää vaakasuoran tason päällä, ja kiekko on korkeudella R tasosta. Tehtävänä on löytää kiekon sylinteriin aiheuttama tukivoima F , kun kiekko saavuttaa ratansa matalimman kohdan. Oletamme, että kiekon ja sylinterin välillä ei ole kitkaa ja että sylinteri vierii liukumatta. Putoamiskiihtyvyys on g .



Tehtävän ratkaisemiseksi tarvitsemme esitietoja jäykän kappaleen pyörimisliikkeestä ja vierimisestä. Tutustumme käsitteisiin kulmakiihtyvyys, normaalikiihtyvyys, vierimisehto, rotaatioenergia, hitausmomentti ja pyörimismäärä. Tutustumme siihen, miten mekaaninen energia säilyy pyörimisliikkeessä ja miten kappaleen muoto vaikuttaa sen vierimiseen.

(Tehtävä on osatehtävä vuoden 2014 kansainvälisistä fysiikkaolympialaisista, ks. IPhO.)

1 Pyörimisliikkeen vastineita lineaariselle liikkeelle

Miksi jäykkien kappaleiden dynamiikkaa tutkitaan ja mitä hyötyä sen osaamisesta on? Pyöriviä kappaleita on toki arjessa ympärillämme (montako keksit?), mutta on myös teknologian sovelluksia, joissa hyödynnetään tässä materiaalissa esiteltäviä käsitteitä. Tuulella tuotettava sähkö tehdään tuulimyllyillä, joiden lavat pyörivät. Navigoinnissa käytetään gyroskooppeja, jotka ovat eräänlaisia hyrriä. Tutkijoita kiinnostaa esimerkiksi molekyyliden pyöriminen tai pyörivien galaksien dynamiikka. Tässä materiaalissa tutustutaan sellaisiin peruskäsitteisiin, joita voi käyttää kaikkien edellä mainittujen systeemien analysoimisessa.

Mitä on jäykän kappaleen dynamiikka? Jäykän kappaleen koko ja muoto ei muutu. Jäykkää kappaleetta kuvaa sen hitausmomentti, joka on pyörimisen vastine massalle lineaarisessa liikkeessä. Hitausmomentti siis kuvaa kappaleen taipumusta vastustaa pyörimisliikkeen muutosta.

Mikä sitten aiheuttaa pyörimisliikkeen muutoksen? Lineaarisessa liikkeessä liiketilan muutoksen aiheuttaa voima. Pyörimisliikkeessä puhumme vääntömomentista. Vääntömomentti pyörittää kappaletta jonkin pyörimisakselin suhteen. Vääntömomentti riippuu sekä voimasta, että siitä mihin kohtaan kappaletta voima vaikuttaa. Pitkä jakoavain mahdollistaa suuremman vääntömomentin kohdistamisen mutteriin.

Pyörimismäärä on pyörimisliikkeen vastine liikemäärälle lineaarisessa liikkeessä. Pyörimismäärä kuvaa siis kappaleen taipumusta pysyä pyörimisliikkeessä. Pyörimismäärä $\vec{L}$ on *vektori*, joka osoittaa pyörimisakselin suuntaisesti. Pyörimismäärän käsitettä voi käyttää esimerkiksi hyrrän **prekession** tutkimiseen.

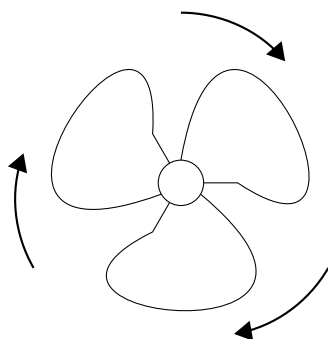
Pyörimisliikkeessä, kuten lineaarisessakin liikkeessä, on säilyviä suureita. Pyörivän kappaleen kineettiseen energiaan kuuluu rotaatioenergia $\frac{1}{2}I\omega^2$. Huomaat jälleen samankaltaisuuden lineaarisen liike-energian kanssa. Muista, että mekaaninen energia säilyy **kitkattomissa** pyörivissä systeemeissä ja pyörimismäärä säilyy **eristetyissä** systeemeissä. Pyörimismäärän kannalta eristetty systeemi on sellainen, johon ei vaikuta ulkoisia vääntömomentteja.

2 Tasaisesti kiihtyvä pyörimisliike ja hitausmomentti

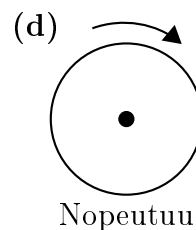
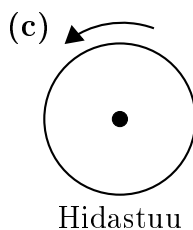
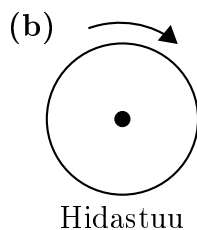
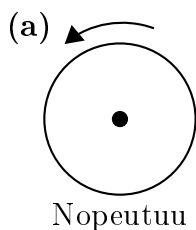
Katso aluksi opetus.tv:n videot tasaisesti kiihtyvä pyörimisliike ¹ . Kirjoita itsellesi samalla muistiinpanot aiheesta. Kirjaa ylös ainakin kulmakiihtyvyyden määritelmä ja pyörimisliikkeen likeyhtälöt.

Vastaa sitten seuraaviin kysymyksiin:

1. Kuvan tuulettimen lapojen pyöriminen hidastuu. Mitkä ovat α :n ja ω :n merkit?



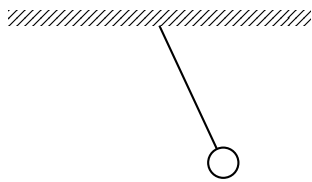
2. Määritä jokaisen kuvan systeemille α :n ja ω :n merkit:



3. Kuvassa on heiluri yhden heilahduksen päätepisteessä.

- a) Onko tässä pisteessä ω positiivinen, b) Onko tässä pisteessä α positiivinen,
negatiivinen vai nolla? Perustele. negatiivinen vai nolla? Perustele.

¹<https://opetus.tv/lukio-ops2016/fysiikka/fy5/tasaisesti-kiihtyva-pyorimisliike/>



4. Karuselli, jonka säde on 5 m, pyörii aluksi siten, että sen jaksonaika 4 s. Se hidastaa ja pysähtyy 20 sekunnissa.

- a) Ennen hidastumista, mikä on karusellin reunalla istuvan lapsen vauhti? b) Kuinka monta kierrosta karuselli pyörii hidastuessaan?

3 Yleisen pyörimisliikkeen kuvaajat

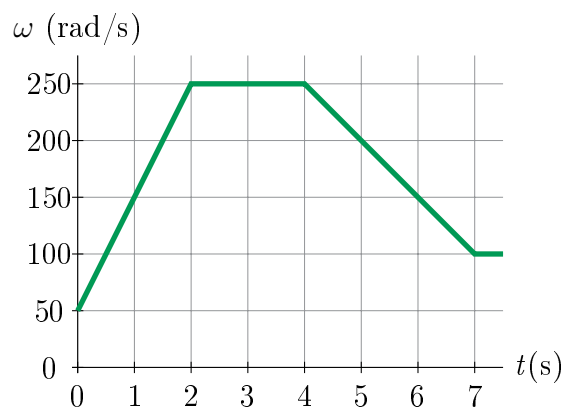
Katso aluksi opetus.tv:n video Yleisen pyörimisliikkeen kuvaajat ². Vastaa sitten seuraaviin kysymyksiin

1. Alla olevassa kuvaajassa on esitetty kampiakselin kulmanopeus ajan funktiona. Mikä on kampiakselin kulmakiihtyvyys ajanhetkillä

a) $t = 1\text{ s}$

b) $t = 3\text{ s}$

c) $t = 5\text{ s}$



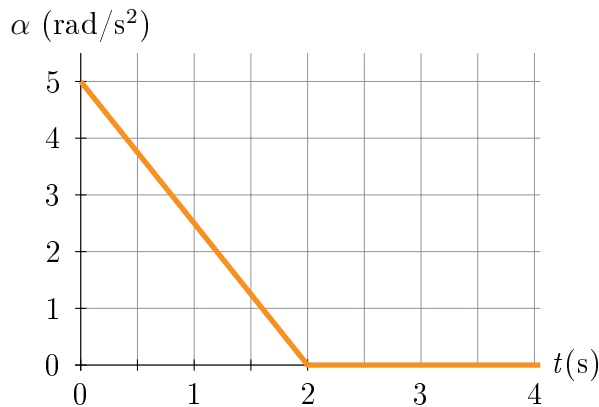
2. Alla olevassa kuvaajassa on esitetty levysoittimen levyn kulmakiihtyvyys ajan funktiona, kun levy lähtee liikkeelle levosta. Mikä on levyn kulmanopeus ajanhetkellä

a) $t = 1\text{ s}$

b) $t = 2\text{ s}$

c) $t = 3\text{ s}$

²<https://opetus.tv/lukio-ops2016/fysiikka/fy5/yleisen-pyorimisliikkeen-kuvaajat/>



4 Pyörimisliikkeen perusyhtälö

Katso aluksi opetus.tv:n videot Pyörimisliikkeen perusyhtälö ³. Kirjoita samalla muistiinpanot, joissa määrittelet hitausmomentin ja esittelet muutamia tärkeitä hitausmomentteja. Hitausmomenttien laskemiseen palataan vielä myöhemmin. Huomaa, että yleensä hitausmomenttia merkitään I :llä, eikä aina J :llä kuten videoilla.

Tee sitten seuraavat tehtävät:

1. Täytyykö kappaleen olla pyörimisliikkeessä, jotta sillä olisi hitausmomentti? Perustele.
2. Homogeenisen sauvan hitausmomentti sen keskipisteen kautta kulkevan pyörimisakselin suhteen on $\frac{1}{12}mL^2$. Samaisen sauvan hitausmomentti sen kärjen kautta kulkevan pyörimisakselin suhteen on $\frac{1}{3}mL^2$. Selitä, miksi hitausmomentti on kärjen suhteen suurempi kuin keskipisteen.
3. Opettajasi antaa sinulle kaksi samankokoista ja samanmassaista palloa. Opettajasi mukaan toinen palloista on ontto ja toinen ei ole. Voitko selvittää, kumpi palloista on ontto leikkaamatta palloja auki? Jos voit, miten? Jos et voi, miksi et?

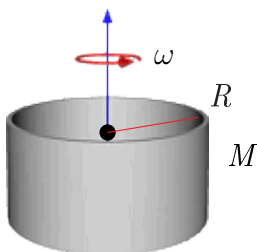
³<https://opetus.tv/lukio-ops2016/fysiikka/fy5/pyorimisliikkeen-perusyhtalo-ja-hitausmomentti/>

5 Rotaatioenergia ja sen säilymlaki

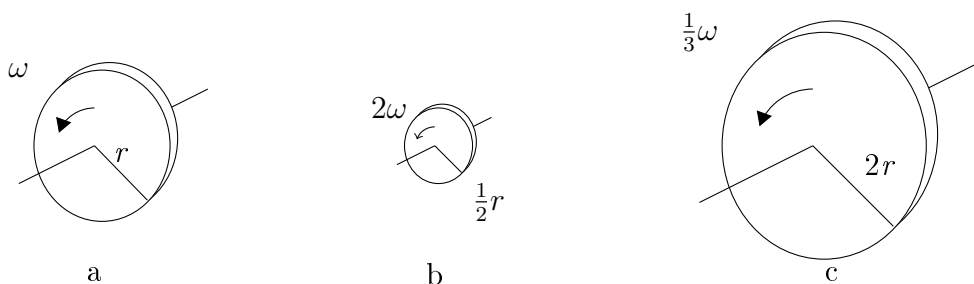
Katso aluksi opetus.tv:n video rotaatioenergia ⁴. Kirjoita samalla itsellesi muistiinpanot, joista käy ilmi ainakin rotaatioenergian määritelmä sanallisesti ja symbolien avulla esitettynä sekä mekaanisen energian säilymlaki.

Tee sitten seuraavat tehtävät:

1. Kiinteä ja ontto sylinteri, joiden molempien säde on R ja massa M , pyörivät keskiakselinsa ympäri samalla kulmanopeudella ω . Kummalla on suurempi kineettinen energia?
 - a) Kiinteällä sylinterillä.
 - b) Ontolla sylinterillä.
 - c) Kineettiset energiat ovat samansuuruiset.
 - d) Kummallakaan ei ole kineettistä energiaa, koska ne ainoastaan pyörivät, eivät liiku.



2. Kuvassa on kolme pyörivää samanmassaista levyä. Laita järjestykseen suurimmasta pienimpään niiden rotaatioenergiat K_a , K_b ja K_c .



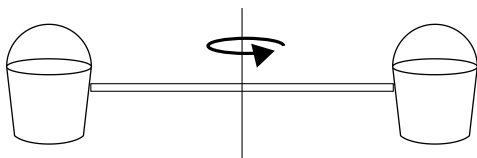
⁴<https://opetus.tv/lukio-ops2016/fysiikka/fy5/rotaatioenergia-ja-mekaanisen-energian-sailyminen/>

6 Pyörimismäärä ja sen säilyminen

Katso aluksi opetus.tv:n videot Pyörimismäärä ja sen säilyminen⁵. Videoilla puhutaan pyörimisliikemäärästä, mutta pyörimismäärä on yleisemmin käytetty termi. Tee samalla muistiinpanot, joista käy ilmi pyörimismäärän määritelmä ja pyörimismäärän säilymislaki.

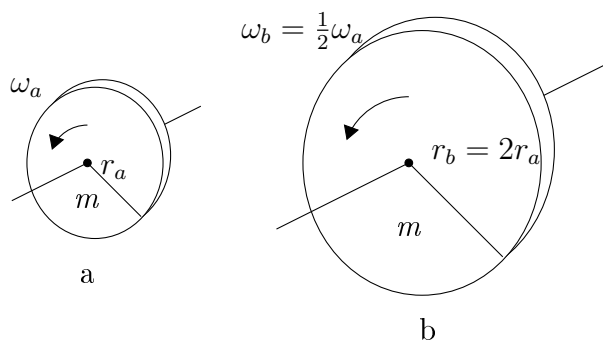
Tee sitten seuraavat tehtävät

1. Kaksi ämpäriä pyörii vaakatasossa ympyrää kitkattoman akselin ympäri. Alkaa sataa. Sateen seurauksena
 - a) Ämpärit jatkavat pyörimistä tasaisella kulmanopeudella, koska sade putoaa pystysuunnassa, kun taas ämpärit pyörivät vaakatasossa.
 - b) Ämpärit jatkavat pyörimistä tasaisella kulmanopeudella, koska yhteenlaskettu mekaaninen energia ämpäri+sade systeemissä säilyy.
 - c) Ämpärien liike nopeutuu, koska sateen potentiaalienergia muuntuu kineettiseksi energiaksi.
 - d) Ämpärien liike hidastuu, koska ämpäri+sade systeemin kokonaispyörimismäärä säilyy.
 - e) Sekä a, että b.
 - f) Ei mikään yllä olevista.



2. Onko kiekon a pyörimismäärä pienempi, yhtä suuri vai suurempi kuin kiekon b? Perustele.

⁵<https://opetus.tv/lukio-ops2016/fysiikka/fy5/pyorimisliikemaara/>



Katso vielä pyörimismäärään liittyvä video Hyrrän prekessio, gyroskooppi, pyörimisliikemäärä ja impulssimomentti⁶.

7 Syventävää materiaalia

Seuraavaksi syvennetään aiempien osioiden käsitteitä ja määritellään ne tarkasti. Videoilla siirrytään sujuvasti summista integraaleihin, mikä on fysiikassa yleistä. Tilavuuden tai massa-alkioiden yli integroimista käsiteltäessä olennaista on, että yksinkertaisissa tapauksissa moniulotteiset integraalit lasketaan laskemalla tuttuja yksiulotteisia integraaleja peräkkäin.

7.1 Johdatus jäykkien kappaleiden tarkasteluun

Katso opi fysiikkaa kanavan video Johdatus jäykän kappaleen tarkasteluun⁷. Tee muistiinpanot, joissa vastaat kysymyksiin

1. Milloin kappaleen muoto täytyy ottaa huomioon sitä mallinnettaessa?
2. Milloin jäykän kappaleen approksimaatiota ei voi käyttää?

Vastaa sitten seuraaviin kysymyksiin

1. Pesäpallomaila leikataan kahteen osaan sen massakeskipisteen kohdalta. Kumpi osa on painavampi?

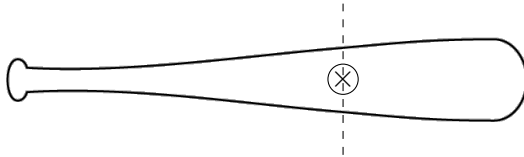
⁶<https://opetus.tv/lukio-ops2016/fysiikka/fy5/hyrravoimat-ja-gyroskooppi/>

⁷<https://www.youtube.com/watch?v=Qk-9RVVBf7o>

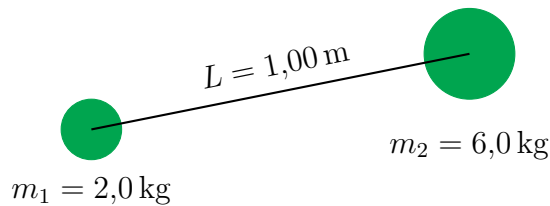
a) Kahvaosa (vasen)

b) Lyöntiosa (oikea)

c) Molemmat osat painavat yhtä paljon.



2. Oheinen kuva esittää massatonta tankoa, jonka päihin on kiinnitetty kaksi (pistemäistä) punnusta. Tangon pituus on 1,00m. Mikä on kappaleen massakeskipisteen etäisyys suuremmasta massasta metreinä?



7.2 Pyörimisliikkeen energia ja hitausmomentti

Katso opi fysiikkaa kanavan video Pyörimisliikkeen energia ja hitausmomentti⁸. Täydennä aiemmin tekemiäsi muistiinpanoja. Miksi pyörimisen kannalta massan jakautumisella kappaleessa on merkitystä?

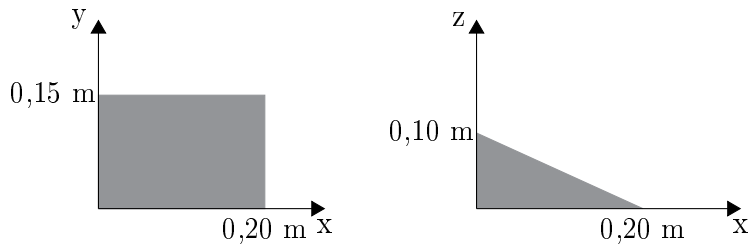
Katso sitten opi fysiikkaa kanavan video Hitausmomentin laskeminen⁹. Yritä laskea videon esimerkit läpi. Seuraavaksi harjoitellaan massakeskipisteen ja hitausmomentin laskemista.

⁸<https://www.youtube.com/watch?v=fIEF92k9nPw>

⁹<https://www.youtube.com/watch?v=hKdwOi4FpGU>

7.2.1 Moniulotteista integrointia

Oheinen kuva esittää teräksistä kiilaa katsottuna ylhäältä päin ja sivusta. Teräksen tiheys on 7860 kg/m^3 .



1. Laske kiilan tilavuus ja massa käyttäen geometriaa.
2. Tämän kappaleen tilavuus voidaan laskea myös lausekkeella

$$V = \int_{y=0}^{y=y_1} \int_{x=0}^{x=x_1} \int_{z=0}^{z=g(x)} dz dx dy,$$

jossa $y_1 = 0,15 \text{ m}$ ja $x_1 = 0,20 \text{ m}$ sekä funktio $g(x) = z_1(x_1 - x)/x_1$, jossa $z_1 = 0,10 \text{ m}$. Laske tämä moniulotteinen integraali integroimalla sisimmästä integraalista ulommaiseen järjestyksessä (eli ensin z :n suhteen, sitten x :n suhteen ja sitten y :n suhteen.)

3. Kiilan massakeskipisteen x -koordinaatti voidaan laskea lausekkeella

$$x_{\text{MKP}} = \frac{1}{M} \int_{y=0}^{y=y_1} \int_{x=0}^{x=x_1} \int_{z=0}^{z=g(x)} x \rho dz dx dy.$$

Laske massakeskipisteen x -koordinaatti.

4. Kiilan hitausmomentti z -akselin suhteen saadaan lausekkeesta

$$I = \int_{y=0}^{y=y_1} \int_{x=0}^{x=x_1} \int_{z=0}^{z=g(x)} (x^2 + y^2) \rho dz dx dy.$$

Laske kiilan hitausmomentti z -akselin suhteen.

7.3 Jäykän kappaleen vieriminen

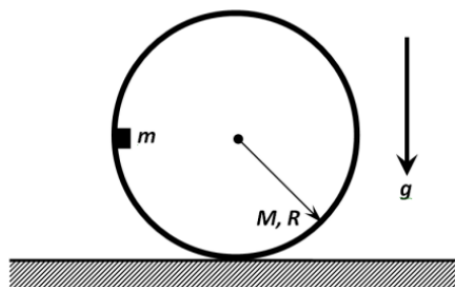
Katso opi fysiikkaa kanavan video Jäykän kappaleen vieriminen¹⁰. Kirjoita muistiinpanot, joista käy ilmi ainakin vierimisehto ja vierivän kappaleen kineettinen energia. Laske videolla esitetyn tilanteen (4:50) kappaleiden vierimiseen kulunut aika.

Tee sitten seuraavat tehtävät

1. Sinulla on erilaisia vieriviä kappaleita, joiden massat ja säteet ovat yhtä suuret. *Totta vai tarua:* Kulmakiihtyvyys samalla kaltevalla tasolla riippuu kappaleen hitausmomentista eikä välttämättä ole sama kappaleillesi.
2. Sinulla on alumiininen umpinainen sylinteri, jonka massa on 128 g ja halkaisija 40,4 mm sekä teräksinen rengas, jonka massa on 132 g, ulkohalkaisija on 40,4 mm ja sisähalkaisija on 36,5 mm. Asetat rampin kaltevuuskulmaan $\theta = 20^\circ$ ja asetat sylinterin ja renkaan rampille korkeudelle 0,15 m. Laske kappaleiden nopeus rampin aläpäässä. Laske myös kappaleiden vierimiseen kulunut aika. Oletetaan vastusvoimat häviävän pieniksi ja että kappaleet vierivät liukumatta.

8 Palataan alun tehtävään

Pieni m -massainen kiekko on asetettu onton ohuen sylinterin sisäpinnalle. Sylinterin massa on M ja säde R . Aluksi sylinteri lepää vaakasuoran tason päällä, ja kiekko on korkeudella R tasosta. Tehtävänämme on löytää kiekon sylinteriin aiheuttama tukivoima F , kun kiekko saavuttaa ratansa matalimman kohdan. Oletamme, että kiekon ja sylinterin välillä ei ole kitkaa ja että sylinteri vierii liukumatta. Putoamiskiihtyvyys on g .



Tarkastellaan tätä tehtävää paloittelemalla se osatehtäviin. Pohditaan kuitenkin aluksi sitä, miten tällaista haastavaa tehtävää voi lähteä tutkimaan ja analysoimaan. Muutamaa vaihtoehtoa kannattaa pysähtyä hetkeksi miettimään: Mikä on se suure, jonka tietämi-

¹⁰<https://www.youtube.com/watch?v=6rVGOKU6Z0s>

sestä olisi tehtävän ratkaisun kannalta eniten hyötyä? Voiko tilannetta yksinkertaistaa ja ratkaista helpomman ongelman? Voiko samoja periaatteita hyödyntää monimutkaisemman ongelman ratkaisemisessa? Tällaiset kysymykset ovat yleisestikin hyödyllisiä matematiikan ja fysiikan ongelmien ratkaisemisessa. Erilaisia kilpailu- ja oppikirjatehtäviä ratkoessa on myös hyvä muistaa, että yleensä tehtäviin on olemassa analyttinen ratkaisu tai jos ei ole, se kerrotaan tehtävänannossa.

Piirrä tilanteesta ensin havainnollistava kuva, josta ilmenee ainakin kiekoon ja sylinteriin vaikuttavat voimat, kun kiekko on liukumassa ala-asentoon ja kun kiekko on ala-asennossa.

Pohdi seuraavia kysymyksiä ennen kuin etenet:

1. Mitkä suureet sinun tarvitsee tietää, jotta saat selville kysytyn voiman F ?
2. Mitkä asiat sinun täytyy tietää, jotta voit saada nämä edelliset suureet selville?
3. Mikä tästä ongelmasta tekee haastavan? Eli minkä tehtävän piirteen voi yksinkertaistaa ja ratkaista helpomman ongelman?
4. Miten ongelma ratkeaisi tällä yksinkertaistuksella?

Seuraavaksi pohditaan sitä, miltä kysymyksen lopputilanne näyttää. Analysoidaan siis tilannetta, jossa kiekko on jo ala-asennossa.

5. Mihin suuntaan kiekon nopeus ja kiihtyvyys osoittavat?
6. Mihin suuntaan sylinterin keskipisteen nopeus ja kiihtyvyys osoittavat?

Yksinkertaisempi ongelma olisi sellainen, jossa sylinteri on kiinnitetty paikalleen. Tässä tilanteessa kiekon nopeus ala-asennossa saadaan suoraviivaisesti energian säilymislailla. Tämä ongelma kannattaa ratkaista ennen etenemistä. Seuraavaksi tutkimme sylinterin liikettä.

7. Kirjoita sylinterin liikeyhtälö käyttämällä Newtonin toista lakia. ¹¹

¹¹Vihje: mieti sylinterin keskipisteen liikettä. Sylinterin keskipiste liikkuu x-akselin suuntaisesti, joten voit tutkia x-suuntaan vaikuttavia voimia.

8. Kirjoita sylinterin kulmakiihtyvyys sylinterin keskipisteen kiihtyvyyden avulla. ¹²

9. Mikä on sylinteriin kohdistuvan kitkavoiman suuruus? ¹³

Seuraavaksi tutkitaan sitä, miten kiekon ja sylinterin kiihtyvyydet liittyvät toisiinsa.

10. Kirjoita kiekon x- ja y-suuntaiset kiihtyvyydet kiekon ja sylinterin välisen tukivoiman avulla.

11. Ratkaise aiemmin tutkimasi sylinterin kiihtyvyys kiekon ja sylinterin välisen tukivoiman suhteen.

12. Saatko nyt kirjoitettua sylinterin keskipisteen x-suuntaisen kiihtyvyyden kiekon x-suuntaisen kiihtyvyyden avulla?

13. Laske kiihtyvyyksistä sylinterin ja kiekon x-suuntaiset nopeudet toistensa suhteen.

¹⁴

Tutkitaan nyt, saammeko kirjoitettua kiekon ja sylinterin x-suuntaiset nopeudet käyttämällä ainoastaan tehtävässä annettuja tietoja.

14. Mitä fysiikan periaatetta voit nyt hyödyntää? ¹⁵

15. Sijoita saamaasi yhtälöön sylinterin kulmanopeus. ¹⁶

16. Ratkaise yhtälöparista nopeudet. ¹⁷

Olemme jo hyvin lähellä ratkaisua. Palautetaan tässä vaiheessa mieleen se, mitä alunperin kysyttiin. Kysymys kuului, mikä on kiekon sylinteriin aiheuttama tukivoima, kun kiekko on ala-asennossa. Jos pohdit aiemmin tämän hetkellisen tilanteen nopeuksia ja kiihtyvyyksiä, totesit että kiekon nopeus on x-akselin suuntainen ja kiihtyvyys suoraan ylöspäin eli sylinterin keskipistettä kohti. Kiekko on siis sylinterin keskipisteen suhteen hetkellisesti ympyräliikkeessä. Sylinteriin taas ei kohdistu tällä hetkellä kokonaisvoimaa x-akselin suuntaan, joten sylinteri on hetkellisesti tähän suuntaan tasaisessa liikkeessä.

¹²Vihje: vierimisehto

¹³Vihje: sylinterin ja tason välinen kitka aiheuttaa vääntömomentin

¹⁴Vihje: Integroi saamasi yhtälö 0:sta t :hen.

¹⁵Vihje: säilymislaki.

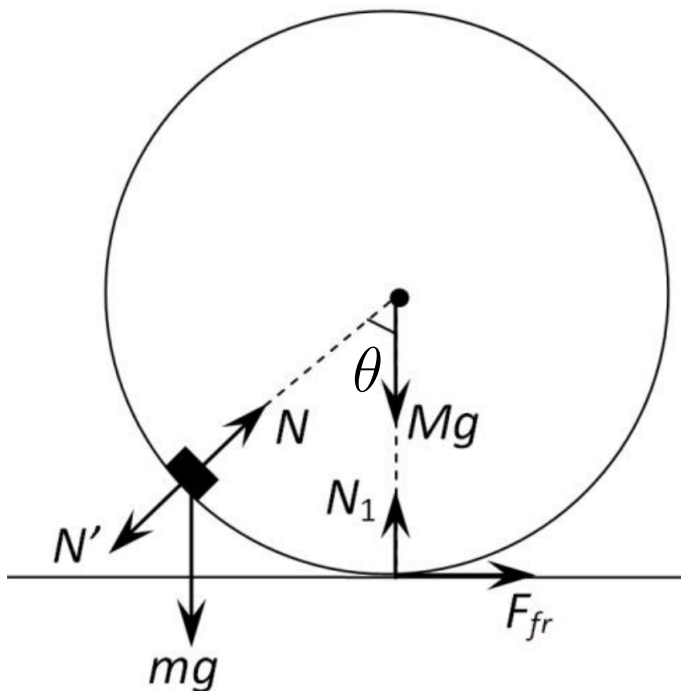
¹⁶Vihje: vierimisehto.

¹⁷Vihje: kysymyksen 12 ja 15 yhtälöt.

Näillä tiedoilla voimme laskea kiekon ratanopeuden suhteessa sylinterin keskipisteeseen ja laskea tutulla tavalla ympyräliikkeessä olevan kappaleen normaalikiihtyvyydestä aiheutuvan voiman.

17. Mikä on kiekon nopeus suhteessa sylinterin keskipisteeseen? ¹⁸
18. Mikä on kiekon normaalikiihtyvyys tässä koordinaatistossa?
19. Mikä on kiekon kiihtyvyys laboratoriokoordinaatistossa (aluksi valitsemassasi koordinaatistossa?) ¹⁹
20. Laske kiekon sylinteriin kohdistama tukivoima.

8.1 Mallivastaus



1. Esimerkiksi kiekon ratanopeus sylinterin keskipisteen suhteen, sylinterin keskipisteen nopeus.

¹⁸Vihje: Galilein muunnos sylinterin keskipisteen mukana liikkuvaan koordinaatistoon.

¹⁹Vihje: Mitä seuraa siitä, että sylinterin kiihtyvyys on hetkellisesti 0?

2. Esim. sylinterin kulmakiihtyvyys ja kulmanopeus.
3. Sylinterin liikkuminen on koko tehtävän juju.
4. Ilman sylinterin liikettä tehtävän voi ratkaista kirjoittamalla kiekolle mekaanisen energian säilymisen ja ratkaisemalla sen avulla kiekon ratanopeuden.
5. Kiekon nopeus on x-akselin suuntainen ja kiihtyvyys y-akselin suuntainen (suoraan sylinterin keskipistettä kohti).
6. Sylinterin keskipisteen nopeus on x-akselin suuntainen ja kiihtyvyys on hetkellisesti 0.
7. $Ma_s = N \sin \theta - F_{fr}$
8. $\alpha = a_s/R$
9. $\tau = I\alpha = F_{fr}R \iff F_{fr} = MR^2 \frac{a_s}{R} \frac{1}{R} = Ma_s$
10. $a_x = N \sin \theta, \quad a_y = N \cos \theta$
11. $Ma_s = N \sin \theta - F_{fr} = N \sin \theta - Ma_s \iff 2Ma_s = N \sin \theta$
12. $2Ma_s = ma_x$
13. $2Mv = mu$
14. Mekaanisen energian säilyminen. $E_{p,kiekko} = E_{k,kiekko} + E_{k,sylinteri} + E_{rot,sylinteri}$, eli

$$mgR = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$
15. $\omega = \frac{v}{R}$
16.

$$u = 2\sqrt{\frac{MgR}{2M+m}}, \quad v = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{MgR}{2M+m}}$$
17. $v_{rel} = u + v$
18. $a_{rel} = v_{rel}^2/R$

19. $a = a_{rel}$, miksi?

20. $F - mg = v_{rel}^2/R$, johon sijoittamalla v_{rel} saamme lopulta

$$F = 3mg \left(1 + \frac{m}{3M}\right)$$

9 Tehtävien vastaukset

Tehtävien vastaukset esiintymisjärjestyksessä.

2.1 Tuuletin pyörii myötäpäivään, jolloin kulmanopeuden sovittu merkki on negatiivinen. Kulmanopeus vähenee, joten kulmakiihtyvyyden merkki on eri kuin kulmanopeuden. $\omega < 0$, $\alpha > 0$.

2.2 a) $\omega > 0$, $\alpha > 0$

b) $\omega < 0$, $\alpha > 0$

c) $\omega > 0$, $\alpha < 0$

d) $\omega < 0$, $\alpha < 0$

2.3 a) $\omega = 0$. Heilurin liike on hetkellisesti pysähtynyt, joten sillä ei ole kulmanopeutta.

b) $\alpha > 0$. Heilurin kulmanopeus on hidastunut, kunnes heiluri pysähtyy ääriasennossa, jolloin heiluri alkaa liikkua toiseen suuntaan. Heilurin kulmanopeus kasvaa, joten heilurin kulmakiihtyvyys on positiivinen.

2.4 a) $r = 5 \text{ m}$, $T = 4 \text{ s}$, $s = 2\pi r = 10\pi$, $v = s/T \approx 8 \text{ m/s}$

- b) Oletetaan, että karusellin pyöriminen hidastuu tasaisesti. Kulmanopeus alussa:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Kulmakiihtyvyys on kulmanopeuden muutos:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Pyörimisliikkeen yhtälön mukaan kiertokulma on

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = \phi_0 + \frac{2\pi}{T} t + \frac{1}{2} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} t^2$$

Kun sijoitamme $\phi_0 = 0$, $\Delta\omega = -\frac{2\pi}{T}$, $\Delta t = t$, kiertokulman lauseke sievenee muotoon

$$\phi(t) = \frac{\pi}{T} t.$$

Kiertokulmasta saadaan kierrosten lukumäärän n jakamalla 2π :llä:

$$n = \frac{1}{2T} t$$

Johon voidaan sijoittaa tunnetut arvot: $T = 4\text{ s}$, $t = \Delta t = 20\text{ s}$. Lopulta saamme

$$n = 2,5.$$

- 3.1 a) Nopeus muuttuu tasaisesti, joten kulmakiihtyvyys saadaan kulmanopeuden kuvaajan kulmakertoimesta: $\alpha = 100\text{ rad/s}^2$.
- b) Kulmanopeus ei muutu. $\alpha = 0\text{ rad/s}^2$.
- c) Kulmakertoimesta $\alpha = -50\text{ rad/s}^2$.
- 3.2 a) Kulmakiihtyvyyden kuvaajasta saadaan kulmanopeus kuvaajan ja x-akselin väliin jäävästä pinta-alasta (integraalista), jonka voi laskea geometrisesti tai integroimalla suoran yhtälöä. $\omega = 3,75\text{ rad s}^{-1}$.
- b) $\omega = 0,5 \cdot 2\text{ s} \cdot 5\text{ rad/s}^2 = 5\text{ rad s}^{-1}$

c) Sama kuin edellisessä kohdassa. Kun kulmakiihtyvyys on nolla, kulmanopeus ei muutu.

4.1 Kappaleen hitausmomentti riippuu siitä, miten kappaleen massa on jakautunut suhteessa johonkin pyörimisakseliin. Kappaleen ei siis tarvitse olla liikkeessä, jotta sillä olisi hitausmomentti, mutta pyörimisakseli tulee valita, jotta hitausmomentin lausekkeen voi määrittää. (Vrt. massa ja liikemäärä.)

4.2 Kauempana pyörimisakselista oleva massa kasvattaa hitausmomenttia. Kun pyörimisakseli on sauvan kärjessä, on sama massa jakautunut suhteessa kauemmaksi akselista kuin silloin, kun pyörimisakseli on sauvan keskikohdassa.

4.3 Jos saat järjestettyä kaltevan tason, voit tutkia kumpi palloista vierii tason alareunaan nopeammin. Miksi tämä kertoo sinulle, kumpi palloista on ontto?

5.1 b) Pyörimiseen liittyvä kineettinen energia riippuu kulmanopeudesta ja hitausmomentista. Molemmilla on sama kulmanopeus, mutta ontolla sylinterillä on suurempi hitausmomentti kuin samankokoisella umpinaisella sylinterillä.

5.2 $K_{rot} = 1/2 I \omega^2$ ja levyn hitausmomentti on $I = 1/2 M R^2$ joten

$$\begin{aligned} K_a &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} M r^2 \omega^2 = \frac{1}{4} M r^2 \omega^2 \\ K_b &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} M \left(\frac{1}{2} r \right)^2 (2\omega)^2 = \frac{1}{4} M \frac{1}{4} r^2 4\omega^2 = \frac{1}{4} M r^2 \omega^2 \\ K_c &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} M (2r)^2 \left(\frac{1}{3} \omega \right)^2 = \frac{1}{4} M 4r^2 \frac{1}{9} \omega^2 = \frac{1}{9} M r^2 \omega^2. \end{aligned}$$

Eli järjestys suurimmasta pienimpään on $K_a = K_b > K_c$.

6.1 d) Ämpäri + sade -systeemiin ei kohdistu kokonaisvääntömomenttia, joten systeemin pyörimismäärä säilyy. Kun ämpäreiden massa kasvaa, kasvaa myös ämpäreiden muodostaman systeemin hitausmomentti, joten kulmanopeuden täytyy pienentyä. Mekaaninen energia ei säily, koska vesipisaroiden törmäykset ämpäreihin ovat epäelastisia.

6.2 Kiekkojen pyörimismäärien suuruudet voidaan laskea

$$|\vec{L}_a| = I_a |\vec{\omega}_a| = \frac{1}{2} m r_a^2 \omega_a$$

ja

$$|\vec{L}_b| = I_b |\vec{\omega}_b| = \frac{1}{2} m (2r_a)^2 \left(\frac{1}{2} \omega_a \right) = m r_a^2 \omega_a.$$

Kiekon b pyörimismäärä on suurempi.

7.1.1 b) Lyöntiosan keskipiste on lähempänä massakeskipistettä kuin kahvaosan. Siispä lyöntiosan täytyy olla painavampi (mieti vääntömomentteja).

7.1.2 Tilannetta kannattaa tarkastella siten, että tanko on x-akselilla ja toinen punnuksesta origossa. Valitaan painavampi punnus origoon ja kevyempi punnus positiivisen x-akselin puolelle. Lasketaan siis massakeskipisteen x-koordinaatti käyttämällä massakeskipisteen määritelmää:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{6 \text{ kg} \cdot 0 + 2 \text{ kg} \cdot 1,00 \text{ m}}{6 \text{ kg} + 2 \text{ kg}} \\ &= \frac{2 \text{ kg m}}{8 \text{ kg}} \\ &= 0,25 \text{ m} \end{aligned}$$

7.2.1 Kiilan muotoisen kappaleen tilavuus:

$$V = \frac{xz}{2} y = \frac{0,20 \text{ m} \cdot 0,10 \text{ m}}{2} \cdot 0,15 \text{ m} = 0,0015 \text{ m}^3$$

Tilavuuden ja tiheyden avulla saamme massan

$$m = \rho V = 7860 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,0015 \text{ m}^3 = 11,79 \text{ kg}.$$

7.2.2 Integroidaan siis. Tarvitsemme vain integroinnin perussääntöjä ja polynomin integrointia. Huomionarvoista on, että nyt x_1 on tunnettu vakio ja x on muuttuja,

jonka yli integroidaan.

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{y=0}^{y=y_1} \int_{x=0}^{x=x_1} \int_{z=0}^{z=g(x)} dz dx dy \\
 &= \int_0^{y_1} \int_0^{x_1} g(x) dx dy \\
 &= \int_0^{y_1} \int_0^{x_1} \frac{z_1(x_1 - x)}{x_1} dx dy \\
 &= \int_0^{y_1} \left[\frac{z_1}{x_1} x_1 x - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{x_1} dy \\
 &= \int_0^{y_1} \frac{z_1}{x_1} \left(x_1^2 - \frac{1}{2} x_1^2 \right) dy \\
 &= \frac{z_1 x_1}{2} y_1 \\
 &= \frac{0,20 \text{ m} \cdot 0,10 \text{ m}}{2} \cdot 0,15 \text{ m} = 0,0015 \text{ m}^3.
 \end{aligned}$$

7.2.3 Integroidaan järjestyksessä

$$\begin{aligned}
 x_{\text{MKP}} &= \int_{y=0}^{y=y_1} \int_{x=0}^{x=x_1} \int_{z=0}^{z=g(x)} x \rho dz dx dy \\
 &= \rho \int_0^{y_1} \int_0^{x_1} \frac{z_1(x_1 - x)}{x_1} x dx dy \\
 &= \rho \int_0^{y_1} \frac{z_1}{x_1} \int_0^{x_1} (x_1 x - x^2) dx dy \\
 &= \rho \int_0^{y_1} \frac{z_1}{x_1} \Big|_0^{x_1} \left(\frac{1}{2} x_1 x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) dy \\
 &= \rho \int_0^{y_1} \frac{z_1}{x_1} \left(\frac{1}{2} x_1^3 - \frac{1}{3} x_1^3 \right) dy \\
 &= \rho \frac{1}{6} z_1 x_1^2 \Big|_0^{y_1} y \\
 &= \frac{1}{6} \rho x_1^2 y_1 z_1 \\
 &= 0,786 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Tulos vaikuttaa järkevältä, koska kiilalla on enemmän massaa lähempänä z-akselia.

7.2.4 Integroidaan jälleen.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{y=0}^{y=y_1} \int_{x=0}^{x=x_1} \int_{z=0}^{z=g(x)} (x^2 + y^2) \rho dz dx dy \\
 &= \rho \int_0^{y_1} \int_0^{x_1} (x^2 + y^2) \frac{z_1(x_1 - x)}{x_1} dx dy \\
 &= \rho \frac{z_1}{x_1} \int_0^{y_1} \left(\frac{1}{12} x_1^4 + \frac{1}{2} y^2 x_1^2 \right) dy \\
 &= \rho \frac{z_1}{x_1} \left(\frac{1}{12} x_1^4 y_1 + \frac{1}{6} y_1^3 x_1^2 \right) \\
 &= 0,167\,025 \text{ kgm}^2 \approx 0,17 \text{ kgm}^2
 \end{aligned}$$

Tätä voidaan verrata vaikka samankokoisen suorakulmion hitausmomenttiin samanlaisen pyörimisakselin suhteen kuin kiilalla (ks. lista hitausmomenteista²⁰)

$$I = \frac{1}{12} m(x_1^2 + y_1^2) + m \left(\sqrt{\frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2)} \right)^2 \approx 0,43 \text{ kgm}^2,$$

joka on jonkin verran suurempi kuin kiilalla, kuten voi odottaa.

7.3.1 Totta. Samalla kaltevalla tasolla kappale, jolla on pienin hitausmomentti saavuttaa suuremman nopeuden nopeammin kuin muut. Koska kappaleilla on samat säteet, tällä kappaleella on myös suurempi kulmakiihtyvyys.

7.3.2 Videolla johdetaan vapaasti vierivän kappaleen kiihtyvyys

$$a_x = \frac{g \sin \theta}{1 + c},$$

jossa c on kappaleen hitausmomenttiin liittyvä kerroin. Nyt rengas on paksuseinäinen, joten kineettistä energiaa kirjoittaessa täytyy olla huolellinen. Renkaan kineet-

²⁰https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_moments_of_inertia

tinen energia on nyt

$$\begin{aligned}K_{\text{rengas}} &= \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{\text{mkp}}^2 \\&= \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)\frac{v_{\text{mkp}}^2}{r_1^2} + \frac{1}{2}mv_{\text{mkp}}^2 \\&= \frac{1}{2}mv_{\text{mkp}}^2 \left(1 + \frac{r_2^2}{r_1^2}\right)\end{aligned}$$

Nyt meillä on siis selvillä

$$c_{\text{sylinteri}} = \frac{1}{2} \quad c_{\text{rengas}} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Massakeskipisteen loppunopeus on

$$v_{\text{mkp}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}}.$$

Tunnetta nyt kiihtyvyyden, alkunopeuden ja loppunopeuden, joten voimme ratkaista vierimiseen kuluvan ajan

$$\begin{aligned}v &= v_0 + at \\ \iff \sqrt{\frac{2gh}{1+c}} &= \frac{g \sin \theta}{1+c} t \\ \iff t &= \sqrt{\frac{2gh}{1+c}} \frac{1+c}{g \sin \theta} \\ &= \sqrt{\frac{2gh(1+c)}{(g \sin \theta)^2}}\end{aligned}$$

Annetuilla arvoilla

$$v_{\text{sylinteri}} = 1,4 \text{ m/s}$$

$$t_{\text{sylinteri}} = 1,6 \text{ s}$$

$$v_{\text{rengas}} \approx 1,3 \text{ m/s}$$

$$t_{\text{rengas}} \approx 1,8 \text{ s.}$$