

LUENTO 4 26.9. (materiaali lähteestä [Haa02] luku 7)

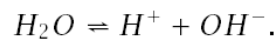
Tavalliset differentiaaliyhtälöt

- yksi muuttuja, esim. aika

Yleisesti: $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$ $\mathbf{y}$ vektori, $\mathbf{f}$ vektoriarvoinen funktio
 $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ alkuarvo

Esimerkki alkuarvotehtävästä

■ **Esimerkki 7.0.1** Veden ionisoituminen noudattaa reaktiota



Olkoot $[H_2O](t)$, $[H^+](t)$ ja $[OH^-](t)$ vesimolekyylien, protonien ja hydroksidi-ionien konsentraatiot (mol/l) hetkellä t . Ionisoitumisnopeus on verrannollinen veden konsentraatioon, ja veden muodostumisnopeus on verrannollinen protonien ja hydroksidi-ionien konsentraatioiden tuloon:

$$\frac{d}{dt}[H_2O](t) = -k_1[H_2O](t) + k_2[H^+](t)[OH^-](t).$$

Kertoimet k_1 ja k_2 ovat reaktionopeusvakioita. Merkitään

$$[H_2O](t) = [H_2O](0) + x(t)$$

$$[H^+](t) = [H^+](0) - x(t)$$

$$[OH^-](t) = [OH^-](0) - x(t).$$

Arvo $x(t)$ on siis poikkeama alkutilasta. Näin saadaan differentiaaliyhtälö

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) = & -(k_1 + k_2([H^+](0) + [OH^-](0)))x(t) + k_2x^2(t) \\ & - k_1[H_2O](0) + k_2[OH^-](0)[H^+](0), \end{aligned}$$

jonka ratkaisu alkuehdolla $x(0) = 0$ kuvaa reaktion kulkua.

Esimerkki reuna-arvotehtävästä

■ **Esimerkki 7.1.2** Tarkastelemme palkkia, jonka toinen pää on tuettu jäykästi ja toinen pää on vapaa. Olkoon l palkin pituus ja $y(x)$ poikkeama kohdassa x mitattuna palkkia pitkin. Tietyin oletuksin kuormitetun palkin poikkeama toteuttaa yhtälön

$$EIy''''(x) = q(x) \quad (7.6)$$

ja reunaehdot

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 0, \\ y''(l) &= 0, \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$y'''(l) = 0. \quad (7.8)$$

Yhtälössä (7.6) q on kuorma, E materiaalin kimmokerroin ja I palkin poikkileikkauksen neliömomentti. Reunaehtojen (7.7) ja (7.8) mukaan palkin vapaaseen päähän ei kohdistu momenttia eikä leikkausvoimaa.

Differentiaaliyhtälön **kertaluku** on korkeimman derivaatan kertaluku

Kertalukua n oleva diff.yhtälö voidaan ratkaista $n:n$ 1. kl:n diff.yhtälön ryhmänä, esim. $n = 2$:

$$y'' = -y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \quad (7.4)$$

Merkitsemme jatkossa $y'(t) = y_1$ ja $y(t) = y_2$, kun argumentti ei ole esityksen kannalta oleellinen. Tehtävä (7.4) voidaan helposti muuntaa ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmäksi. Merkitsemme alkuperäistä muuttujaa $y_1 = y$ ja otamme käyttöön uuden muuttujan $y_2 = y_1'$. Saamme yhtälöryhmän

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_1'' = -y_1, \\ y_1(0) = 0, \\ y_2(0) = y_1'(0) = 1. \end{cases} \quad (7.5)$$

Ratkaisemalla tehtävä (7.4) ensimmäisen kertaluvun ryhmänä (7.5) saamme ratkaisukäyrän y approksimaation y_1 lisäksi derivaatan y' approksimaation y_2 .

Kertalukua n oleva yleinen alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y^{(n)} &= f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(a) &= A_1, \\ y'(a) &= A_2, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(a) &= A_n \end{cases}$$

voidaan helposti muuntaa ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmäksi

$$\begin{cases} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_1(a) &= A_1, \\ y_2(a) &= A_2, \\ &\vdots \\ y_n(a) &= A_n. \end{cases}$$

Ratkaisujen stabiilisuus

Yhtälön stabiilisuus vs. ratkaisumenetelmän stabiilisuus!

Yhtälö on stabiili, jos ”pieni muutos” alkuarvossa aiheuttaa vain ”pienen muutoksen” ratkaisussa $t > 0$.

Esim. yksinkertainen yhtälö $y' = \lambda y$, (λ kompleksiluku)

jonka ratkaisu on $y(t) = y(0)e^{\lambda t}$ ($t \geq 0$)

on *stabiili*, jos kahden ratkaisun $y(t)$, $\mu(t)$ ero mielivaltaisella ajanhetkellä

$$|y(t) - \mu(t)| = |y(0) - \mu(0)| e^{\operatorname{Re}(\lambda)t}$$

pysyy rajoitettuna $\leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$

Yleisesti:

Yleisemmin sanottuna yhtälön

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \quad (7.10)$$

ratkaisu $\mathbf{y}$ kaikilla $t \geq 0$ on

- *stabiili*, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että jokainen yhtälön (7.10) ratkaisu $\hat{\mathbf{y}}$, jolle pätee

$$|\mathbf{y}(0) - \hat{\mathbf{y}}(0)| \leq \delta$$

toteuttaa myös ehdon

$$|\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)| \leq \epsilon$$

kaikilla $t \geq 0$.

- *asymptoottisesti stabiili*, jos se on stabiili ja

$$|\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)| \rightarrow 0,$$

kun $t \rightarrow \infty$.

Voidaan osoittaa, että lineaarisen tehtävän

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$$

ratkaisu on

- stabiili, jos ja vain jos matriisin A kaikki ominaisarvot λ toteuttavat joko ehdon $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ tai ehdon $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ ja λ ei ole defektiivinen (kappale 9.2),
- asymptoottisesti stabiili, jos ja vain jos kaikille matriisin A ominaisarvoille λ pätee $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

■ **Esimerkki 7.1.3** Ongelman

$$y' = -y, \quad y(0) = a$$

ratkaisu $y(t) = ae^{-t}$ on asympotoottisesti stabiili, sillä kaikilla alkuarvoilla a ratkaisu $y(t) \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow \infty$.

Eulerin menetelmä

Alkuarvotehtävä

$$y' = f(t, y), \quad y(a) = y_0.$$

Approksimoidaan ratkaisua välillä $[a, b]$ hilapisteissä

$$t_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad h = (b - a)/N.$$

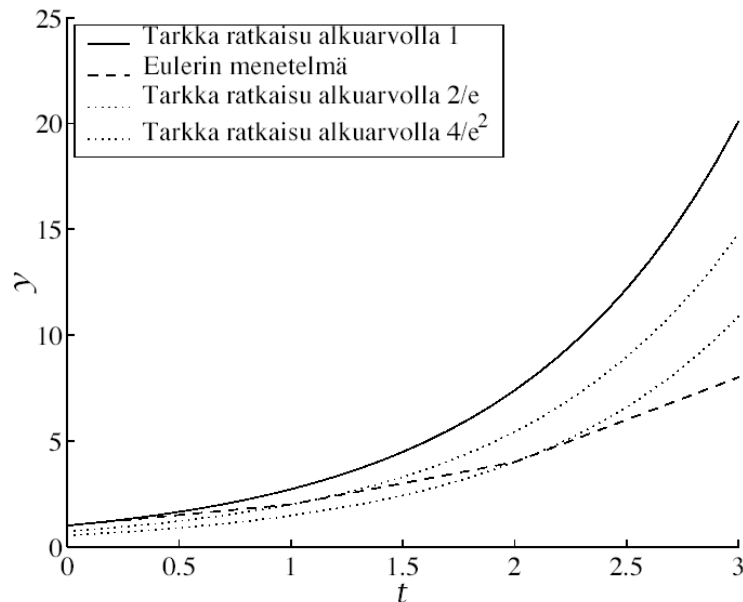
Taylor:

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) &= y(t_k) + hy'(t_k) + \frac{h^2}{2}y''(z_k) \\ &= y(t_k) + hf(t_k, y(t_k)) + \frac{h^2}{2}y''(z_k), \end{aligned}$$

Otetaan vain 1. kl termit $\rightarrow$ Eulerin menetelmä

$$\begin{cases} y(a) = y_0, \\ y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots, N \end{cases}$$

Graafisesti:



Kuva 7.1: Eulerin menetelmässä edetään tangentin suuntaan. Menetelmän aiheuttaman virheen vuoksi derivaatta arvioidaan kuitenkin jollain läheisellä ratkaisukäyrällä oikean ratkaisun sijaan.

Lokaali virhe ja kokonaisvirhe

Eulerin menetelmän ainoa parametri, jota käyttäjä voi muuttaa, on askelpituus h . Valitsemalla askelpituus sopivan lyhyeksi toivotaan, että laskettu approksimaatio eroaa tarkasta ratkaisusta haluttua virherajaa ϵ vähemmän.

Tutkimme seuraavassa Eulerin menetelmässä syntyvää virhettä. Vähennämme tarkan ratkaisun pisteessä t_k muodostetusta Taylorin kehitelmästä (7.12) Eulerin menetelmän (7.13) kaavan, jolloin saamme

$$y(t_{k+1}) - y_{k+1} = y(t_k) - y_k + h[f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_k)] + h^2 y''(z_k)/2, \quad (7.14)$$

missä $t_k < z_k < t_{k+1}$. Yhtälön vasen puoli ilmaisee *kokonaisvirheen* pisteessä t_{k+1} eli tarkan ja lasketun ratkaisun välisen eron. Juuri tätä kokonaisvirhettä yritetään numeerisessa menetelmässä pitää pienenä. Määritellään kokonaisvirhe $\mathbf{e}_k = \mathbf{y}(t_k) - \mathbf{y}_k$.

Paikallinen virhe l_k

$$h^2 y''(z_k)/2,$$

on kertalukua 2 $\rightarrow$ Eulerin menetelmän kertaluku = 1

Virheen kasautumisarvio

$$e_{k+1} = (1 + hf_y)e_k + l_{k+1}.$$

Virheen vahvistuskerroin

$$(1 + hf_y)$$

Stabiilisuuteen vaaditaan $|1 + hf_y| \leq 1$

Esimerkki

Tarkastelemme jälleen testitehtävää (7.9). Eulerin menetelmää soveltamalla saamme

$$y_k = y_{k-1} + h\lambda y_{k-1} = (1 + h\lambda)y_{k-1} = \dots = y(0)(1 + h\lambda)^k.$$

Olkoon nyt $\text{Re}(\lambda) < 0$, jolloin ratkaisut ovat asymptoottisesti stabiileja ja lähestyvät nollaa. Niinpä numeerisen menetelmän antamat approksimaatiot $|y_k|$ eivät saa kasvaa. Eulerin menetelmän tapauksessa on siis vaadittava, että $|1 + h\lambda| \leq 1$.

Numeerisen menetelmän *absoluuttinen stabiilisuusalue* D on se kompleksitason osa D , johon kuuluville luvuille $z = h\lambda$ menetelmä toteuttaa testitehtävää ratkaistaessa

$$|y_{k-1}| \geq |y_k|,$$

kun $k = 1, 2, \dots$. Absoluuttisen stabiilisuusalueen ja reaaliakselin leikkausta kutsutaan menetelmän *absoluuttiseksi stabiilisuusväliksi*.

Eulerin menetelmän absoluuttinen stabiilisuusalue on siis kompleksitason ympyrä

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |1 + z| \leq 1\}$$

ja absoluuttinen stabiilisuusväli on $[-2, 0]$.

Edellä käsiteltiin yksittäistä differentiaaliyhtälöä (7.9). Tarkastellaan seuraavaksi yhtälöryhmää

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

ja oletetaan, että matriisi A on diagonalisoituva. On helppo osoittaa, että Eulerin menetelmä käyttäytyy stabiilisti, jos askelpituus h toteuttaa ehdon

$$h\lambda_1, h\lambda_2, \dots, h\lambda_n \in D,$$

missä $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ovat matriisin A ominaisarvot.

■ **Esimerkki 7.2.1** Tutkimme tehtävän

$$y' = -100y + 100, \quad y(0) = y_0 \quad (7.16)$$

ratkaisemista Eulerin menetelmällä. Ongelman tarkka ratkaisu on

$$y(t) = (y_0 - 1)e^{-100t} + 1.$$

Ratkaisu on selvästi stabiili. Sovellamme Eulerin menetelmää tehtävään, jolloin saamme

$$y_{k+1} = y_k + h(-100y_k + 100) = (1 - 100h)y_k + 100h.$$

Tämän differenssiyhtälön ratkaisu on

$$y_k = (y_0 - 1)(1 - 100h)^k + 1.$$

Olkoon lähtöarvo $y_0 = 2$, tällöin tarkka ratkaisu

$$y(t) = e^{-100t} + 1 \quad (7.17)$$

putoaa nopeasti lähtöarvosta 2 raja-arvoon 1. Approksimaation

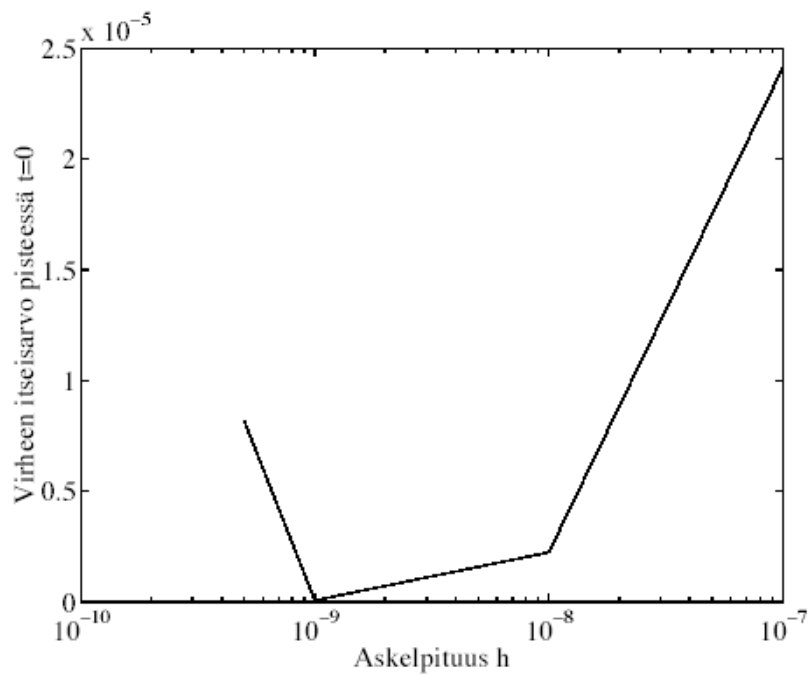
$$y_k = (1 - 100h)^k + 1 \quad (7.18)$$

pitäisi käyttäytyä samoin kuin tarkka ratkaisu (7.17). Kuitenkin jos $h > 0.02$, jono $|y_k|$ lähestyy ääretöntä, kun k kasvaa.

Tehtävälle (7.16) $\lambda = -100$. Niinpä askelpituuden h on toteutettava $h \in (0, 0.02]$, jotta Eulerin menetelmä olisi stabiili.

Pyöristysvirhe vs. algoritmin stabiilisuus

■ **Esimerkki 7.2.2** Ratkaisemme tehtävän $y' = -200ty^2$, $y(-1) = 1/101$ Eulerin menetelmällä eri askelpituuksilla viidentoista numeron tarkkuudella. Kuvassa 7.2 on esitetty poikkeama tarkasta ratkaisusta pisteessä $t = 0$ eri askelpituuksilla. Virhe alkaa kasvaa, kun askelpituutta lyhennetään liikaa.



Kuva 7.2: Virhe alkaa kasvaa, kun askelpituutta lyhennetään liikaa.

Esimerkki: Harmonisen oskillaattorin ja Eulerin menetelmän stabiilisuusanalyysi

Yhteenveto

- **diff.yhtälön kertaluku = korkeimman derivaatan kertaluku**
- **n :nnen $kl:n$ yhtälö voidaan muuttaa $n:n-1$ $kl:n$ yhtälön ryhmäksi**
- **alkuarvotettava vs. reuna-arvotettava**
- **yhtälön stabiilisuus ja ratkaisualgoritmin stabiilisuus ovat eri asioita**
- **algoritmile voidaan usein tehdä suht. yksinkertainen stabiilisuusanalyysi $\rightarrow$ stabiilisuusalue ($z \in \mathbb{C}$) tai stabiilisuusväli ($x \in \mathbb{R}$)**
- **algoritmin kertaluku on p , jos paikallinen (katkaisuvirhe) on kertalukua $p+1$**
-