

Ymmärrä lukion ja yliopiston alkuvaiheen matematiikkaa

Antti Valmari
Jyväskylän yliopisto

23. lokakuuta 2026

	Ohjeita tekoälyn käyttämiseen opiskelun apuna	2
1	Johdanto	4
2	Päättelämisen perusasioita reaaliluvuilla	7
3	Logiikan peruskäsitteitä	67
4	Kokonaisluvuista	96
5	Lisää reaaliluvuista	102
	Kysymysten vastauksia	113
	Hakemisto	123

Ohjeita tekoälyn käyttämiseen opiskelun apuna

Kun tässä kirjassa tulee vastaan vaikeasti ymmärrettäviä asioita, kannattaa pyytää tekoälyä selittämään niitä. Tekoälylle kannattaa antaa linkki tähän kirjaan, jolloin se pystyy antamaan parempia vastauksia. Kirjoittaja on kokeillut tätä Geminin perusversiolla (sillä maksuttomalla perusversiolla, joka on Googlen palveluissa laajasti käytössä) ja saanut hyviä vastauksia.

On kuitenkin muistettava, että tekoäly vastaa silloin tällöin väärin. Jos tekoälyn vastaus vaikuttaa yhtään omituiselta, kannattaa kysyä tarkentavia kysymyksiä ja vaikkapa kopioida mukaan tämän kirjan kohtia. Voit esimerkiksi pyytää tekoälyä selittämään asia askel kerrallaan ja käyttämään analogioita.

Kenties kannattaa kokeilla useampaa kuin yhtä tekoälyä ja valita se, josta tuntuu olevan eniten hyötyä. Vaikuttaa siltä, että jotkin tekoälyt vastaavat kuvailevammin ja suuren yleisön kielellä, ja toiset täsmällisemmin ammattilaisten kielellä. Jälkimmäiset tekevät vähemmän virheitä, mutta niiden vastauksia on vaikeampi ymmärtää, jollei ole alan ammattilainen. Tästä syystä kehittynein tekoäly ei välttämättä ole opettajana paras.

Tekoälyn tällainen käyttö kuluttaa mitättömän vähän luonnonvaroja. (Videoiden teettäminen ja ammattilaistason päättelyiden teettäminen ovat eri asia, niiden turha teettäminen kuluttaa valtavasti luonnonvaroja.)

Kirjassa olevat tehtävät kannattaa teettää tekoälyllä tai tehdä itse sen mukaan, haluatko että tekoäly saa työpaikan, vai haluatko saada sen itse.

Seuraavalla sivulla on Geminin ehdottama ja kirjoittajan muokkaama mallikehote, jota voit käyttää, kun kysyt tekoälyltä apua. Kirjoittajan kokemuksen mukaan paljon vaatimattomampikin kehote riittää, esimerkiksi

Opiskelen kirjasta

https://users.jyu.fi/~ava/ymmarra_matikkaa.pdf

enkä osaa tehtävää 27. Anna minulle vinkki!

Alla on Geminin ehdottama ja kirjoittajan muokkaama mallikehote, jota voit käyttää, kun kysyt tekoälyltä apua. Kehotteen alkuosaa sanaan ”Aloitetaan!” saakka ei tarvitse antaa saman keskustelun aikana uudelleen, vaikka vaihtaisit toiseen tehtävään.

Auta minua oppimaan matematiikkaa ja loogista päättelyä. Opiskelen oppikirjasta, joka löytyy https://users.jyu.fi/~ava/ymmarra_matikkaa.pdf

Kun kysyn sinulta apua kirjan asioihin tai tehtäviin, noudata näitä ohjeita:

1. Huomioi tarkasti kirjan oma tapa määritellä asiat (kuten tilanne, mahdollinen ja mahdoton tilanne, juuri sekä kolmiarvoinen logiikka). Älä käytä yleisiä matemaattisia määritelmiä, jos ne eroavat tämän kirjan käytännöistä.
2. Selitä vaikeat käsitteet tarvittaessa askel kerrallaan ja käytä havainnollistavia analogioita tai käytännön esimerkkejä.
3. Jos pyydän apua harjoitustehtävään, älä anna heti valmista ratkaisua tai mallivastausta. Anna sen sijaan pieni vihje, auta minua pääsemään alkuun tai kysy minulta ohjaava kysymys, jotta voin keksiä ratkaisun itse.
4. Pidä vastauksesi selkeinä, helposti luettavina ja ystävällisinä.

Aloitetaan! Opiskelen tällä hetkellä sivua

[KIRJOITA SIVUNUMERO]

ja lukua

[KIRJOITA LUVUN NUMERO TAI NIMI].

Minun on vaikea ymmärtää seuraavaa kohtaa tai tehtävää:

[KOPIOI TÄHÄN TEKSTIPÄTKÄ TAI HARJOITUSTEHTÄVÄ, JOSTA TARVITSET APUA]

1 Johdanto

Tämä kirja on melko erilainen kuin useimmat yliopistotason matematiikan oppikirjat. Tässä luvussa käsitellään lyhyesti tämän kirjan taustaa ja tavoitteita, annetaan muutama käytännöllinen neuvo ja kerrotaan hieman mistä tämän kirjan esitystapa on peräisin. Koska tekoälyn käyttö opiskelussa on uusi ja kenties jopa ristiriitaisia näkemyksiä herättävä asia, se käsiteltiin erikseen edellä.

Tämän kirjan tausta ja tavoitteet

Tätä kirjoitettaessa vuonna 2026 sekä Suomessa että maailmalla oltiin huolissaan matematiikan osaamistason laskusta. Hyvämaineinen matemaattis-luonnontieteellisiin aineisiin painottunut University of California San Diego oli syksyllä 2024 joutunut ottamaan käyttöön peruskoulun asioita kertaavan matematiikan kurssin [<https://math.ucsd.edu/chair-statement-math-preparedness>]. Uusi opiskelija saattoi lähtötasostaan riippuen joutua suorittamaan jopa kolme matematiikan esitietoja paikkailevaa kurssia.

Samaan aikaan ohjelmistoala oli murroksessa tekoälyn kehityksessä tapahtuneiden läpimurtojen vuoksi. Opiskelijoiden oli vaikea saada työpaikkoja. Oli mahdollista ennustaa tarkasti, mitä osaamista he tulisivat työurallaan tarvitsemaan. Laajasti kuitenkin ajateltiin, että syvällisen ja kokonaisuuksia koskevan ymmärryksen merkitys korostuu, kun teknisten yksityiskohtien hallinta siirtyy koneiden tehtäväksi. Osaamisen tärkeys korostui myös siksi, että valtiovalta kovasti toivoi, että Suomessa kehitettäisiin korkeatasoisia vientituotteita. Jotta se onnistuisi, täytyy osata jotakin kansainvälisesti kilpailukykyisellä tasolla.

Eräs tärkeimmistä matematiikan opettajien järjestöistä katsoo matematiikan osaamisen muodostuvan viidestä toisiinsa kietoutuvasta nauhasta [https://www.nctm.org/uploadedFiles/Advocacy/Advocacy_Toolkit/Mathematical_Proficiency_Five_Strands.pdf]. Jotta alla olevat käännökset eivät olisi pitkiä, on niissä sallittu vivahde-eroja alkuperäiseen, kuitenkin pyrkien säilyttämään keskeisin:

1. käsitteellinen ymmärtäminen (conceptual understanding): yhtenäinen, sovellettavissa oleva ymmärrys matemaattisista asioista
2. laskurutiini (procedural fluency): lasku- ja päättelymenetelmien tuntemus; taito valita tehtävään sopiva menetelmä ja noudattaa sitä joustavasti, huolellisesti ja tehokkaasti
3. strateginen osaaminen (strategic competence): kyky muotoilla matemaattisia tehtäviä ja ratkaista niitä; tietoisuus siitä, että tehtäviä voi lähestyä monella tavalla, ja kyky valita sopiva tapa

4. joustava päättely (adaptive reasoning): kyky ajatella loogisesti asioiden välisiä yhteyksiä; kyky perustella omia laskelmia ja päättelyitä sekä matemaattisesti että intuitiivisesti
5. myötämielinen, eteenpäin pyrkivä asenne (productive disposition): suhtautuminen matematiikkaan mielekkäänä ja hyödyllisenä; usko siihen että määrätietoinen vaivannäkö matematiikan oppimiseksi kannattaa, myös omalla kohdalla.

Tämän kirjan tavoitteena on tuottaa tekniikassa, ohjelmistoalalla ja luonnontieteellisillä aloilla tarvittavia matemaattisia valmiuksia. Tässä yhteydessä valmiudet tarkoittavat sekä yleisimpien näillä aloilla käytettävien matemaattisten menetelmien hallintaa että matemaattis-loogista päättely- ja ongelmanratkaisutaitoa. Kirjassa esitellään matemaattista päättelyä käyttämällä peruskoulun ja lukion matematiikan asioita esimerkkeinä. Siten uudet asiat tulevat pieninä annoksina, ja peruskoulun ja lukion asiat tulevat kerratuiksi sitä mukaa kuin tarvitaan.

Käytännön neuvoja

Osat, joiden otsikon alussa on tähti ”*”, ovat täydentävää tietoa. Niiden osaaminen ei ole välttämätöntä kirjan pääasioiden ymmärtämiseksi.

Matematiikassa käytetään aikaisemmin esitettyjä tietoja vähän väliä. Kun niitä on käytetty useasti, ne jäävät mieleen. Sitä ennen on kuitenkin rasittavaa etsiä uudelleen ja uudelleen vaikkapa mitkä ovat ne tarkat ehdot, joiden vallitessa jonkin johtopäätöksen saa tehdä. Siksi tässä kirjassa on paljon kirjan sisäisiä linkkejä. Sellaisen voi avata uudessa ikkunassa, jolloin voi kätevästi katsoa sen takana olevan tekstin. Avainsana tai symboli, johon linkki viittaa, on pääsääntöisesti sinisellä ja (mikäli mahdollista) kursivoitu, jotta sen löytäisi helpommin linkin takana olevasta tekstistä. Joissakin tapauksissa se on muun värinen siksi, että värillä on osoitettu sen käyttöä osana isompaa kokonaisuutta.

Takaisin siihen näkymään, jota oli lukemassa, pääsee vaikkapa sulkemalla linkistä auenneen ikkunan.

Joissakin PDF-lukijoissa hiiren vieminen tämän kirjan sisäisen linkin päälle näyttää pätkän linkin takana olevaa tekstiä. Se sujuvoittaa opiskelua huomattavasti. Esimerkiksi moni pikkulause tai harjoitustehtävän mallivastaus on niin lyhyt, että näytetty pätkä riittää sen lukemiseen. Voit kokeilla, toimiiko tämä käyttämässäsi PDF-lukijassa siirtämällä hiiren tähän. Siinä on linkki symbolin ”→” selitykseen.

Linkkejä ei kuitenkaan ole jokaisessa paikassa, jossa jotakin sanaa tai symbolia käytetään. Esimerkiksi ” $\Leftrightarrow$ ” (sivu 39) esiintyy satoja kertoja, joten ei olisi tarkoituksenmukaista tehdä jokaisesta esiintymästä linkki. Kirjan lopussa on hakemisto, jota voi käyttää apuna jonkin sanan tai symbolin selityksen etsimiseen silloin, kun siinä tekstin kohdassa, jota on lukemassa, ei ole sille linkkiä.

Tämä kirja on keskeneräinen. Merkintä ??? tarkoittaa, että siihen kohtaan on tarkoitus kirjoittaa lisää tekstiä. Kirjassa voi olla keskeneräisyyttä myös kohdissa, joita ei ole merkitty ???:lla.

Ota oikea asenne

Sinulla on paljon paremmat mahdollisuudet saada hyvä työpaikka, jos osaat jotta-kin hyödyllistä, jota suuri osa työnhakijoista ei osaa. Työnantajat eivät ehkä arvosta matematiikkaa itsessään, mutta he arvostavat loogista ongelmanratkaisutaitoa ja kykyä suorittaa työtehtävä valmiiksi, vaikka siinä olisi tylsiä, vaikeita ja sisukkuutta vaativia vaiheita. Voit harjoitella näitä molempia tekemällä tämän kirjan tehtäviä.

Matematiikan osaamisen tarve ei ole katoamassa, vaan muuttumassa. Määrämuotoisten tehtävien ratkaiseminen mekaanisesti ei enää korostu, sillä tekoäly hoitaa sen puolen. Sen sijaan tarvitaan kykyä soveltaa matematiikkaa monipuolisesti työkaluna monenlaisten käytännön ongelmien ratkaisemiseen. Tarvitaan osaamista siinä, mikä tapahtuu ennen mekaanista laskentaa ja sen jälkeen. Vaikka ongelman ratkaisemisessa käyttäisi tekoälyä, on itse keksittävä, mitä siltä kysyy, ja on itse arvioitava, onko tekoälyn vastaus hyvä vai onko siinä mukana hallusioita.

*** Tämän kirjan laatimisesta**

Tämän kirjan tapa esittää päättelyitä on pitkän tutkimuksen tulos. Tärkeimmät asiaan liittyvät julkaisut ovat Antti Valmari & Mika Hirvensalo: *Towards Practice-Oriented Formal Reasoning Using Three-Valued Logic*, Journal of Applied Logics — IfCoLog Journal of Logics and their Applications, 13(6): 823–860 (November 2026) (pitäisi ilmestyä marraskuussa) ja Antti Valmari & Lauri Hella: *A Completeness Proof for a Regular Predicate Logic with Undefined Truth Value*, Notre Dame Journal of Formal Logic 64(1): 61–93 (February 2023).

Tätä kirjaa kirjoitettaessa käytettiin tekoälyä apuna tietojen etsinnässä sekä asiasisällön, sanaston, mallivastausten ja tekstin luettavuuden tarkastamisessa kohderyhmän näkökulmasta. Tekoälyn kanssa neuvoteltiin, miten opiskelijat voisivat käyttää sitä opiskelun apuna.

2 Päättelämisen perusasioita reaalityluilla

2.1	Valmistelevala esimerkki, muuttuja ja (mahdollinen) tilanne	7
2.2	Puheenaihe, lauseke osineen ja (osittais)funktio	13
2.3	Yhtäsuuruuden lakeja	28
2.4	Päättelyoperaattoreita ja päättelyketjuja	38
2.5	Toisen asteen polynomi ja toisen asteen yhtälö	54
2.6	Reaalitylukujen suuruusjärjestys	55

Tässä luvussa tutustutaan päättelämisen tärkeimpiin perusasioihin käyttäen esimerkkeinä yhtälöitä, yhtälöpareja ynnä muuta sellaista. Lukijalla oletetaan olevan jonkinlainen käsitys yksinkertaisimpien yhtälöiden ratkaisemisesta, mutta mikään mestari hänen ei tarvitse olla. Jotta teksti ei olisi liian abstraktia, osaa asioista ei esitetä täydessä yleisyydessään vaan rajoitettuina lukujen maailmaan. Toisinaan asian A selittäminen vaatii että asiasta B on jo kerrottu jotakin ja B puolestaan tarvitsee jotakin tietoa C:stä, mutta C:stä ei voi puhua ennen kuin tiedetään mikä on A. Sellaisissa tapauksissa jostakin asiasta kerrotaan vain osa ja luvataan, että loput kerrotaan myöhemmin.

2.1 Valmistelevala esimerkki, muuttuja ja (mahdollinen) tilanne

Tässä alaluvussa esitellään muutama matemaattinen peruskäsite yksinkertaisen esimerkin ja sen muunnelmien avulla.

Muuttuja, tilanne ja juuri

Aloitamme koulumaisella esimerkillä.

Esimerkki 2.1 Juoksija ja pyöräilijä ovat lähtöviivalla paikoillaan. Juoksija lähtee juoksemaan vauhtinaan 3 metriä sekunnissa. Kun hän on edennyt 160 metriä, pyöräilijä lähtee hänen peräänsä ja etenee 5 metriä sekunnissa. Kuinka monta sekuntia ajettuaan pyöräilijä saa juoksijan kiinni?

Ratkaisu. Merkitsemme pyöräilijän lähtöhetken jälkeen kulunutta aikaa kirjaimella t . Juoksijan kulkema matka ajanhetkellä t on $160 + 3t$ metriä ja pyöräilijän kulkema matka ajanhetkellä t on $5t$ metriä. Pyöräilijä saa juoksijan kiinni, kun nämä matkat ovat yhtäsuuret, eli $160 + 3t = 5t$.

Vähentämällä vasemmalta puolelta $3t$ saadaan $160 + 3t - 3t$. Siinä $3t$ ja $-3t$ kumoavat toisensa, joten jäljelle jää 160. Vähentämällä oikealta puolelta $3t$ saadaan $5t - 3t$. Se tuottaa $2t$. Olemme johtaneet $160 = 2t$.

Jakamalla kumpikin puoli kahdella saadaan vasemmalta puolelta $\frac{160}{2}$ eli 80 ja oikealta puolelta $\frac{2t}{2}$ eli t . Olemme johtaneet $80 = t$.

Sanomalla sama toisinpäin saadaan $t = 80$. Vastaus on siis: 80 sekuntia.

Lopputuloksen testaaminen. Juoksijan ajanhetkellä $t = 80$ kulkema matka on $160 + 3t = 160 + 3 \cdot 80 = 160 + 240 = 400$ metriä ja pyöräilijän kulkema on $5t = 5 \cdot 80 = 400$ metriä. Täsmää! $\square$

Kutsumme viimeistä vaihetta ”testaamiseksi” eikä ”tarkastamiseksi”, koska se tarkastaa lopputuloksen vain osittain. Se tarkastaa, että vastaukseksi saatu luku toteuttaa yhtälön, mutta ei tarkasta, onko olemassa muitakin lukuja, jotka toteuttavat sen. Siitä huolimatta saatu luku kannattaa testata sijoittamalla yhtälöön, koska se on pieni vaiva ja paljastaa ison osan virheistä. ??? Tulemme myöhemmin esittämään lisää keinoja testata vastauksia.

Esimerkki 2.2 Maali on 1 000 metriä lähdöstä. Esimerkin 2.1 juoksija juoksee ja pyöräilijä pyöräilee sinne saakka. Ensin maaliin ehtivä jää sinne paikalleen kunnes toinenkin saapuu sinne. Sitten he lähtevät yhdessä jäätelölle. $\square$

1. Milloin esimerkin 2.2 juoksija saapuu maaliin? Ilmaise vastaus t :n arvona.
2. Milloin esimerkin 2.2 juoksija lähti liikkeelle? Ilmaise vastaus t :n arvona.
3. Kumpi ehtii ensin maaliin? Miten sen voi päätellä ilman että ratkaistaan yhtään yhtälöä lisää?

Esimerkissämme t on *muuttuja* eli sen edustama luku voi vaihdella sen mukaan, mistä kulloinkin puhutaan. Pyöräilijän lähtöhetkellä $t = 0$ ja kohtaamishetkellä $t = 80$. Kun $t = 100$, on juoksija edennyt 460 metriä ja pyöräilijä 500 metriä.

Edellä esiintyi vain yksi muuttuja, mutta niitä voi olla myös useita. Voimme esimerkiksi kysyä, kuinka kaukana juoksija oli maalista silloin, kun pyöräilijä saapui sinne. Jos otamme käyttöön muuttujan m edustamaan kysyttyä matkaa, niin kyseisellä ajanhetkellä $160 + 3t + m = 1\,000$ ja $5t = 1\,000$.

Käytämme sanaa *tilanne* (*state*) tarkoittamaan mitä tahansa käytössä olevien muuttujien arvojen yhdistelmää. Tilanteen voi kätevästi ilmoittaa muodossa

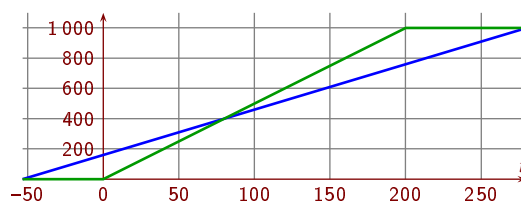
$$\text{muuttuja}_1 = \text{arvo}_1 \wedge \text{muuttuja}_2 = \text{arvo}_2 \wedge \cdots \wedge \text{muuttuja}_n = \text{arvo}_n$$

missä jokainen käytössä oleva muuttuja esiintyy täsmälleen kerran. Esiintymisjärjestyksellä ei ole väliä. Symbolin ” $\wedge$ ” voi lukea ”ja”. Ilmaus ” $\text{muuttuja}_1 = \text{arvo}_1 \wedge \text{muuttuja}_2 = \text{arvo}_2 \wedge \cdots \wedge \text{muuttuja}_n = \text{arvo}_n$ ” tarkoittaa, että jokainen väitteistä ” $\text{muuttuja}_1 = \text{arvo}_1$ ”, ” $\text{muuttuja}_2 = \text{arvo}_2$ ”, ..., ” $\text{muuttuja}_n = \text{arvo}_n$ ” on tosi.

Laajennetun esimerkkimme tapauksessa $t = 1 \wedge m = 2$ on yksi tilanne, $t = 1 \wedge m = 3$ on toinen tilanne, ja $t = 200 \wedge m = 240$ on kolmas tilanne.

Tilanteen ei tarvitse toteuttaa ratkaistavaa yhtälöä, yhtälöparia, epäyhtälöä tai muuta sellaista. Siihen tarkoitukseen käytettävä sana on *juuri* (*root*). Siis ”juuri” tarkoittaa tilannetta, joka toteuttaa ratkaistavan yhtälön tai muun sellaisen.

4. Laajennetulla esimerkillämme on täsmälleen yksi juuri. Mikä se on?



Kuva 1: juoksijan (sininen) ja pyöräilijän (vihreä) etäisyys lähdöstä t :n funktiona

Jos jätetään ”silloin, kun pyöräilijä saapuu maaliin” pois ja siis kysytään vain ”kuinka kaukana juoksija on maalista”, niin yhtälö ” $5t = 1000$ ” jää pois ja jäljelle jää vain yhtälö ” $160 + 3t + m = 1000$ ”. Sillä on äärettömän monta juurta, esimerkiksi $t = 0 \wedge m = 840$, $t = 100 \wedge m = 540$, $t = 200 \wedge m = 240$ ja $t = 280 \wedge m = 0$.

Päättele tapahtuu usein oletusten alaisuudessa

Kysymys ”missä pyöräilijä oli silloin, kun juoksija oli edennyt 70 metriä” nostaa esiin uuden ilmiön. Sitä vastaava ajanhetki on $t = -30$ sekuntia, koska -30 on ainoa luku, jolle $160 + 3t = 70$ on tosi. Edellä sanottiin, että pyöräilijän kulkema matka on $5t$ metriä. Sijoittamalla siihen $t = -30$ saadaan vastaukseksi -150 metriä. Se olisi oikein, jos pyöräilijä olisi kulkenut samalla vauhdilla samaan suuntaan siitä saakka, kun juoksija lähti liikkeelle, ohittaen juoksijan lähtöpaikan kun juoksija oli edennyt 160 metriä. Mutta tehtävän mukaan pyöräilijä ei silloin ohittanut juoksijan lähtöpaikkaa, vaan lähti itsekin liikkeelle siitä.

Vika on siis siinä, että lauseke $5t$ kuvaa pyöräilijän sijainnin oikein vain sen aikaa, kun hän etenee lähdöstä maaliin. Olemme laatineet tapahtumista matemaattisen mallin, jonka mukaan pyöräilijän sijainti on $5t$ ja juoksijan sijainti on $160 + 3t$. Tämä malli ei ole pätevä silloin, kun juoksija on edennyt vain 70 metriä.

Hyvin usein on mahdotonta tai ainakin hankalaa tehdä matemaattisesta mallista niin hyvä, että sen pätevyydellä ei ole rajoja. Siksi matemaattiset mallit kannattaa yrittää laatia siten, että niiden pätevyysalueet riittävät niihin tarkoituksiin joita varten ne laadittiin. Laskujen lopputuloksista kannattaa tarkastaa sekä ovatko ne mallin kannalta oikein (esimerkiksi toteuttaako saatu vastaus yhtälön) että osuvatko ne pätevyysalueelle (esimerkiksi osuuko vastaus aikaväliin, jolloin pyöräilijä liikkui).

5. Kuinka kaukana pyöräilijä oli maalista silloin, kun juoksija saapui sinne?

Kuvassa 1 on näytetty juoksijan (sininen) ja pyöräilijän (vihreä) etäisyys lähdöstä sinä aikana kun juoksija juoksee, ottaen huomioon, että ennen liikkeelle lähtöään pyöräilijä oli paikallaan lähtöpaikalla ja maaliin saavuttuaan pyöräilijä jäi paikalleen. Ilmaus ” t :n funktiona” tarkoittaa tässä, että vaaka-akselilla on t eli pyöräilijän lähtöhetkestä kulunut aika, ja pystyakselilla on etäisyys lähdöstä kunakin vaaka-akselin mukaisena ajanhetkenä.

Juoksijan etäisyys lähdöstä on tässäkin mallissa koko ajan $160 + 3t$, mutta pyöräilijän etäisyys lähdöstä on 0 kun $t < 0$, $5t$ kun $0 \leq 5t \leq 1000$, ja 1000 kun $5t > 1000$. (Kohta kerrotaan, miksi tässä lukee " $0 \leq 5t \leq 1000$ " eikä " $0 \leq t \leq 200$ ".) Emme piittaa siitä, että tosielämässä juoksija ja pyöräilijä eivät pysy lähtemään liikkeelle ja pysähtymään silmänräpäyksessä eivätkä pysty pitämään vauhtiaan tarkasti ilmoitetun suuruisena. Tällä varauksella malli on pätevä kun $0 \leq 160 + 3t \leq 1000$. Tämäkään malli ei ole pätevä enää, kun juoksija ja pyöräilijä menevät yhdessä jäätelölle.

Mallin pätevyysalue on edellä ilmoitettu muodossa " $0 \leq 160 + 3t \leq 1000$ " eikä esimerkiksi muodossa " $-53\frac{1}{3} \leq t \leq 280$ " siksi, että ensin mainittu vastaa suoraan lähtötietojen ilmausta "sinä aikana kun juoksija juoksee", joten sen voi kirjoittaa heti kun on todettu, että juoksijan sijainnin ilmaisee $160 + 3t$. Jälkimmäisen voi kirjoittaa vasta myöhemmin, sitten kun ensimmäinen on kirjoitettu ja siitä on ratkaistu t . Samasta syystä pyöräilijän sijainnin vaihtuminen $5t$:stä 1000:ksi on ilmoitettu tapahtuvaksi kun $5t = 1000$ eikä kun $t = 200$. Sen sijaan se, että 0 vaihtui $5t$:ksi kun $t = 0$ ei edellyttänyt t :n ratkaisemista, koska se määräytyy suoraan siitä, että t valittiin edustamaan aikaa alkaen pyöräilijän lähtöhetkestä.

Tämän mallin pätevyysalue riittää muun muassa seuraavan tehtävän ratkaisemiseen.

Esimerkki 2.3 Milloin esimerkin 2.2 juoksija on täsmälleen 100 metriä pyöräilijän edellä?

Ratkaisu. Päättely jakautuu kolmeen tapaukseen seuraavasti.

Jos ollaan pyöräilijän sijainnin 0 pätevyysalueella eli $t < 0$, niin vastaus saadaan ratkaisemalla yhtälö $160 + 3t = 0 + 100$. Sen juuri on $t = -20$. Se toteuttaa ehdon $t < 0$. Lisäksi t :n on oltava koko mallin pätevyysalueella. Sekin toteutuu, sillä $0 \leq 160 + 3t \leq 1000$ kun $t = -20$, koska $160 + 3 \cdot (-20) = 100$. Niinpä $t = -20$ on koko tehtävän juuri. Äsken laskemamme $160 + 3 \cdot (-20) = 100$ on juoksijan sijainti juuren ilmaisemalla hetkellä, joten voimme saman tien tarkastaa, että se on täsmälleen 100 metriä pyöräilijän edellä. Kyllä se on, koska pyöräilijän sijainti on 0 kun $t < 0$.

Jos ollaan pyöräilijän sijainnin $5t$ pätevyysalueella eli $0 \leq 5t \leq 1000$, niin vastaus saadaan ratkaisemalla yhtälö $160 + 3t = 5t + 100$. Sen juuri on $t = 30$. Se on koko mallin pätevyysalueella, koska $160 + 3 \cdot 30 = 250$ ja $0 \leq 250 \leq 1000$. Se on myös pyöräilijän sijainnin $5t$ pätevyysalueella, koska $5 \cdot 30 = 150$ ja $0 \leq 150 \leq 1000$. Siksi myös $t = 30$ on koko tehtävän juuri. Äsken laskemamme $160 + 3 \cdot 30 = 250$ ja $5 \cdot 30 = 150$ ovat juoksijan ja pyöräilijän sijainnit juuren ilmaisemalla hetkellä, joten juoksija todella on täsmälleen 100 metriä pyöräilijän edellä.

Jos ollaan pyöräilijän sijainnin 1000 pätevyysalueella eli $5t > 1000$, niin vastaus saadaan ratkaisemalla yhtälö $160 + 3t = 1000 + 100$. Sen juuri on $t = 313\frac{1}{3}$. Se on pyöräilijän sijainnin 1000 pätevyysalueella, koska $5 \cdot 313\frac{1}{3} = 1566\frac{2}{3} >$

1 000. Mutta se ei ole koko mallin pätevyysalueella, koska $160 + 3 \cdot 313\frac{1}{3} = 1\,100$, ja $0 \leq 1\,100 \leq 1\,000$ on epätosi. Niinpä $t = 313\frac{1}{3}$ ei ole koko tehtävän juuri.

Vastaus on siis: juoksija on täsmälleen 100 metriä pyöräilijän edellä ajanhetkellä $t = -20$ ja $t = 30$, eikä muulloin. $\square$

Esimerkki 2.3 havainnollistaa sitä, että *päättely tapahtuu usein oletusten alaisuudessa*. Esimerkissä päättely jakautui kolmeen haaraan. Niistä ensimmäinen tapahtui oletusten $t < 0$ ja $0 \leq 160 + 3t \leq 1\,000$ alaisuudessa, toinen oletusten $0 \leq 5t \leq 1\,000$ ja $0 \leq 160 + 3t \leq 1\,000$ alaisuudessa, ja kolmas oletusten $5t > 1\,000$ ja $0 \leq 160 + 3t \leq 1\,000$ alaisuudessa.

Esimerkissä oletuksia tehtiin vain pyöräilijän sijainnin valitsemiseksi vaihtoehtoista 0 , $5t$ ja $1\,000$. Vaikka esimerkki ei sitä hyödyntänytkään, oletuksiin vetoaminen on sallittua myös keskellä päättelyä. Kolmannessa haarassa olisi voinut heti yhtälön $160 + 3t = 1\,000 + 100$ kirjoittamisen jälkeen todeta, että se ei voi olla voimassa yhtäaikaan koko mallin pätevyys ehdon kanssa, sillä jälkimmäinen sisältää vaatimuksen $160 + 3t \leq 1\,000$, eikä $1\,000 + 100 \leq 1\,000$ ole tosi. Vielä helpompaa olisi ollut todeta, että pyöräilijän ollessa maalissa ei juoksija voi olla pyöräilijän edellä, sillä mallin pätevyysalue päättyy kun myös juoksija pääsee maaliin.

6. Milloin pyöräilijä on täsmälleen 100 metriä juoksijan edellä?

Mahdollinen ja mahdoton tilanne

Päätelyssä ei siis tarvitse ottaa huomioon tilanteita, jotka eivät toteuta voimassa olevia oletuksia. Tätä varten otamme käyttöön käsitteen *mahdollinen tilanne* (*possible state*). Se tarkoittaa mitä tahansa tilannetta, joka toteuttaa voimassa olevat oletukset. Tilanne on *mahdoton* jos ja vain jos se ei ole mahdollinen. Ilmaukset ”mahdollinen tilanne” ja ”mahdoton tilanne” eivät siis viittaa siihen, mitä voi ja ei voi tapahtua, vaan siihen, mitkä muuttujien arvojen yhdistelmät kuuluvat ja mitkä eivät kuulu päätelyn senhetkisen haaran piiriin. Tilanne $t = -1$ oli mahdollinen esimerkin 2.3 ensimmäisessä haarassa mutta mahdoton muissa haaroissa.

Esimerkissä 2.3 oletukset tulivat tehtävässä annetuista tiedoista — siitä, minä ajanhetkinä juoksija liikkui ja minä ajanhetkinä pyöräilijä liikkui. Oletuksia voi tulla myös muista syistä. Oletus voidaan tehdä vaikkapa nollalla jakamisen välttämiseksi. Seuraavassa esimerkissä tehdään niin. Tässä vaiheessa ei tarvitse ymmärtää sitä kokonaan. Riittää ymmärtää, että siinä jaetaan päättely kahteen haaraan olettamalla $x = 1$ ja $x \neq 1$, jotta päästäisiin käyttämään päättelykeinoa, joka ei ole sallittu kun $x = 1$.

Siltä varalta, että toisen asteen yhtälö ei ole tuttu tai on päässyt unohtumaan: toisen asteen yhtälö on muotoa $ax^2 + bx + c = 0$, missä a , b ja c ovat lukuja, $a \neq 0$, ja x on luku jonka arvo halutaan saada selville. Toisen asteen yhtälöllä

on korkeintaan kaksi juurta. Ne ovat $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ja $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. ("Neliöjuuri x " eli $\sqrt{x}$ on sellainen ei-negatiivinen luku, että $(\sqrt{x})^2 = x$. Jos $x \geq 0$, niin sillä on täsmälleen yksi neliöjuuri, ja jos $x < 0$, niin sillä ei ole neliöjuurta. Neliöjuurista kerrotaan enemmän sivulta 54 alkaen.)

Esimerkki 2.4 Ratkaise yhtälö $\frac{x^2-1}{x-1} = 7$.

Ratkaisu. Päättely jakautuu kahteen haaraan seuraavasti.

Jos $x = 1$, niin yhtälön vasemmalla puolella jaetaan nollalla. Nollalla jakaminen on kiellettyä, joten $x = 1$ ei ole juuri. Niinpä tästä haarasta ei tule juuria.

Jos $x \neq 1$, niin $x - 1 \neq 0$. Siksi yhtälön molemmat puolet saa kertoa $(x - 1)$:llä. Siten saadaan $x^2 - 1 = 7(x - 1)$. Kertomalla sulkeet auki saadaan $x^2 - 1 = 7x - 7$, josta lisäämällä molemmille puolille $7 - 7x$ saadaan $x^2 - 7x + 6 = 0$. Se on toisen asteen yhtälö, jolle $a = 1$, $b = -7$ ja $c = 6$. Niinpä $-b = 7$, $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6} = \sqrt{49 - 24} = \sqrt{25} = 5$ ja $2a = 2 \cdot 1 = 2$. Siksi $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{7-5}{2} = 1$ ja $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{7+5}{2} = 6$. Tilanne $x = 1$ on mahdoton oletuksen $x \neq 1$ vuoksi, joten se hylätään. Tilanne $x = 6$ on mahdollinen, koska se ei riko oletusta $x \neq 1$ eikä muita oletuksia ole tehty. Niinpä tästä haarasta tulee juuri $x = 6$.

Vastaus on siis $x = 6$.

Lopputuloksen testaaminen. $\frac{6^2-1}{6-1} = \frac{35}{5} = 7$, joten täsmää. Muita juuria kuin 6 ei voi olla, koska toisen asteen yhtälöllä on enintään kaksi juurta, sijoittamalla nähdään että välivaiheen $x^2 - 1 = 7(x - 1)$ juuret ovat 1 ja 6, ja $x = 1$ pitää hylätä koska se aiheuttaa nollalla jakamisen. $\square$

2.2 Puheenaihe, lauseke osineen ja (osittais)funktio

Nyt on tullut aika esitellä lausekkeet ja muutama niihin liittyvä käsite. Osa niistä lienee tuttuja aiemmista opinnoista, mutta on hyvä varmistaa, että ne on ymmärretty oikein. Osa lienee uusia.

Puheenaihe ja lauseke

Matematiikan keinoin voidaan käsitellä monia eri *puheenaiheita* (*domain of discourse*). Hyvin yleinen puheenaihe matematiikassa on reaalitylvut eli lukusuo-
ran luvut. Aivan toisenlainen mutta silti yleinen puheenaiheiden kokoelma on graafit eli eräänlaiset verkkomaiset rakenteet. Reitin etsiminen älypuhelimella pe-
rustuu graafeihin, ja niillä on paljon käyttöä myös muun muassa sähkötekniikassa. Jotta näkyisi, että puheenaiheena voi olla muutakin kuin lukuja, esitetään tässä lu-
vussa muutamia esimerkkejä, joissa puheenaiheena ovat muun muassa Britannian kuninkaalliset.

Eri puheenaiheissa esiintyy erilaisia *lausekkeita* (*expression*). Realitylvukujen lausekkeet ovat koulusta tuttuja. Esimerkiksi " $160 + 3t$ ", " $5t$ ", " t " ja " 70 " ovat reaalitylvukujen lausekkeita. Britannian kuninkaallisista puhuvia lausekkeita ovat esi-
merkiksi "*puoliso(Charles)*" ja "*äiti(puoliso(x))*". Lausekkeissa voi esiintyä kol-
menlaisia osia:

- vakioita,
- muuttujia ja
- funktiosymboleita.

Ne on esitelty alla. Lisäksi lausekkeen rakennetta ilmaisemaan voidaan käyttää sulkumerkkejä eli sulkeita "(" ja ")".

Vakio ja vakiosymboli

Vakiot (*constant*) edustavat puheenaiheen olioita siten, että sama vakio edustaa koko ajan samaa oliota. Käytettävissä olevat vakiot riippuvat puheenaiheesta. Esi-
merkiksi luvuista puhuttaessa " 38 " edustaa lukua kolmekymmentäkahdeksan ja " π " edustaa erästä kuuluisaa lukua, jonka arvo on suunnilleen 3,14159. Jos pu-
heenaiheena on Britannian kuninkaalliset, niin "*Camilla*" edustaa kuninkaan ny-
kyistä puolisoa.

On kuitenkin hyvä tietää, että sanaa "vakio" käytetään matematiikassa myös laajemmassa merkityksessä, tarkoittamaan sitä, että jonkin arvo ei muutu. Jos ha-
lutaan korostaa että tarkoitetaan vakiota siinä merkityksessä kuin tässä määritel-
tiin, voidaan käyttää sanaa "vakiosymboli". "Vakiosymboli" tarkoittaa vakion ni-
meä. Tässä yhteydessä nimeksi kelpaa myös epätyhjä numerojono, kuten " 38 ".

Myös jotkin monimutkaisemmat lukuja esittävät ilmaukset kuten desimaaliluvut kelpaavat.

Joskus on epäselvää, onko jokin ilmaus vakiosymboli vai vakiosymboleista muodostettu monimutkaisempi lauseke. Asiaa voi testata yrittämällä korvata jokin sen osa saman lukuarvon sisältävällä muuttujalla. Jos sellainen korvaaminen on mahdotonta tai voi johtaa eri lopputulokseen, niin kyse on vakiosymbolista. Esimerkiksi kun 8 korvataan x :llä symbolissa 38, saadaan $3x$. Kun $x = 8$, on $3x = 3 \cdot x = 3 \cdot 8 = 24$. Siis symbolin 8 korvaaminen muuttujalla x jonka arvo on 8, muutti tuloksen 38:sta 24:ksi. Niinpä vaikka $3x$ on kertolasku $3 \cdot x$, on 38 vakiosymboli eikä kertolasku $3 \cdot 8$.

7. Ei-negatiiviset sekaluvut, kuten $53\frac{1}{3}$, ovat muotoa *kokonaisosa* $\frac{\text{osoittaja}}{\text{nimittäjä}}$, missä *kokonaisosa*, *osoittaja* ja *nimittäjä* ovat epättyhjiä numerojonoja. Ovatko ei-negatiiviset sekaluvut vakiosymboleita?

Muuttuja ja muuttujasymboli

Myös *muuttujat* (*variable*) edustavat puheenaiheen olioita, mutta muuttujan edustama olio voi olla tuntematon, se voi vaihtua, tai ainakaan ei etukäteen luvata että se on yksikäsitteinen. Muuttujina käytetään usein pieniä kirjaimia kuten x , a ja t , mahdollisesti varustettuna alaindeksillä tyyliin x_5 .

Luonnollisen kielen sanat ”hän” ja ”se” voidaan tulkita muuttujiksi. Esimerkiksi virkkeessä ”Jyväskylä on helppo kaupunki pyöräilijälle, koska siellä on paljon isoja alamäkiä ja Vaasa on helppo kaupunki juoksijalle, koska siellä on paljon vahvoja myötätuulia” ensimmäinen ”siellä” viittaa Jyväskylään ja jälkimmäinen ”siellä” viittaa Vaasaan. ”Siellä” voi siis viitata eri paikkakuntiin sen mukaan, mistä aikaisemmin on puhuttu. Muuttujat toimivat juuri näin.

”Muuttujasymboli” tarkoittaa muuttujan nimeä. Tulemme luvussa 3.4 huomaamaan, että kahdella eri muuttujalla voi olla sama nimi. Myös ohjelmoinnissa voi kahdella eri muuttujalla olla sama nimi.

Funktiosymboli

Funktiosymboli (*function symbol*) edustaa toimitusta, joka ottaa yhden tai useamman puheenaiheen olion ja tuottaa puheenaiheen olion tai ei tuota. Esimerkiksi jakolasku ottaa kaksi lukua. Se tuottaa luvun jos jakaja ei ole nolla. Se ei tuota mitään jos jakaja on nolla, koska nollalla ei voi jakaa.

Funktiolauseke tarkoittaa ilmausta, joka muodostuu funktiosymbolista ja sen argumenteiksi asetetuista lausekkeista. Funktiolausekkeen tuottama tulos riippuu sen argumenttien tuottamista tuloksista ja viime kädessä lausekkeessa esiintyvien muuttujien arvojen yhdistelmästä eli tilanteesta (sivu 8). Kun funktiolauseke ei tuota tulosta, se on *määrittelemätön* (*undefined*). Muulloin se on *määritelty*. Jakolasku on määritelty kun jakaja ei ole nolla, ja määrittelemätön kun jakaja on

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} 4 \\ \text{---} \\ 3 \\ \text{---} \\ 8 - 5 + 1 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \\ 6 \\ \text{---} \\ 8 - (5 + 1) \end{array} \end{array}$$

Kuva 2: Lauseke $8 - 5 + 1$ tuottaa eri tuloksen kuin $8 - (5 + 1)$

nolla. Lauseke on määrittelemätön jos ja vain jos se itse on määrittelemätön funktiolauseke tai sisältää sellaisen (tähän palataan sivulla 22).

Käytettävissä olevat funktiosymbolit riippuvat puheenaiheesta. Sama funktiosymboli ottaa aina saman määrän olioita.

Reaalilukujen tapauksessa varmaankin tutuin funktiosymboli on ”+”, joka edustaa yhteenlaskua. Se ottaa kaksi lukua ja kirjoitetaan niiden väliin. Vähennyslaskua edustaa ”-”, joka myös ottaa kaksi lukua ja kirjoitetaan niiden väliin. Vastalukua edustaa ”-”, joka ottaa yhden luvun ja kirjoitetaan sen eteen. Vähennyslaskua edustava ja vastalukua edustava ”-” ovat eri funktiosymboleita, vaikka ne ovat täysin samannäköisiä. Reaaliluvuilla on useita muitakin funktiosymboleita, kuten ” $\sqrt{}$ ” ja ”log”.

Britannian kuninkaallisten tapauksessa funktiosymboleina voi olla esimerkiksi ”puoliso”, ”äiti” ja ”isä”. Jos $x = \text{William}$, niin $\text{isä}(x) = \text{Charles}$ ja $\text{puoliso}(\text{isä}(x)) = \text{Camilla}$. Walesin prinsessa Charlotte on syntynyt 2015, joten hänellä ei vielä ole puolisoa. Siksi $\text{puoliso}(\text{Charlotte})$ on määrittelemätön.

Aivan kuten vakiosymboli on jonkin vakion nimi ja muuttujasymboli on jonkin muuttujan nimi, on funktiosymboli jonkin funktion nimi.

Tutkimusten mukaan monilla aloittavilla opiskelijoilla on funktion käsite koulun jäljiltä vähän sinnepäin. Asiaa sotkee entisestään se, että vaikka ohjelmoinnin funktioissa on paljon samaa kuin matematiikan funktioissa, on niissä myös iso ero. Lisäksi matematiikassa on tavallista käyttää sanaa ”funktio” siten, että syntyy helposti hieman virheellinen mielikuva. Tässäkin tekstissä on jo ehditty tehdä niin. Funktion käsitettä avataan sivulta 16 alkaen.

Laskujärjestys

Lausekkeessa on oltava ainakin yksi vakio tai muuttuja. Lausekkeen rakenne vaihtelee puheenaiheen mukaan.

Reaalilukujen lausekkeissa *laskujärjestys* noudattaa koulumatematiikasta tuttuja sääntöjä. Yhteen- ja vähennyslasku ovat keskenään samanarvoiset ja etenevät vasemmalta oikealle, ellei sulkeilla määrätä toisin. Esimerkiksi $8 - 5 + 1$ lasketaan $(8 - 5) + 1 = 3 + 1 = 4$ eikä $8 - (5 + 1) = 8 - 6 = 2$. Tätä on havainnollistettu kuvassa 2. Kertolasku lasketaan ennen yhteen- ja vähennyslaskua. Esimerkiksi $1 + 2 \cdot 4 = 1 + (2 \cdot 4) = 1 + 8 = 9$ mutta $1 + 2 \cdot 4 \neq (1 + 2) \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12$.

Jakolasku, neliöjuuri (sivu 54) ja itseisarvo (sivu 75) eivät tarvitse tällaisia

sääntöjä, koska niiden merkintätapa osoittaa, mikä kuuluu niiden piiriin. Esimerkiksi $\frac{\sqrt{4+5}+7}{1+1} = \frac{\sqrt{9}+7}{2} = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$. Sama pätee potenssilaskulle eksponentin osalta mutta ei kantaluvun osalta. Potenssilasku lasketaan ennen kantaluvun puolella tapahtuvia yhteen-, vähennys- ja kertolaskuja. Esimerkiksi $5 \cdot 4^{3 \cdot 2} = 5 \cdot (4^{(3 \cdot 2)}) = 5 \cdot (4^6) = 5 \cdot 4096 = 20480$. Potenssilasku etenee oikealta vasemmalle, ellei sulkeilla määrätä toisin. Esimerkiksi $3^{1^2} = 3^{(1^2)} = 3^1 = 3$ mutta $3^{1^2} \neq (3^1)^2 = 3^2 = 9$.

8. Matematiikassa $-3^2 = -9$. Päätele, onko -3 vakiosymboli vai laskutoimitus, jossa luvusta 3 otetaan vastaluku.
9. Mikä jatkopäätelmä edellisen tehtävän vastauksesta voidaan tehdä?

Kuten tunnettua, kertolaskun symbolin ”.” saa jättää merkitsemättä, jos jälkimmäinen kerrottava on muuttuja, sulkeiden ympäröimä lauseke tai jokin muu siten, että ilmauksen merkityksestä ei aiheudu epäselvyyttä. Esimerkiksi $2x$ tarkoittaa samaa kuin $2 \cdot x$ ja $5(1+2)$ tarkoittaa samaa kuin $5 \cdot (1+2)$. Sen sijaan symbolia ”.” ei saa jättää pois kertolaskusta $2 \cdot 4$, koska siten syntyvä 24 ei erotuisi luvusta 24 eli kaksikymmentäneljä. Symbolia ”.” ei saa jättää pois myöskään esimerkiksi kertolaskusta $3 \cdot \frac{2}{5}$, koska $3\frac{2}{5}$ ei tarkoita samaa kertolaskua vaan on sekaluku (sivu 102) kolme ja kaksi viidesosaa. Symbolia ”.” ei jätetä pois myöskään esimerkiksi kertolaskusta $x \cdot 2$, jottei syntyisi sekaannusta alaindeksoituun muuttujaan x_2 .

Lausekepuu

Lausekkeen rakenteen voi ilmaista kuvana, joka tunnetaan nimellä *lausekepuu* (*expression tree*). Kuvassa 3 on kaksi esimerkkiä.

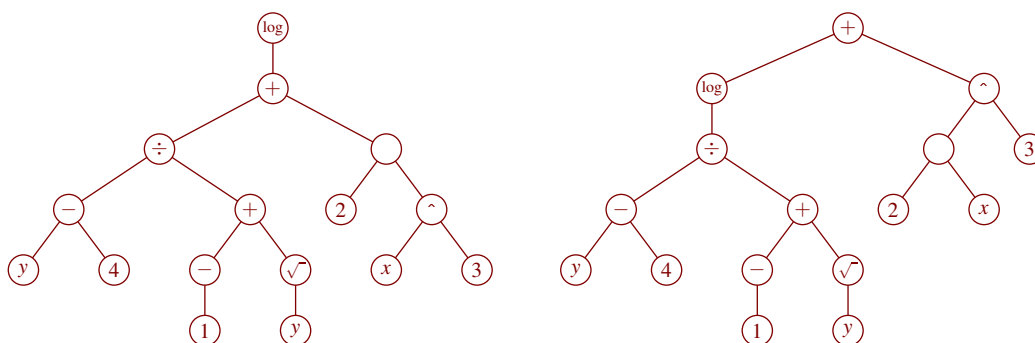
Lausekepuun ympyröitä kutsutaan *solmuiksi*. Solmun *lapsi* tarkoittaa solmuun viivalla alas tai alaviistoon yhdistettyä solmua tai alipuuta. Esimerkiksi kuvassa 3 solmun, jossa lukee ”÷”, lapsina ovat solmut joissa lukee ”−” ja ”+”, mutta myös lausekkeita $y - 4$ ja $-1 + \sqrt{y}$ edustavia alipuita saa kutsua solmun ”÷” lapsiksi.

Vakio esitetään lapsettomana solmuna. Myös muuttuja esitetään lapsettomana solmuna. Funktiot symboli esitetään solmuna, jolla on alipuinaan funktiosymbolin argumentit. Kuvassa 3 on $y - 4$ esitetty solmuina joissa lukee ”−”, ”y” ja ”4” siten, että ”−”-solmu on muita ylempänä ja siitä on viivat ”y”- ja ”4”-solmuihin.

Lausekepuuhun ei piirretä sulkeita, mutta sulkeiden vaikutus näkyy puun rakenteessa. Esimerkiksi kuvassa 3 vasemmalla lauseketta $2x^3$ edustaa näkymätön kertolasku jonka lapsina ovat 2 ja x^3 , ja oikealla lauseketta $(2x)^3$ edustaa potenssilasku jonka lapsina ovat $2x$ ja 3. Ero johtuu siitä, että lausekkeessa $2x^3$ lasketaan potenssilasku ennen kertolaskua mutta lausekkeessa $(2x)^3$ toisinpäin.

Funktio ja lähtöjoukko

Jos lausekkeessa on muuttujia, niin lausekkeen tuottama luku saattaa vaihdella sen



Kuva 3: Lausekkeiden $\log\left(\frac{y-4}{-1+\sqrt{y}} + 2x^3\right)$ ja $\log\frac{y-4}{-1+\sqrt{y}} + (2x)^3$ lausekepuut

mukaan, mitä arvoja muuttujille annetaan. Edellä näimme, että

kun t on	$-53\frac{1}{3}$	-30	-20	30	80	200	280
tuottaa $160 + 3t$	0	70	100	250	400	760	1000

Funktio (function) tarkoittaa mitä tahansa sellaista sisäänmenevän ja ulostulevan tiedon välistä riippuvuutta, että jokaista sisäänmenevää tietoa vastaa täsmälleen yksi ulostuleva tieto. Esimerkiksi ihmisen *syntymävuosi* on ihmisen funktio, koska jokaisella ihmisellä on täsmälleen yksi syntymävuosi. Sisäänmenevä tieto voi muodostua monesta osasta. Esimerkiksi ihmisen *ikä* riippuu sekä kenestä ihmisestä että mistä ajanhetkestä puhutaan. Niinpä ikä on ihmisen ja ajanhetken funktio. Kahden luvun x ja y *minimi* $\min(x, y)$ on funktio, joka ottaa kaksi lukua ja palauttaa niistä pienemmän. Jos kumpikaan ei ole toista pienempi, niin niillä on sama arvo, ja $\min(x, y)$ palauttaa sen.

Funktion esittämiseen on useita tapoja. Jos sisäänmenevä tieto voi saada vain pienen määrän erilaisia arvoja (tai arvojen yhdistelmiä, kun sisäänmenevä tieto koostuu monesta osasta), voidaan funktio esittää taulukkona. Alla on erään ravintolan sulkemisaika viikompäivän funktiona.

viikompäivä	ma	ti	ke	to	pe	la	su
suljetaan klo	19	19	19	19	21	16	14

Esimerkin 2.2 juoksijan sijaintia ajanhetken funktiona ei voi esittää taulukkona, koska mahdollisia ajanhetkiä on äärettömän monta. Edellä ollut taulukko esittää siitä äärellisen osan. Kuvan 1 sininen viiva esittää sen käyränä. Sen voi esittää myös lausekkeena $160 + 3t$ täydennettynä tiedolla, että lauseke on voimassa vain kun $-53\frac{1}{3} \leq t \leq 280$. Tämä täydennys tarvitaan, koska esimerkissä ei luvata, että juoksijan sijainti noudattaa lauseketta $160 + 3t$ muina aikoina.

Jokaiseen funktioon liittyy *lähtöjoukko (domain)*, joka kertoo, mille sisään-tuleville arvojen yhdistelmille funktio on määritelty. Esimerkin 2.2 juoksijan ja

pyöräilijän sijainneille se on ne luvut t , joille $-53\frac{1}{3} \leq t \leq 280$. Funktion **min** lähtöjoukko on kaikki kahden reaaliluvun x ja y yhdistelmät (x, y) . Ihmisen iän lähtöjoukoksi voidaan valita kaikki yhdistelmät (*ihminen, ajanhetki*), joissa mainittu ihminen on elossa mainittuna ajanhetkenä.

Kuvan 1 vihreä viiva esittää pyöräilijän sijainnin. Sen esittää myös $\min(\max(0, 5t), 1000)$, nytkin rajattuna lähtöjoukkoon $-53\frac{1}{3} \leq t \leq 280$. Funktio $\max$ ottaa kaksi lukua ja palauttaa niistä suuremman. Sen lähtöjoukko on kaikki kahden reaaliluvun yhdistelmät.

Vaikka edellä puhuttiin tuloksen riippuvuudesta lähtötiedoista, funktioksi kelpaa myös *vakiofunktio* (*constant function*). Alla on edellä mainitun ravintolan avaamisaika viikonpäivän funktiona. Se on vakiofunktio.

viikonpäivä	ma	ti	ke	to	pe	la	su
avataan klo	11	11	11	11	11	11	11

Osittaisfunktio

Funktion lähtöjoukoksi valitaan usein jokin samankaltaisten olioiden kokonaisuus, kuten kaikki reaaliluvut, kaikki Britannian kuninkaalliset tai kaikki viikonpäivät. Toisinaan lähtöjoukkoa tarvitsisi hienosäätää, jotta saataisiin funktio. Esimerkiksi funktion **puoliso** lähtöjoukoksi ei voi valita kaikkia Britannian kuninkaallisia, koska osalla heistä ei ole puolisoa — ei ainakaan pikkuprinsessoilla ja -prinsseillä. Jos jakolaskun halutaan olevan funktio, niin sen lähtöjoukoksi ei voi valita kaikkia kahden reaaliluvun yhdistelmiä, koska nollalla ei voi jakaa. Jos ravintola on kiinni sunnuntaisin, ei sen avaamisajan lähtöjoukoksi voida valita kaikkien viikonpäivien joukkoa, jos avaamisajan halutaan olevan funktio.

Edellä olevat esimerkit havainnollistavat, että lähtöjoukkojen hienosäätäminen tekee asioista puhumisesta kömpelöä. Jotta voitaisiin koko ajan puhua vaikkapa kaikista Britannian kuninkaallisista, kaikista reaaliluvuista ja kaikista viikonpäivistä, on otettu käyttöön käsite *osittaisfunktio* (*partial function*). Se tarkoittaa mitä tahansa sisäänmenevän ja ulostulevan tiedon välistä riippuvuutta, jossa jokaisesta sisäänmenevästä tiedosta vastaa enintään yksi ulostuleva tieto. Britannian kuninkaallisten tapauksessa **puoliso** on osittaisfunktio mutta ei funktio. Muun muassa jakolasku, neliöjuuri ja logaritmi ovat reaalilukujen osittaisfunktioita mutta eivät funktioita. Sunnuntaisin kiinni olevan ravintolan avaamis- ja sulkemisaika ovat viikonpäivän osittaisfunktioita mutta eivät funktioita.

Kuten sivulla 8 todettiin, ”tilanne” tarkoittaa käytössä olevien muuttujien arvojen yhdistelmää. Se, että osittaisfunktio ei ole määritelty jossakin tilanteessa, on mahdollisuus mutta ei velvoite. Osittaisfunktio saa olla määritelty jokaisessa tilanteessa. Siksi, niin hassulta kuin se kuulostaakin, myös funktiot ovat osittaisfunktioita. Vastakkainen ääripää on osittaisfunktio, joka ei ole määritelty missään tilanteessa. Esimerkiksi lausekkeet $\frac{x}{0}$ ja $\frac{1}{x-x}$ esittävät sellaista.

Edellä olevan perusteella on selvää, että osittaisfunktio, joka ei ole määritelty jokaisella lähtöjoukon arvojen yhdistelmällä, ei ole funktio. Siksi tässä kirjassa pitäisi ehkä puhua ”osittaisfunktiosymboleista” eikä ”funktiosymboleista”. Katsottiin kuitenkin, että ”osittaisfunktiosymboli” on niin pitkä sana, että osan ”osittais” pois jättämisen aiheuttama epätarkkuus on pienempi paha.

Määritelmä, lause ja lähtökohta

Matematiikassa on tapana esittää tarkkoja *määritelmiä* (*definition*). Määritelmä antaa jollekin sanalle, sanayhdistelmälle tai symbolille täsmällisen merkityksen. Esimerkiksi Suomen kunnista puhuttaessa voidaan määritellä, että kaksi kuntaa ovat toistensa naapureita jos ja vain jos niillä on yhteistä rajaa jokin nollaa pitempi matka. Osuus ”nollaa pitempi matka” tekee selväksi, että yksi yhteinen rajapiste ei riitä naapuruuteen. Tällainen tarkkuus on tarpeen, koska Suomessa on kahden kunnan pareja, joilla on täsmälleen yksi piste yhteistä rajaa. Esimerkiksi Turku ja Mynämäki ovat sellainen pari. Rovaniemi ja Pelkosenniemi ovat toinen.

On ihmisten päätös, että yhteenlaskua merkitään symbolilla ”+” eikä vaikka symbolilla ” $\cup$ ”. Sama pätee määritelmiin kaiken kaikkiaan. Määritelmät eivät siis ilmaise varsinaisia matemaattisia tosiasioita, vaan ainoastaan rakentavat yhteistä kieltä, jolla ihmiset voivat puhua matemaattisista tosiasioista. Matemaattisia tosiasioita ilmaistaan *lauseilla* (*theorem*). Esimerkiksi se on lause, että yhteenlaskun lopputulos ei riipu siitä, missä järjestyksessä luvut lasketaan yhteen. Se ei ole ihmisten keskenään sopima asia, vaan seuraa loogisella välttämättömyydellä siitä, mitä luvuilla ja yhteenlaskulla tarkoitetaan.

Jotkin määritelmien seuraukset näkee helposti, jotkin toiset on saatu selville vasta kun asiaa on tutkittu satoja vuosia. Jotkin lauseet ovat kiinnostavia itsessään, jotkin toiset on kirjoitettu vain välivaiheiksi matkalla kiinnostavaan lauseeseen. Siksi on otettu käyttöön sellaisia sanoja kuin ”lemma” (eli apulause) ja ”corollary” (seurauslause). Lauseiden, apulauseiden, seurauslauseiden ja niin edelleen väliset rajat ovat häilyviä. Esimerkiksi moni apulause on sittemmin osoittautunut hyödylliseksi paljon alkuperäistä käyttöään laajemmin, ja siksi ansaitsisi ylennyksen lauseeksi.

Matematiikassa ei ole tapana kutsua lauseiksi sellaisia määritelmien seurauksia, jotka huomaa hyvin helposti melko vähäiselläkin osaamisella. Monet sellaiset asiat ovat perusasioita, joita käytetään vähän väliä. Tässä kirjassa sellaisia kutsutaan *pikkulauseiksi*. Ne eroavat apulauseista siten, että apulausetta ei käytetä vähän väliä vaan jonkin yksittäisen asian todistamisen apuna.

Vaikka ”määritelmä” ja ”lause” ovat käsitteinä tarkkoja (jos unohdetaan se, että liian helposti nähtävissä olevaa loogista seurausta ei kutsuta lauseeksi), niiden välinen raja hämärtyy sitä kautta, että toisinaan matemaattisen teorian rakentamisen voi aloittaa vaihtoehtoisilla tavoilla. Se, mikä on yhdessä tavassa lause, voi toisessa tavassa olla osa määritelmää ja päinvastoin.

Esimerkki Reaaliluvuilla ” $<$ ” voidaan määritellä luettelemalla sopiva valikoiman perusominaisuuksia ja ” $\leq$ ” voidaan määritellä ” $<$ ”:n avulla:

- (a) Jos a ja b ovat reaalilukuja, niin täsmälleen yksi seuraavista on tosi: $a < b$, $a = b$ ja $b < a$.
- ... lisää perusominaisuuksia ...
 - Ilmaus ” $a \leq b$ ” tarkoittaa samaa kuin ” $a < b$ tai $a = b$ ”.

Tai voidaan tehdä toisinpäin:

- (b) Jos a ja b ovat reaalilukuja, niin joko $a \leq b$ tai $b \leq a$ tai molemmat ovat tosia. Molemmat ovat tosia jos ja vain jos $a = b$.
- ... lisää perusominaisuuksia ...
 - Ilmaus ” $a < b$ ” tarkoittaa samaa kuin ” $a \leq b$ ja $a \neq b$ ”.

Ylemmässä tavassa (b) on pikkulause ja (a) on osa määritelmää, ja alemmassa tavassa päinvastoin. Tapojen välinen ero on samanlainen kuin kuuluisassa vertauksessa aasista kahden heinäkasavan välissä: ei ole väliä kumman valitsee, mutta jompikumpi täytyy valita, jotta päästään eteenpäin. $\square$

Tässä kirjassa ei ole tärkeää erotella määritelmän osia ja pikkulauseita toisistaan näin suurella tarkkuudella. Päinvastoin: sitä pitää välttää, jotta ei syntyisi esimerkiksi sellaista väärinkäsitystä, että nimenomaan ” $<$ ” täytyy määritellä ensiksi ja ” $\leq$ ” pitää määritellä sen avulla. Siksi tässä kirjassa käytetään sanaa ”lähtökohhta” silloin, kun olisi keinotekoista valita, onko kyseessä pikkulause, määritelmän osa vai jokin muu.

Tämä pohdinta oli tässä kohtaa tätä kirjaa siksi, että seuraavaksi esitetään kirjan ensimmäinen ”lähtökohdaksi” nimetty asia.

Lauseke esittää osittaisfunktion

Lausekkeiden ja osittaisfunktioiden välinen yhteys on seuraava:

Lähtökohta 2.5 Kukin lauseke esittää jonkin osittaisfunktion.

Toisin sanoen, kun valitaan mikä tahansa tilanne, niin lauseke joko tuottaa jonkin arvon tai on määrittelemätön. ”On määrittelemätön” tarkoittaa samaa kuin ”ei tuota arvoa”. Esimerkiksi kun valitaan $x = 0$, niin $\frac{5x}{x}$ on määrittelemätön, ja millä tahansa muulla valinnalla se tuottaa 5. Niinpä lausekkeiden $\frac{5x}{x}$ ja $0x + 5$ edustamat osittaisfunktiot ovat melkein samat, ainoana eronaan se, että $0x + 5$ tuottaa 5 myös tilanteessa $x = 0$, mutta $\frac{5x}{x}$ ei tuota siinä mitään.

Kun puhutaan lausekkeen esittämästä osittaisfunktioista, käytössä oleviin muuttujiin kuuluvat ainakin kaikki lausekkeessa esiintyvät muuttujat. Niihin voi kuulua myös muita muuttujia. Voidaan esimerkiksi sanoa ”lausekkeiden $\frac{5x}{x}$ ja 5 edustamat osittaisfunktiot ovat melkein samat”. Osuuden $\frac{5x}{x}$ vuoksi on selvää, että x on käytössä. Siksi jälkimmäinen ”5” tarkoittaa sitä x :n funktiota, joka jokaisella x :n arvolla tuottaa 5.

Lauseke ei siis ole sama asia kuin osittaisfunktio — lauseke vain esittää osittaisfunktiota. Tämä ilmenee siten, että kaksi eri lauseketta voi esittää samaa osittaisfunktiota. Yksinkertainen esimerkki tästä on $2x$ ja $2x + 0$. Vaikkapa $(a + b)^2$ ja $a^2 + 2ab + b^2$ on toinen esimerkki.

Se ilmenee myös siten, että aina kun lähtöjoukko on ääretön, on olemassa funktio, joka saa korkeintaan kahta eri arvoa ja jota ei esitä mikään lauseke. Tämä osoitetaan sivulla 112.

Monet aliohjelmat laskevat osittaisfunktioita

Ohjelmoinnissa määrittelemätön tulos vastaa sitä, että laskenta epäonnistuu. Yksi tyypillinen epäonnistumisen tapa on ohjelman *kaatuminen* (*crash*) eli suorituksen keskeytyminen virheilmoituksella. Toinen on *ikuinen silmukka* (*infinite loop*) eli se, että ohjelman suoritus ei lopu koskaan.

Esimerkki 2.6 Luonnollisten lukujen jakolasku voidaan toteuttaa siten, että vähennetään jaettavasta jakaja niin monta kertaa, että jäljelle jäänyt luku on pienempi kuin jakaja. Osamäärä on vähennyskertojen määrä ja jakojäännös on jäljelle jäänyt luku. Alla oleva taulukko näyttää, miten luvun 30 jakaminen luvulla 7 tällä tavalla tuottaa osamääräksi 4 ja jakojäännökseksi 2.

vähennyslasku	kuinka mones
$30 - 7 = 23$	1
$23 - 7 = 16$	2
$16 - 7 = 9$	3
$9 - 7 = 2$	4

Sivulta 99 alkaen todistetaan, että kun tämän menetelmän suoritus on valmistunut, niin vähennyskertojen määrä on osamäärä ja jaettavasta jäljelle jäänyt luku on jakojäännös. Todistus pätee aina kun jakaja ja jaettava ovat luonnollisia lukuja. Se pätee siis myös silloin, kun jakaja on 0. Mutta eihän nolllalla voi jakaa! Miten tämä on mahdollista?

Se on mahdollista siten, että menetelmän suoritus ei valmistu, jos jakaja on nolla. Nollan vähentäminen jaettavasta ei muuta mitään, joten suoritus ei etene eikä lopu koskaan. Se jää ikuisen silmukkaan. Alla oleva taulukko havainnollistaa tätä.

vähennyslasku	kuinka mones
$30 - 0 = 30$	1
$30 - 0 = 30$	2
$30 - 0 = 30$	3
$30 - 0 = 30$	4
$\vdots$	$\vdots$

Tämä esimerkki on hyvä esimerkki tapauksesta, jossa ohjelma tai menetelmä laskee oikein osittaisfunktion, joka ei ole määritelty kaikilla syötteillä. $\square$

Esimerkin 2.6 tapauksessa olisi mahdollista lisätä ohjelman alkuun testi, onko jakaja nolla, ja jos se on, laittaa ohjelma ilmoittamaan, että se ei voi laskea jakolaskua. Tiedetään kuitenkin, että on ohjelmia, joista ei voida kattavasti selvittää, millä syötteillä ne tulevat jäämään ikuisen silmukkaan. Tästä seuraa, että ohjelmista pääteltäessä ei voida päästä kokonaan eroon siitä mahdollisuudesta, että ohjelma ei vastaa mitään, koska se ei lopeta koskaan. Siksi osittaisfunktiot ovat tärkeä käsite ohjelmista pääteltäessä.

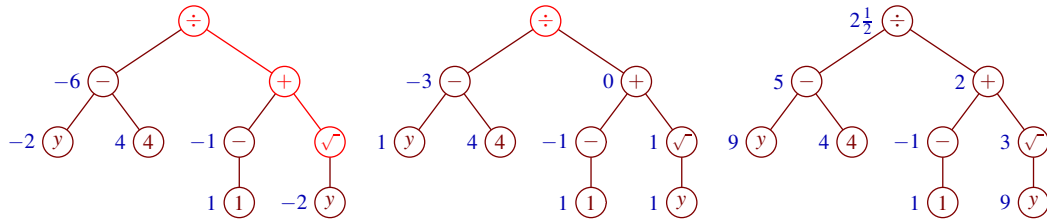
Sen lisäksi, että aliohjelmat tyypillisesti laskevat osittaisfunktioita eivätkä funktioita, sanan ”funktio” käyttö ohjelmoinnissa eroaa toisella, vielä tärkeämällä tavalla saman sanan käytöstä matematiikassa. Nimittäin ohjelmoinnissa funktion käsite sisältää myös sen miten funktio lasketaan, vaikka, kuten edellä korostettiin, matematiikassa ei sisällä. Tyypillisesti ohjelmoinnin funktio on pätäkä ohjelmakoodia, jossa annetaan funktiolle nimi, kerrotaan kuinka monta argumenttia sille annetaan ja minkä tyyppinen kukin niistä on, kerrotaan funktion tuloksen tyyppi ja esitetään miten funktio lasketaan.

Kaiken kukkuraksi on tavallista kutsua funktioiksi myös sellaisia kokonaisuuksia, jotka ovat muuten kuten edellä kuvattiin, mutta eivät tuota mitään tulosta. Sen sijaan ne saattavat esimerkiksi muuttaa tietorakenteen sisältöä. Funktiot voivat myös tehdä molempia. Esimerkiksi funktio, joka lukee syötteestä kokonaisluvun, sekä palauttaa kokonaisluvun (jos onnistuu sellaisen saamaan) että etenee syötteessä. Jos syötteessä on ensin 1863 ja sitten 1917, niin tämä funktio palauttaa ensin 1863 ja heti perään uudelleen kutsuttaessa se palauttaakin 1917.

Jos lausekkeen osa on määrittelemätön, niin myös koko lauseke on

Tässä kirjassa noudatetaan seuraavaa, matematiikassa melko yleistä käytäntöä. Kuten sivulla 20 todettiin, ”on määrittelemätön” tarkoittaa samaa kuin ”ei tuota arvoa”.

Lähtökohta 2.7 Aina kun lausekkeen jokin osa on määrittelemätön, on myös koko lauseke määrittelemätön.



Kuva 4: Jos lausekkeen osa on määrittelemätön, niin myös koko lauseke on määrittelemätön

Esimerkiksi tällä hetkellä Suomen kuningattaren äidin syntymävuosi on määrittelemätön, koska Suomen kuningattaren äiti on määrittelemätön, koska Suomen kuningatar on määrittelemätön, koska Suomella ei ole kuningatarta. Kun $y < 0$, on $\sqrt{y}$ määrittelemätön, joten myös kaikki seuraavat ovat määrittelemättömät:

$$-1 + \sqrt{y} \quad \frac{y-4}{-1+\sqrt{y}} \quad \frac{y-4}{-1+\sqrt{y}} + 2x^3 \quad \log\left(\frac{y-4}{-1+\sqrt{y}} + 2x^3\right)$$

Lähtökohta 2.7 pätee jokaiselle lausekkeelle ja jokaiselle tilanteelle. Eri lausekkeet voivat toteuttaa sen eri tavoilla. Esimerkiksi lausekkeen $y + 2x^3$ jokainen osa ja samalla koko lauseke on määritelty jokaisessa tilanteessa. Koska $y - y = 0$, sisältää $\frac{x+x}{y-y} + 2x^3$ jokaisessa tilanteessa nollalla jaon. Siksi $\frac{x+x}{y-y} + 2x^3$ ei ole määritelty missään tilanteessa.

Kuten alla havainnollistetaan, lauseke $\frac{y+1}{-1+\sqrt{y}}$ toteuttaa lähtökohdan 2.7 tilanteesta riippuen eri tavoilla. Joissakin tilanteissa sen osa $\sqrt{y}$ ja samalla koko lauseke ovat määrittelemättömiä. Toisissa tilanteissa sama osa $\sqrt{y}$ on määritelty ja koko lauseke on määritelty. Tilanteessa $y = 1$ sama osa $\sqrt{y}$ on määritelty, mutta koko lauseke on silti määrittelemätön, koska jakaminen lausekkeella $-1 + \sqrt{y}$ on määrittelemätön kun $y = 1$. Sellaista tilannetta ei ole, jossa $\sqrt{y}$ olisi määrittelemätön mutta koko lauseke määritelty.

y	$\sqrt{y}$	$\frac{y+1}{-1+\sqrt{y}}$	koska
-2	määrittelemätön	määrittelemätön	$\sqrt{y}$ on määrittelemätön
1	määritelty	määrittelemätön	jakaja $-1 + \sqrt{y}$ on nolla
9	määritelty	määritelty	$y \geq 0$ ja $-1 + \sqrt{y} \neq 0$
mahdoton	määrittelemätön	määritelty	lähtökohta 2.7 kieltää

Esimerkin rivejä, jotka alkavat -2, 1 ja 9, on havainnollistettu kuvassa 4 lausekepuilla. Kunkin solmun viereen on merkitty sitä vastaavan alipuun tuottama arvo, mikäli se on määritelty.

Siis lähtökohta 2.7 lupaa sen ja vain sen, että ei ole olemassa sellaista lauseketta, sen osaa ja tilannetta, että siinä tilanteessa se osa on määrittelemätön mutta koko lauseke on määritelty. Tämä lupaus ei ole universaali matemaattinen totuus.

Se on vain laajalti matematiikassa, tämä kirja mukaan lukien, omaksuttu käytäntö, joka yksinkertaistaa matemaattista päättelyä. Sillä otetaan kantaa siihen, mitä sanalla ”lauseke” tarkkaan ottaen tarkoitetaan. Se ei estä ottamasta tarvittaessa käyttöön vaikkapa muutettua kertolaskua, joka tuottaa 0 silloin kun sen vasen puoli on 0 ja oikea puoli on määrittelemätön. Se estää vain kutsumasta sellaisia kertolaskuja sisältäviä kokonaisuuksia ”lausekkeiksi”. Sivulla 94 kerrotaan, miten sellainen kertolasku voidaan toteuttaa tämän kirjan sallimilla keinoilla kiertoteitse.

Muuttujan arvo ei voi olla määrittelemätön, eikä vakion arvo

Lienee hyvä korostaa, että määrittelemättömyys on tässä kirjassa lausekkeiden ominaisuus, siis ei muuttujien eikä vakioiden. Muuttujan arvona ei tässä kirjassa koskaan voi olla ”määrittelemätön”. Kuten sivulla 20 todettiin, ”on määrittelemätön” tarkoittaa samaa kuin ”ei tuota arvoa”. Eri muuttujilla voi olla eri arvot ja muuttujan arvo voi vaihdella tilanteen mukaan, mutta aina se on määritelty ja edustaa jotakin puheenaiheeseen kuuluvaa oliota. Tässä kirjassa ei myöskään oteta käyttöön vakiota, jonka arvo olisi määrittelemätön.

Määrittelemätön lauseke voi tässä kirjassa syntyä vain siten, että jotakin ositaisfunktiota ei voi laskea. Esimerkiksi nollalla ei voi jakaa ja negatiivisesta luvusta ei voi ottaa neliöjuurta.

Lähtökohta 2.8 Vakiolla ja muuttujalla on aina määritelty arvo.
Lausekkeen arvo voi olla määrittelemätön.

Ilman tätä lähtökohtaa muuttuisi monien tuttujen matemaattisten totuuksien ilmaiseminen ja käyttäminen vaikeammaksi. Esimerkiksi nolla kertaa määrittelemätön ei ole nolla vaan määrittelemätön. Siksi, kun sääntö ”nolla kertaa mikä tahansa luku tuottaa nolla” esitetään muodossa ” $0a = 0$ ”, pitäisi erikseen huomauttaa, että a :n pitää olla määritelty. Lähtökohdan 2.8 ansiosta huomautusta ei tarvita. Riittää, että määrittelemättömyys otetaan huomioon, kun muuttujan tilalle sijoitetaan lauseke. Siis vaikka $0 \cdot \text{muuttuja} = 0$ on aina tosi, ei $0 \cdot \text{lauseke} = 0$ ole aina tosi. Esimerkiksi $0 \cdot a = 0$ on aina tosi, mutta $0 \cdot \frac{1}{x} = 0$ ei ole tosi kun $x = 0$.

Oliot voivat kuulua eri tyyppeihin

Toisinaan puheena on yhtäaikaan erilaisia olioita. Esimerkiksi ihmisen iästä puhuttaessa puhutaan sekä ihmisestä että ajanhetkestä, ja ravintolan sulkemisajasta puhuttaessa puhutaan sekä viikonpäivästä että kellonajasta. Tällöin on hyödyllistä ryhmitellä oliot eri *tyyppeihin* (*type*). Samaan tyyppiin kuuluvat oliot ovat josain mielessä keskenään samankaltaisia, ja erilaisia kuin muut oliot. Jos ihmisen ikä lasketaan tarkasteluvuoden ja syntymävuoden erotuksena, niin tarvitaan kaksi tyyppiä, yksi ihmisiä ja toinen ikää ja vuosia varten. Jälkimmäiseksi kelpaa vaikkapa kokonaisluvut.

Sana ”tyyppi” on varsinkin ohjelmoijien suosiossa. Matemaatikoilla on taipumusta käyttää sanaa ”joukko” (”set”) (myös tähän tarkoitukseen. Englanninkielessä käytetään myös sanaa ”sort”.

Tyyppejä käytettäessä kerrotaan funktiosymbolin tuottamasta tuloksesta ja jokaisesta funktiosymbolin ottamasta tiedosta, mitä tyyppiä se on. Esimerkiksi *ikä(ihminen, vuosi)* ottaa kaksi erityyppistä tietoa, nimittäin ihmisen ja kokonaisluvun, ja tuottaa kokonaisluvun.

Matemaattinen logiikka rakennetaan tavallisesti siten, että jokainen funktiosymboli edustaa funktiota (ja on siis määritelty jokaisessa tilanteessa) ja puheenaiheessa on vain yhdentyypisiä olioita. Niin saatu logiikka soveltuu erinomaisesti teoreettisiin tarkoituksiin, mutta on kömpelö käytännön sovelluksissa. Esimerkiksi jakolasku korvataan kertolaskuun perustuvilla kiertoilmauksilla.

Tässä kirjassa käytetään muunnettua matemaattista logiikkaa, jossa funktiosymbolit edustavat osittaisfunktioita ja muun muassa jakolaskusta voidaan puhua samaan tapaan kuin matematiikassa tavallisesti. Kun osittaisfunktiot ovat käytössä, voidaan tyypit lisätä yksinkertaisella tavalla. Riittää ajatella, että jokainen funktiosymboli hyväksyy jokaiseksi syötteen jokaisen olion jokaisesta tyyppistä, mutta funktiosymbolin tuottama tulos on määritelty vain kun kukin syöte on sille syötteenä tarkoitettua tyyppiä.

Esimerkiksi ravintolan avaamisajalle voi tällöin antaa syötteenä viikonpäivän tai kellonajan, mutta avaamisaika ei ole määritelty kun syötteenä on kellon-aika. Kuningas Charles III syntyi 1948, joten *ikä(Charles, 2005)* on 57, mutta *ikä(Charles, Camilla)*, *ikä(1948, 2005)* ja *ikä(2005, Charles)* eivät ole määritellyt.

* Merkkijonojen teorian alkeita

Merkkijonot ovat keskeisessä asemassa sekä käytännöllisessä että teoreettisessa tietojenkäsittelytieteessä, ja niiden teoriaa tutkitaan myös matematiikassa.

Merkkijonojen teoriassa on kaksi tyyppiä: merkit ja merkkijonot. Erilaisia merkkejä on ainakin yksi mutta vain äärellinen määrä. Merkkien joukkoa kutsutaan *aakkostoksi* (*alphabet*) ja merkitään usein Σ . Aakkostoksi voidaan valita esimerkiksi $\{0, 1\}$ tai kaikki 8-bittiset tavut. Luonnollisten lukujen joukkoa ei voi valita aakkostoksi, koska siinä on äärettömän monta alkioita. Merkin sisältävinä muuttujina käytetään usein pieniä kursivoituja kirjaimia kuten ”*a*”, ”*b*” ja ”*x*”.

Merkkijono tarkoittaa äärellistä määrää merkkejä laitettuna peräkkäin. Esimerkiksi ”*yliopisto*” on merkkijono. Merkkijonojen joukkoa merkitään Σ^* , missä Σ on se aakkosto, josta merkkijonon merkit poimitaan. Merkkijonon sisältävinä muuttujina käytetään usein pieniä kreikkalaisia kirjaimia kuten ” σ ”, ” ρ ” ja ” α ”.

Merkkijonojen tärkein laskutoimitus on niiden laittaminen peräkkäin. Esimerkiksi jos $\sigma = \text{kauppa}$ ja $\rho = \text{kirja}$, niin $\sigma\rho = \text{kauppakirja}$ ja $\rho\sigma = \text{kirjakauppa}$. (Logiikassa laskutoimituksetkin katsotaan funktioiksi.)

Tyhjää merkkijonoa eli merkkijonoa, jossa ei ole yhtään merkkiä, on tapana merkitä kreikkalaisella kirjaimella ε . Jokaiselle merkkijonolle σ pätee $\sigma\varepsilon = \varepsilon\sigma = \sigma$.

Monet merkkijonojen funktiot voidaan esittää kahden tai useamman tapauksen avulla siten, että jokin funktion argumenttina oleva merkkijono on joko tyhjä tai esitetään ilmoittamalla sen ensimmäinen merkki ja loppuosa. (Tämä on esimerkki *rekursiivisesta* määritelmästä. Sellaisista puhutaan lisää sivulla 57.)

Esimerkki Alla on määritelty funktio, joka ottaa merkkijonosta nollat pois.

- (a) $\text{nollatpois}(\varepsilon) = \varepsilon$
- (b) $\text{nollatpois}(0\sigma) = \text{nollatpois}(\sigma)$
- (c) $\text{nollatpois}(a\sigma) = a\text{nollatpois}(\sigma)$, jos $a \neq 0$

Esimerkiksi

$$\begin{aligned}
 & \text{nollatpois}(12030) \\
 = & 1\text{nollatpois}(2030) & (c) \\
 = & 12\text{nollatpois}(030) & (c) \\
 = & 12\text{nollatpois}(30) & (b) \\
 = & 123\text{nollatpois}(0) & (c) \\
 = & 123\text{nollatpois}(\varepsilon) & (b) \\
 = & 123\varepsilon & (a) \\
 = & 123 & \sigma\varepsilon = \sigma
 \end{aligned}$$

Esimerkki Alla on määritelty merkkijonojen laittaminen peräkkäin. Siinä jälkimmäinen merkkijono on joko tyhjä tai muodostuu merkistä a ja sen perässä olevasta merkkijonosta ρ .

$$\begin{aligned}
 \sigma\varepsilon &= \sigma \\
 \sigma(a\rho) &= (\sigma a)\rho
 \end{aligned}$$

Jos esimerkiksi $\sigma = \text{maa}$ ja $\rho = \text{liero}$, niin $\sigma\rho$ voidaan laskea seuraavasti. Kuten muuallakin matematiikassa, sulkeet ohjaavat lausekkeen rakennetta. Ne eivät ole osa lausekkeen tuottamaa merkkijonoa. Ne voi jättää pois, jos lausekkeen rakenne on selvä ilman niitä. Alla sulkeet näyttävät osapuolina olevien merkkijonojen rajat kunnes jäljellä on vain yksi epätyhjä merkkijono.

$$\begin{aligned}
 \sigma\rho &= (\text{maa})(\text{liero}) \\
 &= (\text{maal})(\text{iero}) \\
 &= (\text{maali})(\text{ero}) \\
 &= (\text{maalie})(\text{ro}) \\
 &= (\text{maali}er)(o) \\
 &= \text{maali}er\varepsilon \\
 &= \text{maali}er
 \end{aligned}$$

□

10. Määrittele edellä esitetyllä tavalla funktio nurin, joka kääntää merkkijonon takaperin. Esimerkiksi $\text{nurin}(\text{talo}) = \text{olat}$.

11. Jos $\sigma\rho = a$, niin mitä voidaan päätellä σ :sta ja ρ :sta?

Merkkijonojen yhtäsuuruus voidaan tutkia seuraavasti.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon \\ \varepsilon &\neq a\sigma \\ a\sigma &\neq \varepsilon \\ a\sigma &\neq b\rho, \text{ jos } a \neq b \\ a\sigma &= a\rho, \text{ jos ja vain jos } \sigma = \rho \end{aligned}$$

12. Miten voidaan tutkia, onko σ lyhyempi kuin ρ ? Käytä symboleita " $<$ " ja " $\not<$ " tarkoittamaan on / ei ole lyhyempi.

2.3 Yhtäsuuruuden lakeja

Yhtäsuuruus on koulusta tuttu käsite: se on se, jota merkitään symbolilla ”=”. Yleensä yhtäsuuruuden lait esitellään olettaen, että ”=”-merkin kummallakin puolella on puheenaiheen olio, esimerkiksi luku. Sellainen esittely jättää kertomatta, miten yhtäsuuruutta pitää käsitellä silloin, kun sen jommallakummalla tai molemmilla puolilla on määrittelemätön lauseke. Tässä alaluvussa käsitellään päättelymisessä hyödyllisiä yhtäsuuruuden lakeja, ottaen huomioon, että lausekkeet voivat olla määrittelemättömiä.

Kun lauseke on määrittelemätön, ei vertailu ole tosi eikä epätosi

Ilmaus ”*vasen = oikea*” on *yhtäsuuruus* (*equality*). Se vertaa, tuottavatko lausekkeet *vasen* ja *oikea* saman arvon. Varmaankin tutuinta on käyttää sitä vertaamaan lukuja, mutta sitä voidaan käyttää muissakin puheenaiheissa. Esimerkiksi *isä(William) = puoliso(Camilla)* on totta.

Yhtäsuuruuteen liittyy kuitenkin ongelma: mitä se tarkoittaa silloin, kun sen jompikumpi tai kumpikaan puoli ei tuota arvoa, jota verrata? Esimerkiksi mitä tarkoittaa $x = \frac{1}{0}$?

Tämä ongelma on vaikeampi kuin miltä ehkä näyttää. Siksi kirjallisuudessa esiintyy vaihtoehtoisia käytäntöjä. Valitaanpa niistä mikä tahansa, jostakin yhtäsuuruuden tutusta ominaisuudesta joudutaan luopumaan. Kyse ei ole siitä, että jokin käytäntö olisi matemaattisesti oikea ja muut matemaattisesti vääriä, vaan että ne kaikki ovat matemaattisesti oikeita, mutta johtavat erilaisiin ”=”-merkin käyttöä koskeviin sääntöihin. Kannattaa valita käytäntö, joka on kätevä päättelyissä ja joka edellyttää mahdollisimman vähän muutoksia totuttuihin ajattelutapoihin.

Lienee turvallista väittää, että useimmat matemaatikot eivät hyväksy tosiksi vertailuja, joissa toinen puoli tuottaa ja toinen puoli ei tuota arvoa. Esimerkiksi $\frac{x}{0} = 1$ on sellainen. Vaikeampi on päättää suhtautuminen vertailuihin, joiden kumpikaan puoli ei tuota arvoa, kuten $\frac{x}{0} = \sqrt{-x^2 - 1}$. Kaikkein hankalimpia ovat vertailut, joissa on sama määrittelemätön lauseke molemmiin puoliin, kuten $\frac{x}{0} = \frac{x}{0}$.

Tässä kirjassa on käytäntönä, että mikään vertailu, jonka jompikumpi tai kumpikaan puoli ei tuota arvoa, ei ole tosi. Edes $\frac{x}{0} = \frac{x}{0}$ ei ole tosi. Mikään niistä ei ole myöskään epätosi. Myöskään mikään $\neq$ -vertailu, jonka jompikumpi tai kumpikin puoli on määrittelemätön, ei ole tosi eikä epätosi. Esimerkiksi $\frac{x}{0} \neq 1$ ei ole tosi eikä epätosi, eikä $\frac{x}{0} \neq \frac{x}{0}$ ole tosi eikä epätosi. Näiden valintojen syitä ei voi käsitellä vielä, mutta niitä tullaan käsittelemään sivulla 68.

Niinpä symbolien ”=”, ” $\neq$ ”, ”<”, ”>”, ” $\leq$ ” ja ” $\geq$ ” merkitykset tässä kirjassa voidaan ilmaista seuraavasti:

Lähtökohta 2.9 Olkoot *vasen* ja *oikea* lausekkeita. Tarkastellaan mitä tahansa tilannetta.

(a) $\text{vasen} = \text{oikea}$ on siinä tilanteessa

- tosi, jos ja vain jos sekä vasen että oikea ovat määriteltyjä, ja niiden tuottamat arvot ovat samat.
- epätosi, jos ja vain jos sekä vasen että oikea ovat määriteltyjä, mutta niiden tuottamat arvot ovat erit.

(b) $\text{vasen} \neq \text{oikea}$ on

- tosi täsmälleen silloin kun $\text{vasen} = \text{oikea}$ on epätosi.
- epätosi täsmälleen silloin kun $\text{vasen} = \text{oikea}$ on tosi.

(c) $\text{vasen} < \text{oikea}$ on siinä tilanteessa

- tosi, jos ja vain jos sekä vasen että oikea ovat määriteltyjä, ja vasen tuottaa pienemmän arvon kuin oikea .
- epätosi, jos ja vain jos sekä vasen että oikea ovat määriteltyjä, mutta arvo, jonka vasen tuottaa, ei ole pienempi kuin arvo, jonka oikea tuottaa.

(d) $\text{vasen} > \text{oikea}$ tarkoittaa samaa kuin $\text{oikea} < \text{vasen}$.

(e) $\text{vasen} \leq \text{oikea}$ on siinä tilanteessa

- tosi, jos ja vain jos sekä vasen että oikea ovat määriteltyjä, ja niiden tuottamat arvot ovat samat tai vasen tuottaa pienemmän arvon kuin oikea .
- epätosi, jos ja vain jos sekä vasen että oikea ovat määriteltyjä, mutta niiden tuottamat arvot eivät ole samat eikä vasen tuota pienempää arvoa kuin oikea .

(f) $\text{vasen} \geq \text{oikea}$ tarkoittaa samaa kuin $\text{oikea} \leq \text{vasen}$.

Lähtökohdassa 2.9 ”siinä tilanteessa” korostaa, että onko esimerkiksi $\text{vasen} < \text{oikea}$ tosi, voi riippua muuttujien arvoista. Voi olla, että se on jossakin tilanteessa eli jollakin muuttujien arvojen yhdistelmällä tosi, jossakin toisessa epätosi ja jossakin kolmannessa ei kumpaakaan. Esimerkiksi $\frac{3}{x} < 2$ on tosi kun $x = 6$, epätosi kun $x = 1$ eikä kumpaakaan kun $x = 0$. Matematiikassa ei kuitenkaan tavallisesti kirjoiteta ”siinä tilanteessa”, joten jätämme sen jatkossa pois, paitsi kun on erityinen syy pitää se mukana.

Lähtökohta 2.9 on kirjoitettu muodossa, joka korostaa sitä, että kun vasen tai oikea tai kumpikaan ei ole määritelty, ei vertailu ole tosi eikä epätosi. Huomaamme, että vaikka väitteiden jakaminen tosiin ja epätosiin toimii hyvin usein, tulee matematiikassa vastaan myös tapauksia, joissa se ei riitä. Luvussa 3.1 tullaan ottamaan käyttöön kolmas totuusarvo sellaisia tapauksia varten.

Reaaliluvuilla $\text{vasen} \leq \text{oikea}$ on tosi täsmälleen silloin kun $\text{vasen} > \text{oikea}$ on epätosi, ja $\text{vasen} \leq \text{oikea}$ on epätosi täsmälleen silloin kun $\text{vasen} > \text{oikea}$ on tosi. Tätä ei kuitenkaan käytetty lähtökohdan 2.9 muotoilussa, koska reaalilukujen ulkopuolella on tavallista, että vastaava ei päde. Matematiikassa symboleita " $\leq$ ", " $<$ ", " $\geq$ " ja " $>$ " käytetään paljon myös vertailuihin, joissa kahdesta eri alkioista kumpikaan ei välttämättä ole toista pienempi. Arkielämässä esimerkki tällaisesta on purkkien mahtuminen toistensa sisään: pieni neliömäinen purkki mahtuu ison neliömäisen purkin sisään, mutta pyöreä purkki ei mahdu suunnilleen samankokoisen neliömäisen purkin sisään eikä toisinpäin.

Yhtäsuuruuden symmetrisyys

Seuraava pikkulause ilmaisee, että " $=$ " on *symmetrinen* (*symmetric*). "Siinä tilanteessa" on mukana, koska muutoin virke alkaisi matemaattisella symbolilla " vasen ". On suositeltavaa välttää virkkeen aloittamista matemaattisella symbolilla.

Pikkulause 2.10 Olkoot *vasen* ja *oikea* lausekkeita. Tarkastellaan mitä tahansa tilannetta. Siinä tilanteessa $\text{vasen} = \text{oikea}$ jos ja vain jos $\text{oikea} = \text{vasen}$.

Kutsumme sitä pikkulauseeksi emmekä esimerkiksi lauseeksi, koska se ei tarvitse pitkää eikä nerokasta perustelua, vaan seuraa jokseenkin välittömästi lähtökohdasta 2.9 (a). Jos sille kirjoitettaisiin todistus, niin siinä vain tavalla tai toisella vedottaisiin siihen, että "sekä *vasen* että *oikea*" tarkoittaa samaa kuin "sekä *oikea* että *vasen*", ja että "ovat samat" ei riipu siitä, kumpi mainitaan ensin, *vasen* vai *oikea*. Tässä asiassa olennaista on mitä lähtökohta 2.9 (a) sanoo, eikä miten siitä päästään pikkulauseeseen 2.10. Joten pohtikaamme hetki, mitä lähtökohta 2.9 (a) sanoo.

Tarkastellaan ensin mitä tahansa tilannetta, jossa *vasen* ja *oikea* tuottavat saman arvon. Havainnollistuksen vuoksi olkoon tämä arvo vaikkapa Walesin prinsessa Charlotte. Tällöin $\text{vasen} = \text{oikea}$ sievenee muotoon Charlotte = Charlotte, ja myös $\text{oikea} = \text{vasen}$ sievenee muotoon Charlotte = Charlotte. Niinpä molemmat ovat tosia. On selvää, että tämä päättely ei riipu siitä että tuotettu arvo on Charlotte eikä edes siitä että puheena ovat Britannian kuninkaalliset, vaan se pätee kun Charlotte:n tilalla on mikä tahansa arvo, esimerkiksi reaaliluku 1863.

Tarkastellaan sitten mitä tahansa tilannetta, jossa *vasen* ja *oikea* tuottavat eri arvot. Havainnollistuksen vuoksi olkoot nämä arvot vaikkapa Charlotte ja William. Tällöin $\text{vasen} = \text{oikea}$ sievenee muotoon Charlotte = William, ja $\text{oikea} = \text{vasen}$ sievenee muotoon William = Charlotte. Kumpikaan niistä ei ole tosi.

Jäljellä ovat tilanteet, joissa *vasen* tai *oikea* tai molemmat on määrittelemätön eli ei tuota arvoa lainkaan. Havainnollistuksen vuoksi *vasen* olkoon William

$$lauseke_1 = lauseke_2 = lauseke_3 = lauseke_4 = lauseke_5 = lauseke_6$$

		1863			
		1863	1863		
		1863	1863	1863	
		1863	1863	1863	1863
	1863	1863	1863	1863	1863
1863	1863	1863	1863	1863	1863

Kuva 5: Jos toden yhtäsuuruusketjun jokin lauseke saa jonkin arvon, niin muut lausekkeet saavat saman arvon

ja *oikea* olkoon puoliso(Charlotte). Koska puoliso(Charlotte) ei ole olemassa, ei kumpikaan väitteistä $vasen = oikea$ ja $oikea = vasen$ ole tosi.

13. Onko " $\neq$ " symmetrinen?
14. Onko " $\leq$ " symmetrinen?

Yhtäsuuruusketju

Pikkulause 2.10 on hyödyllinen. Matematiikan osaaminen ei kuitenkaan perustu siihen, että osataan erillisiä pikkulauseita eri tapauksiin, koska eri tapauksia on aivan liikaa. Matematiikan osaaminen perustuu siihen, että hallitaan yleisempiä periaatteita ja osataan soveltaa niitä eri tapauksiin. Tulos ”jos $vasen = oikea$ niin $oikea = vasen$ ” on melko helposti pääteltävissä yleisemmästä tosiasiasta, joka täytyy osata, tavalla, joka kannattaa osata.

Pikkulause 2.11 Tarkastellaan mitä tahansa tilannetta. Jos $n \geq 2$ ja $lauseke_1 = lauseke_2 = \dots = lauseke_n$, niin $lauseke_1 = lauseke_n$. Jos lisäksi $1 \leq i \leq n$ ja $1 \leq j \leq n$, niin $lauseke_i = lauseke_j$.

Syy siihen, että pikkulause 2.11 on pätevä, on helppo ymmärtää: jos jokin lausekkeista $lauseke_1, \dots, lauseke_n$ saa jonkin arvon, niin yhtäsuuruuksien vuoksi sen oikealla puolella oleva lauseke saa saman arvon, senkin oikealla puolella oleva lauseke saa saman arvon ja niin edelleen viimeiseen lausekkeeseen saakka. Sama pätee vasemmalla puolella. Niinpä jokainen mainittu lauseke saa saman arvon. Tätä on havainnollistettu kuvassa 5 tapauksella, jossa $n = 6$ ja $lauseke_3$ on 1863.

Pikkulause 2.10 saadaan pikkulauseesta 2.11 seuraavasti. Säilytetään ”Tarkastellaan mitä tahansa tilannetta.” Valitaan sopivat n , $lauseke_1$ ja niin edelleen:

n	$lauseke_1$	$lauseke_2$	i	j
2	$vasen$	$oikea$	2	1

Lisätään ”olkoot *vasen* ja *oikea* lausekkeita”, koska niitten nimistä ei näy että ne ovat lausekkeita mutta ne tulevat lausekkeiden paikalle. Kun nämä valinnat sijoitetaan pikkulauseeseen 2.11, sen loppuosasta tulee:

Jos $2 \geq 2$, $vasen = oikea$, $1 \leq 2 \leq 2$ ja $1 \leq 1 \leq 2$, niin $oikea = vasen$.

Koska $2 \geq 2$, $1 \leq 2 \leq 2$ ja $1 \leq 1 \leq 2$ ovat aina totta, ei niitä tarvitse olettaa. Jättämällä ne pois saadaan

Jos $vasen = oikea$, niin $oikea = vasen$.

Muuten samalla tavalla, mutta valitsemalla $lauseke_1$:ksi $oikea$ ja $lauseke_2$:ksi $vasen$ saadaan ”jos $oikea = vasen$, niin $vasen = oikea$ ”. Niistä yhteensä tulee ” $vasen = oikea$ jos ja vain jos $oikea = vasen$ ”.

Äkkipäätä saattaa näyttää siltä, että pikkulauseella 2.11 voisi johtaa $\frac{x}{0} = \frac{x}{0}$ valitsemalla $lauseke_1$:ksi $\frac{x}{0}$, i :ksi 1 ja j :ksi 1. Mutta se ei onnistu, koska pikkulauseen 2.11 jos-osa vaatii $n \geq 2$. Siitä seuraa, että se vaatii myös $lauseke_1 = lauseke_2$. Niinpä pikkulauseella 2.11 voi johtaa $\frac{x}{0} = \frac{x}{0}$ vasta kun käytettävissä on sellainen $lauseke_2$, että $\frac{x}{0} = lauseke_2$. Lähtökohdan 2.9 (a) vuoksi sellaista ei ole olemassa.

15. Päteekö ”jos $n \geq 2$ ja $lauseke_1 \neq lauseke_2 \neq \dots \neq lauseke_n$, niin $lauseke_1 \neq lauseke_n$ ”?
16. Päteekö ” $lauseke \leq lauseke$ ”? Jollei päde, niin mikä on väljin mahdollinen oletus, jonka vallitessa se pätee?

Seuraavassa tehtävässä saat käyttää sitä, että jos $vasen$, $keski$ ja $oikea$ ovat lausekkeita, ja jos $vasen \leq keski$ ja $keski \leq oikea$, niin $vasen \leq oikea$.

17. Päteekö ”jos $n \geq 2$ ja $lauseke_1 \leq lauseke_2 \leq \dots \leq lauseke_n$, niin $lauseke_1 \leq lauseke_n$ ”?

Tilalle-merkintä

Edellä luki ”valitsemalla $lauseke_1$:ksi $\frac{x}{0}$ ” eikä ”valitsemalla $lauseke_1 = \frac{x}{0}$ ” siksi, että lähtökohdan 2.9 (a) mukaan ”=” tarkoittaa lausekkeiden tuottamien arvojen (esimerkiksi lukujen) samuutta eikä lausekkeiden samuutta. Esimerkiksi ” $1 + 1$ ” ja ” 2 ” ovat eri lausekkeita. Ne eroavat toisistaan muun muassa siten, että ensimmäisessä esiintyy ja jälkimmäisessä ei esiinny yhteenlaskun symboli ”+”. Silti on oikein kirjoittaa $1 + 1 = 2$. Se johtuu siitä, että $1 + 1$ ja 2 tuottavat aina saman luvun, ja ”=” vertaa lukuja eikä sitä miten luvut on saatu aikaan. Edellä ei kuitenkaan ollut tavoitteena sanoa, että $lauseke_1$ tuottaa saman luvun kuin $\frac{x}{0}$, vaan että $lauseke_1$:n tilalle laitetaan $\frac{x}{0}$.

Ilmaukset tyyliin ” $lauseke_1$:ksi $\frac{x}{0}$ ” ovat kömpelöitä. Siksi otamme käyttöön symbolin $\hookrightarrow$. Esimerkiksi ” $lauseke_1 \hookrightarrow \frac{x}{0}$ ” tarkoittaa samaa kuin ” $lauseke_1$:ksi

$\frac{x}{0}$ ”, ja ” $i \Leftarrow 1$ ” tarkoittaa samaa kuin ” i :ksi 1”. Kutsumme symbolia ” $\Leftarrow$ ” *tilalle-merkinnäksi*. Kirjallisuudessa sille ei ole vakiintunutta merkintää. Melko paljon käytetään seuraavaa merkintää, jossa on mukana myös se kohde, johon sijoitetaan: *kohde[lauseke/muuttuja]*.

18. Ilmaise ” $\Leftarrow$ ”-merkinnällä, mitkä sijoitukset *vasen* $\Leftarrow$... ja niin edelleen tehtiin tehtävän 17 mallivastauksen vaiheessa $n \geq 4$.

Määrittelemätön lauseke ei ole yhtäsuuri itsensä kanssa

Jokainen luku on tietenkin itsensä kanssa yhtäsuuri. Esimerkiksi $7 = 7$ ja $1863 = 1863$. Muissakin puheenaiheissa pätee, että kukin olio on itsensä kanssa yhtäsuuri. Esimerkiksi Charles = Charles. Niinpä jos x on mikä tahansa muuttuja, on $x = x$ aina tosi. Mutta lausekkeille vastaava ei päde. Esimerkiksi $\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ ei ole aina tosi, koska se ei ole tosi kun $x = 0$. Tämä ero aiheutuu siitä, että muuttuja ei voi olla määrittelemätön mutta lauseke voi, kuten lähtökohdassa 2.8 sanotaan.

Seuraava pikkulause ilmaisee, milloin lauseke on itsensä kanssa yhtäsuuri ja milloin ei ole. Se on välitön seuraus lähtökohdasta 2.9 (a).

Pikkulause 2.12 Tarkastellaan mitä tahansa tilannetta. Väite *lauseke = lauseke* on tosi jos ja vain jos *lauseke* on määritelty.

Nytkin väite on tilannekohtainen, eli saattaa riippua muuttujien arvoista. Esimerkiksi $\sqrt{x} = \sqrt{x}$ on tosi kun $x \geq 0$, ja muulloin se ei ole tosi eikä epätosi.

Lausekkeen sijoitus muuttujan tilalle yhtäsuuruudessa

Esimerkissä 2.1 laskettiin $160 + 3t - 3t = 160$. Näin yksinkertainen lasku lasketaan tavallisesti yhtenä askeleena. Silti on hyvä tiedostaa, että se muodostuu useasta perustason askeleesta. Siinä käytetään hyväksi sitä, että kun mistä tahansa luvusta vähennetään sama luku, saadaan 0. Esimerkissä $3t - 3t = 0$. Toiseksi, kun lukuun lisätään 0, se ei muutu. Esimerkissä $160 + 0 = 160$.

Mutta tässä ei ollut vielä kaikki. Kuten sivulla 15 muistutettiin, yhteen- ja vähennyslasku ovat keskenään samanarvoiset ja etenevät vasemmalta oikealle, ellei sulkeilla määrätä toisin. Siksi $160 + 3t - 3t$ tarkoittaa $(160 + 3t) - 3t$. Niinpä tarvitaan yksi päättelyaskel ryhmittelemään se uudelleen muotoon $160 + (3t - 3t)$, jotta voitaisiin soveltaa sitä, että $3t - 3t = 0$.

Yksityiskohtainen päättely on siis seuraava:

$$160 + 3t - 3t = 160 + (3t - 3t) = 160 + 0 = 160$$

Jo koulussa opetettiin, että kaikilla luvuilla a , b ja c pätee $a - a = 0$, $a + 0 = a$ ja $a + b - c = a + (b - c)$. Syvällisemmin kyse on niin sanotuista kunta-aksiomista,

joita käsitellään alaluvussa 5.6. Tässä alaluvussa käsitellään kahta muuta asiaa, joita esimerkki $160 + 3t - 3t = 160$ käyttää.

Ensiksi, miten siitä, että $a - a = 0$ on aina tosi, päästään siihen, että $3t - 3t = 0$? Se ei ole täysin itsestään selvää, sillä siitä, että $a - a = 0$ on aina tosi, ei saa päätellä $\frac{1}{0} - \frac{1}{0} = 0$! Jälkimmäisessä on vikana tietenkin se, että $\frac{1}{0}$ ei tuota lukua, mutta lupaus $a - a = 0$ koskee vain lukuja. Sen a on muuttuja, ja kuten lähtökohta 2.8 sanoo, muuttujan arvo ei voi olla määrittelemätön. Saamme seuraavan päättelysäännön.

Pikkulause 2.13 Tarkastellaan mitä tahansa tilannetta. Jos jokaiselle puheenaiheen arvolle a pätee $\text{vasen}(a) = \text{oikea}(a)$, ja jos lauseke on määritelty, niin $\text{vasen}(\text{lauseke}) = \text{oikea}(\text{lauseke})$.

Tässä ”tilanne” muodostuu lauseke:ssa esiintyvien muuttujien arvoista sekä muiden vasen :ssa ja/tai oikea :ssa esiintyvien muuttujien kuin a arvoista. Muuttuja a saa esiintyä lauseke:ssa. Jos se esiintyy, niin kannattaa ajatella, että ilmauksen ” $\text{vasen}(a) = \text{oikea}(a)$ ” a on eri muuttuja kuin lauseke:n a , vaikka niillä on sama nimi. Näin siksi, että ilmauksessa ” $\text{vasen}(a) = \text{oikea}(a)$ ” a :n arvo vaihtelee ja muiden muuttujien arvot otetaan tarkasteltavasta tilanteesta, mutta lauseke:n kaikkien muuttujien, myös a :n, arvot otetaan tarkasteltavasta tilanteesta.

Koska $a - a = 0$ on aina tosi ja koska $3t$ on aina määritelty, valitsemalla $\text{vasen}(a) \Leftarrow a - a$ ja $\text{oikea}(a) \Leftarrow 0$ ja $\text{lauseke} \Leftarrow 3t$ saadaan pikkulauseesta 2.13, että $3t - 3t = 0$ on aina tosi.

19. Sovella pikkulauseetta 2.13 yhtäsuuruuteen $(a + 1)(a - 1) = a^2 - 1$ ja lausekkeeseen $1 + \sqrt{x}$. Näytä vastauksesi ” $\Leftarrow$ ”-merkinnällä.
20. Oletetaan, että a ei esiinny kummassakaan lausekkeista $\text{vasen}(a)$ eikä $\text{oikea}(a)$. Sievennä pikkulause 2.13 muotoon, jossa ei mainita a :ta. Vihje: lopputuloksen sanoma asia ei ole mikään nerokkuuden huipentuma.

Sen, että $160 + 0 = 160$ tietää melkein jokainen yli kymmenvuotias, mutta silti on mielekästä tarkastaa, saako sen johdettua pikkulauseesta 2.13. Nimittäin jollei saisi, olisi se varoitusmerkki, joka olisi syytä ottaa vakavasti: se kertoisi, että pikkulause 2.13 on puutteellinen tai jotenkin vialla. Mutta kyllä sen saa. Koska $a + 0 = a$ on aina tosi ja koska 160 on määritelty, on $160 + 0 = 160$ tosi.

Syy, miksi pikkulause 2.13 pätee, toimii myös usealle muuttujalle yhtäaikaan:

Pikkulauseen 2.13 yleistys monelle muuttujalle.

Tarkastellaan mitä tahansa tilannetta. Jos jokaiselle puheenaiheen arvojen $a_1, \dots, a_n$ yhdistelmälle pätee $\text{vasen}(a_1, \dots, a_n) = \text{oikea}(a_1, \dots, a_n)$, ja jos lauseke₁, ..., lauseke_n ovat määritellyt, niin $\text{vasen}(\text{lauseke}_1, \dots, \text{lauseke}_n) = \text{oikea}(\text{lauseke}_1, \dots, \text{lauseke}_n)$.

Niinpä siitä, että kaikilla luvuilla a, b ja c pätee $a + b - c = a + (b - c)$, ja siitä, että 160 ja $3t$ ovat määritellyt, saa päätellä $160 + 3t - 3t = 160 + (3t - 3t)$.

Itse asiassa yhtäsuuruuden $\text{vasen}(a) = \text{oikea}(a)$ (tai vastaava muuttujilla $a_1, \dots, a_n$) ei tarvitse olla tosi jokaisella a :n arvolla, sillä riittää, että se on tosi niillä arvoilla, jotka *lauseke* tuottaa. Esimerkiksi $(\sqrt{a})^2 = a$ on tosi aina kun $a \geq 0$, joten jos $\text{lauseke} \geq 0$, niin $(\sqrt{\text{lauseke}})^2 = \text{lauseke}$.

21. Miksi riitti kirjoittaa ”jos $\text{lauseke} \geq 0$ ”, eikä tarvittu myös ”ja *lauseke* on määritetty”?

Eikä tämä rajoitu yhtäsuuruuksiin, vaan esimerkiksi jos jokaiselle a :n arvolla pätee $\text{vasen}(a) \geq \text{oikea}(a)$, niin jokaisessa tilanteessa, jossa *lauseke* on määritetty, pätee $\text{vasen}(\text{lauseke}) \geq \text{oikea}(\text{lauseke})$. Kun kaavat on esitelty (alaluku 3.1), voidaan sama asia ilmaista vielä näitäkin paljon yleisemmässä muodossa ”jos jokaiselle a :n arvolla pätee $\text{kaava}(a)$, niin jokaisessa tilanteessa, jossa *lauseke* on määritetty, pätee $\text{kaava}(\text{lauseke})$ ”. Siihen saakka tyydymme niihin sovelluksiin, joihin edellä oleva muotoilu riittää.

Väitteen ja päättelyn vastaesimerkki

Väitteen *vastaesimerkki* (*counter-example*) on yksittäistapaus, jossa väite ei ole tosi. Yksikin vastaesimerkki riittää tekemään väitteestä epäpätevän. Esimerkiksi $x = -7$ on vastaesimerkki väitteelle ”jos $x < 2$ niin $x^2 + 3x < 10$ ”. Nimittäin jos sijoitetaan $x \leftarrow -7$, niin saadaan ”jos $-7 < 2$ niin $(-7)^2 + 3(-7) < 10$ ”. Sen jos-osa ” $-7 < 2$ ” on tosi, mutta niin-osa ” $(-7)^2 + 3(-7) < 10$ ” ei ole tosi, koska $(-7)^2 + 3(-7) = 49 - 21 = 28 \not< 10$. Niinpä koko jos–niin-väite on epätosi.

(Symboli ” $\not<$ ” tarkoittaa ”ei $<$ ”. Reaaliluvuilla se tarkoittaa samaa kuin ” $\geq$ ”. Jos–niin-muotoinen väite on tosi täsmälleen silloin, kun jos-osa on epätosi tai niin-osa on tosi.)

Jos tehtävässä pyydetään vastaesimerkkiä, eikä ole täsmennetty millaista vastaesimerkkiä halutaan, niin mikä tahansa vastaesimerkki kelpaa vastaukseksi. Tällöin ei tavallisesti kannata vastata esimerkiksi yrittämällä kuvailla kaikki vastaesimerkit, sillä sellaisesta vastauksesta tulee helposti sekava ja se saattaa jättää epäselväksi, onko kuvauksen mukaisia olioita olemassa. Tavallisesti on parasta antaa yksi konkreettinen vastaesimerkki. Ellei ole välittömästi selvää, että se on vastaesimerkki, kannattaa antaa myös laskelma tai muu sellainen, joka näyttää, että väite ei todellakaan päde sillä.

22. Anna vastaesimerkki väitteelle ”luku kerrottuna itsellään tuottaa aina vähintään yhtä paljon kuin luku itse” eli ” $x^2 \geq x$ ”.

Päättelyn *vastaesimerkki* (*counter-example*) on yksittäistapaus, jossa päättely ei ole pätevä. Päättelyn pätevyyden määritelmä vaihtelee liian paljon tässä käsiteltäväksi. Sen verran voi kuitenkin sanoa, että päättely on epäpätevä ainakin silloin,

kun sen lähtökohdat pitävät paikkansa mutta lopputulos ei pidä. Yksikin vastaesimerkki riittää tekemään päättelystä epäpätevän.

23. Perustele antamalla helppo vastaesimerkki, että ei ole oikein päätellä, että jos $\text{vasen} \neq \text{oikea}$ niin $\text{lauseke}(\text{vasen}) \neq \text{lauseke}(\text{oikea})$.

Lausekkeen osan korvaaminen yhtäsuurella

Edellä perusteltiin, että $3t - 3t = 0$, mutta vielä ei ole perusteltu, miksi siitä saa päätellä, että $160 + (3t - 3t) = 160 + 0$. Milloin ja miksi on oikein korvata lausekkeen osa yhtäsuurella? Tämä ei ole itsestään selvää. Vastaava korvaaminen on vain harvoin sallittua symbolien " $\neq$ ", " $<$ ", " $\leq$ ", " $>$ " ja " $\geq$ " tapauksessa. Esimerkiksi ei ole oikein päätellä, että jos $x < 2$ niin $x^2 + 3x - 4 < 2^2 + 3 \cdot 2 - 4$, sillä $2^2 + 3 \cdot 2 - 4 = 6$, mutta $(-7)^2 + 3 \cdot (-7) - 4 = 24 \not< 6$.

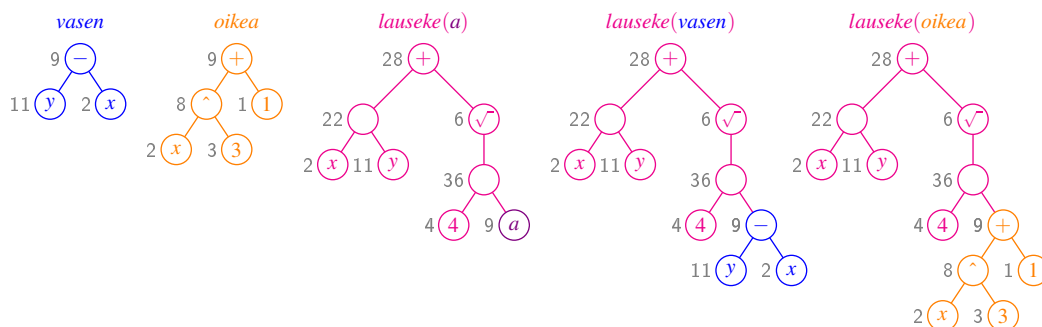
24. Perustele antamalla vastaesimerkki, että ei ole oikein päätellä, että jos $x \neq 2$ niin $x^2 + 3x - 4 \neq 2^2 + 3 \cdot 2 - 4$.

Silti on oikein päätellä, että jos vasen ja oikea ovat mitkä tahansa reaalilukujen lausekkeet ja $\text{vasen} = \text{oikea}$, niin $\text{vasen}^2 + 3 \cdot \text{vasen} - 4 = \text{oikea}^2 + 3 \cdot \text{oikea} - 4$. Toisin kuin symboleita " $\neq$ ", " $<$ " ja niin edelleen, symbolia " $=$ " saa varsin vähäisin rajoituksin käyttää isomman lausekkeen sisällä. Ainoa rajoitus aiheutuu määrittelemättömistä lausekkeista. Ei saa erehtyä päättelemään esimerkiksi, että koska $0 = 0$, pätee $\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$. Niinpä jos lauseketta $\text{lauseke}(\text{vasen})$ halutaan sieventää yhtäsuuruudella $\text{vasen} = \text{oikea}$, niin riittää tarkastaa, että jompikumpi niin syntyvä isompi lauseke on määritelty. Alla "tilanne" muodostuu lauseke :ssa a poislukien, vasen :ssa ja/tai oikea :ssa esiintyvien muuttujien arvoista.

Pikkulause 2.14 Olkoon a muuttuja ja olkoot $\text{lauseke}(a)$, vasen ja oikea lausekkeita. Tarkastellaan mitä tahansa tilannetta. Jos $\text{vasen} = \text{oikea}$ ja ainakin toinen lausekkeista $\text{lauseke}(\text{vasen})$ ja $\text{lauseke}(\text{oikea})$ on määritelty, niin $\text{lauseke}(\text{vasen}) = \text{lauseke}(\text{oikea})$.

Todistus. Oletuksen $\text{vasen} = \text{oikea}$ vuoksi sekä vasen että oikea tuottaa arvon, ja ne tuottavat saman arvon (lähtökohta 2.9 (a)). Lausekkeen arvon laskeminen riippuu vain lausekkeen saamista arvoista, ei siitä, miten ne arvot on tuotettu. Niinpä $\text{lauseke}(a)$:n tulos riippuu vain siitä, mikä arvo tulee a :n tilalle, ei siitä, tuotettiin ko se arvo laskemalla vasen vai laskemalla oikea . Tämä tulos voi olla määrittelemätön, jolloin sekä $\text{lauseke}(\text{vasen})$ että $\text{lauseke}(\text{oikea})$ on määrittelemätön. Muussa tapauksessa se on määritelty, jolloin sekä $\text{lauseke}(\text{vasen})$ että $\text{lauseke}(\text{oikea})$ on määritelty, ja ne tuottavat saman arvon. $\square$

Pikkulausetta 2.14 ja sen todistusta on havainnollistettu kuvassa 6. Siinä $\text{vasen} \Leftarrow y - x$ ja $\text{oikea} \Leftarrow x^3 + 1$ ja $\text{lauseke}(a) \Leftarrow xy + \sqrt{4a}$, joten $\text{lauseke}(\text{vasen})$



Kuva 6: Yhtäsuurten lausekkeiden sijoittaminen lausekkeeseen

on $xy + \sqrt{4(y-x)}$ ja $\text{lauseke}(\text{oikea})$ on $xy + \sqrt{4(x^3+1)}$. Kuvaan on merkitty harmaalla kunkin osalausekkeen tuottama arvo tilanteessa $x = 2 \wedge y = 11$. Siinä tilanteessa $\text{vasen} = y - x = 11 - 2 = 9$ ja $\text{oikea} = x^3 + 1 = 2^3 + 1 = 8 + 1 = 9$. Kun $a = 9$, pätee $\text{lauseke}(a) = xy + \sqrt{4a} = 2 \cdot 11 + \sqrt{4 \cdot 9} = 22 + \sqrt{36} = 22 + 6 = 28$. Myös $\text{lauseke}(\text{vasen}) = 28$ ja $\text{lauseke}(\text{oikea}) = 28$, koska vasen ja oikea tuottavat 9, ja siitä eteenpäin lausekkeiden $\text{lauseke}(\text{vasen})$ ja $\text{lauseke}(\text{oikea})$ laskeminen etenee samalla tavalla eli samoin kuin lausekkeen $\text{lauseke}(9)$ laskeminen.

Koska $3t - 3t = 0$ on aina tosi ja koska $160 + 0$ on aina määritelty, valitsemalla $\text{vasen} \leftarrow 3t - 3t$ ja $\text{oikea} \leftarrow 0$ saadaan lausekkeesta $160 + a$ ja pikkulauseesta 2.14, että $160 + (3t - 3t) = 160 + 0$ on aina tosi.

25. Yhtäsuuruus $(\sqrt{x})^2 = x$ on tosi täsmälleen silloin kun $x \geq 0$. Sovella pikkulauseetta 2.14 siihen ja lausekkeeseen $\frac{1}{a-1}$ käyttäen " $\leftarrow$ "-merkintää. Missä tilanteissa tämä soveltaminen on sallittua?
26. Nyt on päätelty $160 + 3t - 3t = 160 + (3t - 3t) = 160 + 0 = 160$. Mikä antaa luvan päätellä edelleen, että $160 + 3t - 3t = 160$?

2.4 Päättelyoperaattoreita ja päättelyketjuja

Tässä alaluvussa käydään läpi osa pätevän päättelyn säännöistä. Jotta niiden rooli tyypillisessä matemaattisessa päättelyssä konkretisoituisi, ne esitetään esimerkin 2.1 yhtälön ratkaisemisen yhteydessä. Tyypillisesti matemaattinen päättely etenee pitemmin askelin kuin tässä alaluvussa. Tarkoitus ei ole alkaa käyttää niin pieniä askelia kuin tässä alaluvussa. Tarkoitus on oppia, minkälaisista perusosista ja miten, ensimmäisen asteen yhtälöiden ratkaisemisessa käytännössä käytettävät askeleet koostuvat. Siitä jatketaan monimuotoisempaan päättelyyn myöhemmissä (ala)luvuissa.

Vaikka esimerkki käsittelee reaalilukuja, tässä luvussa keskitytään päättelyn yleisiin lakeihin eikä reaalilukujen lakeihin. Siksi reaalilukujen tavallisilla laskusäännöillä johdettavissa olevat yhtäsuuruudet kuten $\frac{2t}{2} = t$ otetaan annettuina, eikä niitä pureta pikkuaskeliksi. Reaalilukujen laskusääntöjä puretaan pikkuaskeliksi luvussa 5.6.

Esimerkki päättelyaskelista koostuvasta päättelystä

Esimerkin 2.1 yhtälö voidaan ratkaista seuraavasti.

Esimerkki 2.15

1	$160 + 3t = 5t$	
2	$\Leftrightarrow 160 + 3t - 3t = 5t - 3t$	molemmilta puolilta vähennettiin $3t$
3	$\Leftrightarrow 160 = 2t$	laskettiin $160 + 3t - 3t = 160$ ja $5t - 3t = 2t$
4	$\Leftrightarrow \frac{160}{2} = \frac{2t}{2}$	molemmat puolet jaettiin 2:lla
5	$\Leftrightarrow 80 = t$	laskettiin $\frac{160}{2} = 80$ ja $\frac{2t}{2} = t$
6	$\Leftrightarrow t = 80$	yhtäsuuruuden puolet vaihdettiin keskenään

□

Jokaisella rivillä paitsi ensimmäisellä on ” $\Leftrightarrow$ ” ja *kaava*. Ensimmäisellä rivillä on pelkkä kaava. Esimerkin jokainen kaava on muotoa *vasen = oikea*, missä *vasen* ja *oikea* ovat lausekkeita. Myös *vasen $\neq$ oikea*, *vasen $<$ oikea*, *vasen $>$ oikea*, *vasen $\leq$ oikea* ja *vasen $\geq$ oikea* ovat kaavoja. On olemassa myös muunlaisia kaavoja. Kaavoja käsitellään perusteellisesti alaluvussa 3.1. Siihen saakka riittää tietää, että kaava on muodollinen ilmaus, joka tilanteesta riippuen on tai ei ole totta.

Esimerkin jokainen kolmikko muotoa $kaava_{i-1} \Leftrightarrow kaava_i$, missä $kaava_i$ on sen rivin kaava jolla ” $\Leftrightarrow$ ” esiintyy ja $kaava_{i-1}$ on edellisen rivin kaava, on *päättelyaskel*. Esimerkiksi $\frac{160}{2} = \frac{2t}{2} \Leftrightarrow 80 = t$ on päättelyaskel ja $80 = t \Leftrightarrow t = 80$ on päättelyaskel. On olemassa myös päättelyaskelia, joissa $\Leftrightarrow$:n tilalla on jokin muu symboli. Tässä alaluvussa tulee niitäkin.

Toisaalta kaikki tämän alaluvun päättelyaskeleet liittyvät tavalla tai toisella kaavoihin muotoa *vasen = oikea*. Muunlaisiin kaavoihin liittyvät päättelyaskeleet käsitellään myöhemmin, jotta tässä alaluvussa ei tulisi liikaa asiaa.

Yhtäpitävyys

Seuraavaksi käsitellään sitä, mitä ” $\Leftrightarrow$ ” tarkoittaa. Sitä varten kannattaa palauttaa mieleen, että kuten sivuilla 8, 11 ja 11 sanotaan, ”tilanne” tarkoittaa mitä tahansa käytössä olevien muuttujien arvojen yhdistelmää; päättely tapahtuu usein oletusten alaisuudessa; ja tilanne on mahdollinen, jos ja vain jos se toteuttaa voimassa olevat oletukset.

Määritelmä 2.16 Olkoot *vasen* ja *oikea* kaavoja. Ilmaus *vasen* $\Leftrightarrow$ *oikea* tarkoittaa, että *oikea* on tosi täsmälleen samoissa mahdollisissa tilanteissa kuin *vasen*. Sen nimi on *yhtäpitävyys*. Yhtäpitävyysketju $kaava_1 \Leftrightarrow kaava_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow kaava_n$, missä $n \geq 3$, tarkoittaa, että jokainen siihen sisältyvistä yhtäpitävyyksistä $kaava_i \Leftrightarrow kaava_{i+1}$, missä $1 \leq i < n$, pätee.

Yhtäpitävyys ei ole kaava, vaan vertaa kahta kaavaa. Tätä korostaaksemme emme sano yhtäpitävyyttä todeksi, epätodeksi emmekä määrittelemättömäksi, vaan *päteväksi* tai *epäpäteväksi*. (Kaavaa saa sanoa sekä todeksi että päteväksi.) Alla on esimerkkejä pätevistä yhtäpitävyyksistä, kun kaikki tilanteet ovat mahdollisia.

<i>vasen</i> $\Leftrightarrow$ <i>oikea</i>	huomautus
$x = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 2$	kumpikin on tosi kun $x = 1$ eikä muulloin
$x^2 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq x + 2 \leq 4$	kumpikin on tosi kun $-2 \leq x \leq 2$ eikä muull.
$\frac{6}{x} = 3 \Leftrightarrow 2 = x$	kumpikin on tosi kun $x = 2$ eikä muulloin
$x = x + 1 \Leftrightarrow 1 = 2$	kumpikaan ei ole tosi missään tilanteessa
$1 + 2 = 3 \Leftrightarrow 0x = 0$	kumpikin on tosi jokaisessa tilanteessa

Kuten esimerkistä $\frac{6}{x} = 3 \Leftrightarrow 2 = x$ käy ilmi, *vasen* $\Leftrightarrow$ *oikea* voi olla pätevä siitä huolimatta, että jommallakummalla tai molemmilla puolilla on määrittelemättömän lauseke. Kun $x = 0$, ei $\frac{6}{x} = 3$ ole tosi. Mutta silloin myöskään $2 = x$ ei ole tosi, joten kumpikaan puoli ei ole tosi. Siksi tilanne $x = 0$ ei kumoa yhtäpitävyyttä $\frac{6}{x} = 3 \Leftrightarrow 2 = x$. Sitä ei kumoa myöskään tilanne $x = 2$, koska siinä kumpikin puoli on tosi, eivätkä tilanteet joissa x ei ole 0 eikä 2, koska niissä kumpikaan puoli ei ole tosi.

Määrittelemättömän kaavan ja määritellyn mutta epätoden kaavan yhtäpitävyys sallitaan siksi, että yhtäpitävyyksiä voitaisiin käyttää esittämään yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisuja silloinkin kun ratkaistava (epä)yhtälö sisältää lausekkeen, joka ei ole aina määritelty. Tarkastellaan esimerkkinä

$$\frac{6}{x} = 3 \Leftrightarrow 6 = 3x \Leftrightarrow x = 2$$

Kun $x = 2$, on sen jokainen kaava tosi, sillä pitää paikkansa, että $\frac{6}{2} = 3$ ja $6 = 3 \cdot 2$ ja $2 = 2$. Kun $x \neq 2$ ja $x \neq 0$, on sen jokainen kaava epätosi. Kun $x = 0$, on $\frac{6}{x} = 3$ määrittelemätön, mutta $6 = 3x$ ja $x = 2$ ovat epätosia.

Alaluvussa 3.1 tullaan huomaamaan, että määrittelemättömän lausekkeen sisältävä kaava voi olla tosi. Tässä alaluvussa esiintyy kuitenkin vain kaavoja muotoa *vasen = oikea*, *vasen < oikea* ja niin edelleen (missä *vasen* ja *oikea* ovat lausekkeita). Sellainen ei ole tosi, jos se sisältää määrittelemättömän lausekkeen (lähtökohdat 2.9 ja 2.7).

Tilanne tarkoittaa käytössä olevien muuttujien arvojen yhdistelmää (sivu 8). Esimerkit $x = x + 1 \Leftrightarrow 1 = 2$ ja $1 + 2 = 3 \Leftrightarrow 0x = 0$ havainnollistavat sitä, että muuttuja, joka esiintyy yhtäpitävyyden yhdellä puolella, on käytössä, vaikka se ei esiintyisikään myös toisella puolella.

Esimerkki $x = x + 1 \Leftrightarrow 1 = 2$ havainnollistaa myös sitä, että yhtäpitävyyden pätevyys ei edellytä, että sen kumpikaan puoli olisi milloinkaan tosi. Itse asiassa jokainen yhtäpitävyys, jonka kumpikaan puoli ei ole milloinkaan tosi, on pätevä. Esimerkiksi $1 = 2 \Leftrightarrow 5 > 6$ on pätevä.

Myös $x = x + 1 \Leftrightarrow 0y > 2$ on pätevä, vaikka $x = x + 1$ ja $0y > 2$ käyttävät eri muuttujia. Ei ole olemassa sellaista x :n ja y :n arvojen yhdistelmää, että $x = x + 1$ on tosi mutta $0y > 2$ ei ole tosi, koska $x = x + 1$ ei ole milloinkaan tosi. Myöskään ei ole olemassa sellaista x :n ja y :n arvojen yhdistelmää, että $0y > 2$ on tosi mutta $x = x + 1$ ei ole tosi, koska $0y > 2$ ei ole milloinkaan tosi. Ei siis ole olemassa sellaista x :n ja y :n arvojen yhdistelmää, että toinen puoli on tosi ja toinen ei ole tosi, joten $x = x + 1 \Leftrightarrow 0y > 2$ on pätevä.

27. Anna esimerkki yhtäpitävyydestä, jonka toisella puolella esiintyy muuttuja a ja toisella puolella ei esiinny, ja jonka kumpikin puoli on tosi jokaisessa tilanteessa. Voiko sellainen yhtäpitävyys olla (a) pätevä (b) epäpätevä?

Yhtäpitävyyden vastaesimerkki

Yhtäpitävyyden *vasen* $\Leftrightarrow$ *oikea* *vastaesimerkki* (*counter-example*) on mahdollinen tilanne, jossa toinen puoli on tosi mutta toinen puoli ei ole tosi. Yhtäpitävyys on pätevä jos ja vain jos sillä ei ole ainoatakaan vastaesimerkkiä. Yksikin vastaesimerkki riittää tekemään yhtäpitävyydestä epäpätevän.

Esimerkiksi $x = 1$ on vastaesimerkki yhtäpitävyydelle $x = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 8$. Nimittäin kun $x = 1$, sievenee sen vasen puoli muotoon $1 = 1$, joka on tosi; mutta oikea puoli sievenee muotoon $1 + 1 = 8$, joka ei ole tosi. Sen sijaan $x = 2$ ei ole sille vastaesimerkki, sillä $2 = 1$ ei ole tosi, mutta myöskään $2 + 1 = 8$ ei ole tosi.

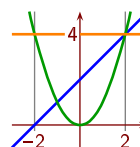
28. Yhtäpitävyydellä $x = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 8$ on toinenkin vastaesimerkki. Mikä se on?
 29. Perustele, että yhtäpitävyydellä $x = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 8$ ei ole lisää vastaesimerkkejä.

Alla on havainnollistettu värien avulla sekä $x = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 8$ että muita epäpäteviä yhtäpitävyyksiä. Jokaiselle on annettu yksi vastaesimerkki. Se koostuu x :n arvosta ja päätelmästä, joista selviää onko vasen puoli tosi ja onko oikea puoli tosi sillä x :n arvolla.

epäpätevä yhtäpitävyys			vastaesimerkki		
vasen	$\Leftrightarrow$	oikea	x	vasen(x)	oikea(x)
$x = 1$	$\Leftrightarrow$	$x + 1 = 8$	1	$1 = 1$	$1 + 1 = 2 \neq 8$
$x^2 \leq 4$	$\Leftrightarrow$	$x + 2 \leq 4$	-3	$(-3)^2 = 9 \not\leq 4$	$-3 + 2 = -1 \leq 4$
$3x = 0$	$\Leftrightarrow$	$\frac{6}{x} = 3$	0	$3 \cdot 0 = 0 = 0$	$\frac{6}{0}$ ei ole määritelty
$1 > 0$	$\Leftrightarrow$	$1x > 0x$	-5	$1 > 0$	$1 \cdot (-5) = -5 \not> 0 = 0 \cdot (-5)$

Yhtäpitävyydellä $x^2 \leq 4 \Leftrightarrow x + 2 \leq 4$ on äärettömän monta muutakin vastaesimerkkiä kuin $x = -3$. Kuten alta voi päätellä, jokainen luku, joka on pienempi kuin -2 , on sen vastaesimerkki. On tavallista, että yhtäpitävyydellä on monta vastaesimerkkiä.

	$x < -2$	$-2 \leq x \leq 2$	$x > 2$
$x^2 \leq 4$	epätosi	tosi	epätosi
$x + 2 \leq 4$	tosi	tosi	epätosi



Seuraavissa tehtävissä, jos vastauksessasi on useita erillisiä lukuja tai lukuvälejä, kirjoita niiden väliin ” $\vee$ ”. Symboli ” $\vee$ ” tarkoittaa, että jompikumpi tai molemmat sen vasemmalla ja oikealla puolella olevista kaavoista on tosi. Esimerkiksi jos olet sitä mieltä, että vastaesimerkkejä ovat 2 ja kaikki viitosta suuremmat luvut, kirjoita $x = 2 \vee x > 5$. Saat myös käyttää symbolia ” $\neq$ ”.

30. Anna yhtäpitävyyden $3x - 2 = 7 \Leftrightarrow x = 9$ kaikki vastaesimerkit.
31. Anna yhtäpitävyyden $1 > 0 \Leftrightarrow 1x > 0x$ kaikki vastaesimerkit.
32. Anna yhtäpitävyyden $3x = 0 \Leftrightarrow \frac{6}{x} = 3$ kaikki vastaesimerkit.
33. Anna yhtäpitävyyden $\frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq 0$ kaikki vastaesimerkit.
34. Anna yhtäpitävyyden $x^2 > 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq 0$ kaikki vastaesimerkit.

Kun tehtävässä pyydetään vastaesimerkkiä, niin ellei erikseen muuta sanota, riittää antaa yksi. Se saa olla mikä tahansa niistä.

Yhtäpitävyys oletuksen alaisuudessa

Alla on oletuksen alaisuudessa päteviä yhtäpitävyyksiä.

oletus	vasen	$\Leftrightarrow$	oikea
$x \geq 0$	$x^2 \leq 4$	$\Leftrightarrow$	$x + 2 \leq 4$
$x \neq 1$	$\frac{x^2-1}{x-1} = 7$	$\Leftrightarrow$	$x^2 - 1 = 7x - 7$
$3x + y = 1$	$5x + 2y = 4$	$\Leftrightarrow$	$5x + 2(1 - 3x) = 4$

Ensimmäinen yhtäpitävyys voi olla hyödyksi kun x ei ole negatiivinen esimerkiksi siksi, että se edustaa aikaa aloitushetkestä alkaen.

Keskimmäistä yhtäpitävyyttä käytettiin esimerkissä 2.4. Siinä yhtälö $\frac{x^2-1}{x-1} = 7$ muunnettiin toisen asteen yhtälöksi kertomalla molemmat puolet $(x-1)$:llä. Niin saa tehdä kuitenkin vain kun kertoja ei ole nolla. Tästä selvittiin jakamalla käsitely kahteen tapaukseen: $x = 1$ ja $x \neq 1$. Tapauksesta $x = 1$ huomattiin heti, että se ei voi olla juuri, koska se aiheuttaa nollalla jakamisen. Tapaus $x \neq 1$ voidaan ratkaista luvussa 2.5 käsiteltävillä toisen asteen yhtälön ratkaisukeinoilla. Sen juuret ovat 1 ja 6. Niistä ykkönen ei kelpaa koska se ei noudata oletusta $x \neq 1$, mutta kuutonen kelpaa.

Alin esimerkki on hyödyllinen yhtälöistä $3x + y = 1$ ja $5x + 2y = 4$ muodostettua paria ratkaistaessa. Koska molempien yhtälöiden täytyy toteutua, voidaan ensimmäistä yhtälöä käyttää oletuksena, jonka alaisuudessa voidaan jälkimmäistä yhtälöä muokata siten, että y poistuu. Tätä menetelmää käsitellään sivulta 85 alkaen.

Sivulla 11 määriteltiin, että tilanne on mahdollinen jos ja vain jos se toteuttaa jokaisen voimassa olevan oletuksen. Jos lisätään uusi oletus, se saattaa muuttaa mahdollisia tilanteita mahdottomiksi, mutta ei toisinpäin. Esimerkiksi jos k :n pitää olla Suomen kaupunki, jossa on iso huvipuisto, niin mahdollisia tilanteita ovat $k = \text{Helsinki}$, $k = \text{Kauhava}$ ja $k = \text{Tampere}$. Jos lisätään oletus, että k :ssa pitää olla yliopisto, niin $k = \text{Kauhava}$ muuttuu mahdottomaksi. Vaikka myös Jyväskylässä on yliopisto, ei Jyväskylä muutu mahdolliseksi kun lisätään vaatimus että k :ssa pitää olla yliopisto, sillä se ei muuta miksikään sitä tosiasiaa, että $k = \text{Jyväskylä}$ on mahdoton, koska Jyväskylässä ei ole isoa huvipuistoa.

Niinpä oletuksen lisääminen voi muuttaa epäpätevän yhtäpitävyyden päteväksi sulkemalla pois kaikki vastaesimerkit. Esimerkiksi oletuksen $x \geq 0$ lisääminen muuttaa yhtäpitävyyden $x^2 \leq 4 \Leftrightarrow x + 2 \leq 4$ päteväksi sulkemalla pois kaikki tilanteet, joissa $x < -2$. Oletuksen $x \neq 1$ lisääminen muuttaa yhtäpitävyyden $\frac{x^2-1}{x-1} = 7 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 7x - 7$ päteväksi sulkemalla pois ainoan vastaesimerkin $x = 1$.

Sen sijaan oletuksen lisääminen ei voi muuttaa pätevää yhtäpitävyyttä epäpäteväksi. Nimittäin sellainen muutos vaatisi, että synnyttäisiin uusi vastaesimerkki. Kuten sivulla 40 todettiin, yhtäpitävyyden vastaesimerkki on (1) mahdollinen tilanne, jossa (2) toinen puoli on ja toinen puoli ei ole tosi. Oletuksen lisääminen ei voi muuttaa mahdotonta tilannetta mahdolliseksi, joten se ei voi synnyttää uutta vastaesimerkkiä saattamalla (1):n voimaan. Se ei myöskään vaikuta siihen, mitkä kaavat ovat tosia missäkin tilanteessa. Siksi se ei voi synnyttää vastaesimerkkiä saattamalla (2):n voimaan.

Yhtäpitävyys on yhteenveto jokaisesta mahdollisesta tilanteesta, eikä siis puhu mistään yksittäisestä tilanteesta (paitsi jos vain yksi tilanne on mahdollinen).

Tämä on tärkeää muistaa varsinkin silloin kun yhtäpitävyys on epäpätevä. Esimerkiksi tieto, että $1 > 0 \Leftrightarrow 1x > 0x$ on epäpätevä, kertoo että $1x > 0x$ on epätosi jollakin x :n arvolla, mutta se ei sellaisenaan takaa, että $1x > 0x$ olisi epätosi niillä x :n arvoilla, joista sillä kertaa ollaan kiinnostuneita. Esimerkiksi jos päättely on jaettu kolmeen haaraan, joista yhdessä $x < 0$, toisessa $x = 0$ ja kolmannessa $x > 0$, niin $1 > 0 \Leftrightarrow 1x > 0x$ on pätevä kolmannessa haarassa.

Kun sanotaan että yhtäpitävyys on pätevä ilman että samalla mainitaan, mistä tilanteista se muodostaa yhteenvedon eli minkä oletusten alaisuudessa sen väitetään olevan pätevä, niin tarkoitetaan, että se on pätevä niiden oletusten alaisuudessa, joiden alaisuudessa sillä hetkellä ollaan. Kun halutaan sanoa, että yhtäpitävyys on pätevä ilman mitään oletuksia, voidaan sanoa ”aina pätevä”.

Yhtäpitävyyden symmetrisyys

Määritelmässä 2.16 lukee: ”*oikea* on tosi täsmälleen samoissa mahdollisissa tilanteissa kuin *vasen*”. Saman voi ilmaista pitemmin muodossa ”jokaisessa mahdollisessa tilanteessa, jossa *vasen* on tosi, myös *oikea* on tosi; ja jokaisessa mahdollisessa tilanteessa, jossa *oikea* on tosi, myös *vasen* on tosi”. Tämä muoto korostaa sitä, että ” $\Leftrightarrow$ ” on symmetrinen. Vaikka $\Leftrightarrow$:n symmetrisyys on ilmeinen, on se niin tärkeä asia, että se kannattaa tehdä näkyväksi.

Pikkulause 2.17 Olkoot *vasen* ja *oikea* kaavoja.

Jos *vasen* $\Leftrightarrow$ *oikea*, niin *oikea* $\Leftrightarrow$ *vasen*.

Pikkulause 2.17 muistuttaa paljon pikkulauseetta 2.10. Eroina on, että pikkulauseessa 2.10 *vasen* ja *oikea* ovat lausekkeita ja niitä verrataan symbolilla ”=”, mutta pikkulauseessa 2.17 *vasen* ja *oikea* ovat kaavoja ja niitä verrataan symbolilla ” $\Leftrightarrow$ ”. Koska ”=” tulkitaan kukin tilanne erikseen, pikkulause 2.10 puhuu mistä tahansa tilanteesta. Koska ” $\Leftrightarrow$ ” edustaa kaikista mahdollisista tilanteista tehtyä yhteenvedoa, pikkulause 2.17 puhuu kaikkien mahdollisten tilanteiden joukosta. Tämä ei kuitenkaan näy pikkulauseessa 2.17 sellaisenaan, vaan sisältyy ” $\Leftrightarrow$ ”:lle määritelmässä 2.16 annettuun merkitykseen.

Ero näkyy myös siten, että *vasen* = *oikea* on tilanteesta riippuen tosi, epätosi tai määrittelemätön, mutta *vasen* $\Leftrightarrow$ *oikea* on tilanteesta riippumatta pätevä tai epäpätevä. Edelleen, kun lisätään tai vähennetään oletuksia joiden alaisuudessa ollaan, ei *vasen* = *oikea* vaihda totuusarvoa (koska totuusarvo katsotaan kussakin tilanteessa erikseen), mutta *vasen* $\Leftrightarrow$ *oikea* saattaa muuttua epäpätevästä päteväksi tai toisinpäin (koska niiden tilanteiden joukko, joiden perusteella pätevyys määrittyy, saattaa muuttua).

Yhtäpitävyysetju

Perustelemme seuraavaksi, että jos $kaava_1 \Leftrightarrow kaava_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow kaava_n$, missä $n \geq 2$, ja jos tarkasteltavassa mahdollisessa tilanteessa yksikin kaavoista $kaava_1$,

$kaava_1 \Leftrightarrow kaava_2 \Leftrightarrow kaava_3 \Leftrightarrow kaava_4 \Leftrightarrow kaava_5 \Leftrightarrow kaava_6$					
		tosi			
		tosi	tosi		
		tosi	tosi	tosi	
	tosi	tosi	tosi	tosi	tosi
tosi	tosi	tosi	tosi	tosi	tosi

Kuva 7: Jos tilanne on mahdollinen ja jokin kaava yhtäpitävyysketjussa on tosi, niin jokainen on tosi

..., $kaava_n$ on tosi, niin jokainen niistä on tosi. (Siis siinä tilanteessa tosi.) Kuva 7 havainnollistaa tätä. Siinä $n = 6$ ja tarkastellaan jotakin mahdollista tilannetta, jossa $kaava_3$ on tosi. Koska $kaava_3 \Leftrightarrow kaava_4$, on myös $kaava_4$ tosi. Koska $kaava_4 \Leftrightarrow kaava_5$, on myös $kaava_5$ tosi. Tätä jatkuu oikealle viimeiseen kaavaan saakka. Pikkulauseen 2.17 ansiosta $kaava_3 \Leftrightarrow kaava_2$ ja $kaava_2 \Leftrightarrow kaava_1$, joten sama tapahtuu myös vasemmalle.

Tässä esimerkissä aloitettiin $kaava_3$:sta ja kaavoja oli kaikkiaan kuusi. Mutta on selvää ja matematiikassa yleisesti hyväksyttyä, että sama tapahtuu riippumatta kaavojen määrästä (kunhan niitä on ainakin kaksi) ja siitä, mikä niistä valitaan aloituskohdaksi.

Vastaavasti jos jossakin mahdollisessa tilanteessa jokin $kaava_i$ ei ole tosi, niin mikään $kaava_i$ ei ole tosi. Nimittäin jos vaikkapa $kaava_5$ ei ole tosi, niin myöskään $kaava_3$ ei ole tosi, koska, kuten juuri näimme, jos $kaava_3$ olisi tosi, myös $kaava_5$ olisi tosi. On selvää ja matematiikassa yleisesti hyväksyttyä, että samoin käy jos $kaava_5$:n ja $kaava_3$:n tilalla ovat mitkä tahansa kaksi kaavaa kaavoista $kaava_1, \dots, kaava_n$.

Olemme perustelleet seuraavan tuloksen. Kutsumme sitäkin pikkulauseeksi, koska sen perustelemiseksi riitti vedota helppotajuisella tavalla määritelmässä 2.16 symbolille " $\Leftrightarrow$ " ja sen ketjuttamiselle annettuun merkitykseen. Ei tarvittu pitkää eikä nerokasta päättelyä.

Pikkulause 2.18 Jos $n \geq 2$ ja $kaava_1 \Leftrightarrow kaava_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow kaava_n$, niin $kaava_1 \Leftrightarrow kaava_n$. Jos lisäksi $1 \leq i \leq n$ ja $1 \leq j \leq n$, niin $kaava_i \Leftrightarrow kaava_j$.

Tämä tulos muistuttaa paljon pikkulausetta 2.11. Nytkin lausekkeiden, " $=$ "-merkin ja yksittäisten tilanteiden sijaan pikkulause 2.18 käsittelee kaavoja " $\Leftrightarrow$ "-merkillä muodostaen yhteenvedon kaikista mahdollisista tilanteista.

Tässä alaluvussa perustellaan esimerkin 2.15 jokainen päättelyaskel. Kun se on tehty, kertoo pikkulause 2.18, että esimerkin ylin kaava on yhtäpitävä alimman

kanssa, eli $160 + 3t = 5t \Leftrightarrow t = 80$. Se sanoo, että yhtälön $160 + 3t = 5t$ juuret ovat $t = 80$ ja vain se.

Pikkulauseen 2.12 vastine kaavoille on *kaava* $\Leftrightarrow$ *kaava*. Se on pätevä. Sille on kuitenkin niin vähän käyttöä, että sitä ei kannata esittää pikkulauseena. Ehkä silti kannattaa kiinnittää huomiota seuraavaan eroon: jokaiselle kaavalle pätee *kaava* $\Leftrightarrow$ *kaava*, mutta lähtökohdan 2.9 (a) vuoksi on olemassa lausekkeita, joille *lauseke* $=$ *lauseke* ei ole tosi. Esimerkiksi $\frac{x}{0} = \frac{x}{0}$ ei ole tosi.

Yhtäsuuruuksia koskevia yhtäpitävyyksiä

Seuraavaksi muokkaamme pikkulauseen 2.10 sopivaksi $\Leftrightarrow$ -päätelyyn. Muok-
kaustarve tulee siitä, että pikkulause 2.10 puhuu yksittäisistä tilanteista, mutta ” $\Leftrightarrow$ ” tekee yhteenvedon jokaisesta mahdollisesta tilanteesta.

Pikkulause 2.19 Jos *vasen* ja *oikea* ovat lausekkeita, niin
vasen $=$ *oikea* $\Leftrightarrow$ *oikea* $=$ *vasen*.

Todistus. Tarkastellaan mitä tahansa mahdollista tilannetta. Pikkulauseen 2.10 vuoksi *vasen* $=$ *oikea* jos ja vain jos *oikea* $=$ *vasen*.

Niinpä *oikea* $=$ *vasen* on tosi täsmälleen samoissa mahdollisissa tilanteis-
sa kuin *vasen* $=$ *oikea* on tosi. Valitsemalla *vasen* $\Leftarrow$ *vasen* $=$ *oikea* ja *oikea* $\Leftarrow$
oikea $=$ *vasen* tuottaa määritelmä 2.16 *vasen* $=$ *oikea* $\Leftrightarrow$ *oikea* $=$ *vasen*. $\square$

Huomaa, että ”*vasen*” ja ”*oikea*” olivat tässä todistuksessa kahdessa eri roolis-
sa: määritelmän 2.16 mukaisina ja pikkulauseen 2.19 mukaisina.

35. Mitkä äskeisen todistuksen ilmauksen ”*vasen* $\Leftarrow$ *vasen* $=$ *oikea*” symboleista edustavat lausekkeita ja mitkä kaavoja?
36. Onko ensimmäinen ”mahdollisissa” tarpeen pikkulauseen 2.19 todistuksessa? En-
tä jälkimmäinen ”mahdollisissa”?

Esimerkin 2.15 viimeinen päättelyaskel on $80 = t \Leftrightarrow t = 80$. Se saadaan pikku-
lauseesta 2.19 valitsemalla *vasen* $\Leftarrow$ 80 ja *oikea* $\Leftarrow$ t .

Pikkulauseen 2.11 perustelussa todettiin, että jos toden yhtäsuuruusketjun jo-
kin lauseke saa jonkin arvon, niin jokainen lauseke saa saman arvon. Siitä seuraa
pikkulauseen 2.19 yleistys, joka sanoo, että yhtäsuuruusketjun osien järjestyksellä
ei ole väliä.

Pikkulause 2.20 Jos $n \geq 2$ ja $i_1, \dots, i_n$ ovat $1, \dots, n$ mahdollises-
ti eri järjestyksessä, niin *lauseke*₁ $=$ *lauseke*₂ $=$... $=$ *lauseke*_n $\Leftrightarrow$
lauseke _{i_1} $=$ *lauseke* _{i_2} $=$... $=$ *lauseke* _{i_n} .

Jokaisessa mahdollisessa tilanteessa tosien yhtäsuuruuksien lisäys ja poisto

Tarkastelemme seuraavaksi esimerkin 2.15 toista päättelyaskelta $160 + 3t - 3t = 5t - 3t \Leftrightarrow 160 = 2t$. Esimerkissä 2.15 se perusteltiin toteamalla, että laskettiin $160 + 3t - 3t = 160$ ja $5t - 3t = 2t$. Näytämme, miten saman ajatuksen voi esittää tiiviimmin. Perustelemme sen ja yleistämme perustelun pikkulauseeksi, jota tulemme käyttämään muissakin päättelyaskelissa.

Yhtäsuuruudet $160 + 3t - 3t = 160$ ja $5t - 3t = 2t$ eivät perustu mihinkään tapauskohtaiseen tietoon vaan pelkästään reaalilukujen laskusääntöihin, joten ne ovat tosia jokaisessa tilanteessa. Siksi ne ovat tosia jokaisessa mahdollisessa tilanteessa. Tällaisen tiedon käyttäminen päättelyssä voidaan näyttää tiiviimmin kuin esimerkissä 2.15 vaikkapa seuraavasti:

$$160 + 3t = 5t \Leftrightarrow 160 = 160 + 3t - 3t = 5t - 3t = 2t \Leftrightarrow \frac{160}{2} = \frac{2t}{2}$$

Siinä $160 = 160 + 3t - 3t = 5t - 3t = 2t$ yhdistää esimerkin 2.15 vaiheen $160 + 3t - 3t = 5t - 3t$, laskelmat $160 + 3t - 3t = 160$ ja $5t - 3t = 2t$ sekä vaiheen $160 = 2t$. Sen, että

$$160 + 3t - 3t = 5t - 3t \Leftrightarrow 160 = 160 + 3t - 3t = 5t - 3t = 2t$$

on pätevä, voi määritelmän 2.16 mukaan perustella osoittamalla, että jokaisessa mahdollisessa tilanteessa, jossa toinen puoli on tosi, myös toinen on.

Olettakaamme ensin, että oikea puoli on tosi. Koska se on tosi, ovat kaikki siellä mainitut yhtäsuuruudet tosia. Koska $160 + 3t - 3t = 5t - 3t$ on yksi niistä ja koska se on sama kuin vasen puoli, on vasen puoli tosi.

Nyt olkoon vasen puoli tosi. Oikean puolen yhtäsuuruus $160 + 3t - 3t = 5t - 3t$ on tosi, koska se on sama kuin vasen puoli. Yhtäsuuruudet $160 = 160 + 3t - 3t$ ja $5t - 3t = 2t$ ovat tosia reaalilukujen laskusääntöjen perusteella. Siksi oikean puolen jokainen yhtäsuuruus on tosi.

Myös tarvitsee perustella, että

$$160 = 160 + 3t - 3t = 5t - 3t = 2t \Leftrightarrow 160 = 2t$$

on pätevä. Jos sen vasen puoli on tosi, niin oikea puoli on tosi pikkulauseen 2.11 nojalla. Olkoon oikea puoli tosi. Yhtäsuuruudet $160 = 160 + 3t - 3t$ ja $5t - 3t = 2t$ ovat tosia reaalilukujen laskusääntöjen perusteella. Vielä tarvitsee perustella $160 + 3t - 3t = 5t - 3t$. Yhtäsuuruusketjun $160 + 3t - 3t = 160 = 2t = 5t - 3t$ reunimmaisista yhtäsuuruuksista ovat tosia reaalilukujen laskusääntöjen perusteella, ja keskimäinen siksi, että oikea puoli on tosi. Pikkulauseen 2.11 nojalla $160 + 3t - 3t = 5t - 3t$ on tosi.

Vaikka edellä pääteltiin esimerkkitapauksesta, on yleispätevää, että yhtäsuuruusketjun totuusarvo ei muutu kun sen mihin tahansa kohtiin lisätään tosia yhtäsuuruuksia. Sama pätee poistamiseen. Tämäkin on hyödyksi niin usein, että se kannattaa ilmaista pikkulauseena.

Pikkulause 2.21 Jos kaava *keski* on muodostettu kaavasta *vasen* lisäämällä jokaisessa mahdollisessa tilanteessa tosia yhtäsuuruuksia, niin $\text{vasen} \Leftrightarrow \text{keski}$. Jos kaava *oikea* on muodostettu kaavasta *keski* poistamalla jokaisessa mahdollisessa tilanteessa tosia yhtäsuuruuksia, niin $\text{keski} \Leftrightarrow \text{oikea}$.

Jos molemmat ehdot toteutuvat, niin $\text{vasen} \Leftrightarrow \text{keski} \Leftrightarrow \text{oikea}$. Pikkulauseen 2.18 ansiosta saa kirjoittaa $\text{vasen} \Leftrightarrow \text{oikea}$.

Esimerkin 2.15 vaihe $160 + 3t - 3t = 5t - 3t \Leftrightarrow 160 = 2t$ saadaan pikkulauseella 2.21 valitsemalla $\text{vasen} \Leftarrow 160 + 3t - 3t = 5t - 3t$ ja $\text{keski} \Leftarrow 160 = 160 + 3t - 3t = 5t - 3t = 2t$ ja $\text{oikea} \Leftarrow 160 = 2t$. Lisätyt yhtäsuuruudet ovat $160 = 160 + 3t - 3t$ ja $5t - 3t = 2t$.

37. Näytä " $\Leftarrow$ "-merkinnällä, miten esimerkin 2.15 vaihe $\frac{160}{2} = \frac{2t}{2} \Leftrightarrow 80 = t$ saadaan pikkulauseella 2.21. Kerro lisätyt yhtäsuuruudet.

(Päätely)implikaatio

Vielä on perustelematta $160 + 3t = 5t \Leftrightarrow 160 + 3t - 3t = 5t - 3t$ ja $160 = 2t \Leftrightarrow \frac{160}{2} = \frac{2t}{2}$. Siinä tulee vastaan uusia ilmiöitä, joista puhumiseksi tarvitsemme symbolin päättelyaskelille muotoa "jos *vasen*, niin *oikea*".

Uusi symbolimme on muuten samanlainen kuin määritelmässä 2.16 käyttöön otettu " $\Leftrightarrow$ ", mutta yksisuuntainen. Nytkin, koska päätely tapahtuu usein oletusten alaisuudessa, rajoitamme sen tarkastelemat tilanteet mahdollisiin. (Kuten sivulla 11 sanotaan, tilanne on mahdollinen jos ja vain jos se toteuttaa voimassa olevat oletukset.) Niinpä otamme käyttöön symbolin " $\Rightarrow$ " seuraavassa merkityksessä:

Määritelmä 2.22 Olkoot *vasen* ja *oikea* kaavoja. Ilmaus $\text{vasen} \Rightarrow \text{oikea}$ tarkoittaa, että jokaisessa mahdollisessa tilanteessa, jossa *vasen* on tosi, myös *oikea* on tosi. Sen nimi on *implikaatio* tai *päätelyimplikaatio*. Implikaatioketju $\text{kaava}_1 \Rightarrow \text{kaava}_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \text{kaava}_n$, missä $n \geq 3$, tarkoittaa, että jokainen siihen sisältyvistä implikaatiosta $\text{kaava}_i \Rightarrow \text{kaava}_{i+1}$, missä $1 \leq i < n$, pätee.

Kuten $\text{vasen} \Leftrightarrow \text{oikea}$, myöskään $\text{vasen} \Rightarrow \text{oikea}$ ei ole kaava, vaan vertaa kahden kaavaa. Emme sano myöskään sitä todeksi, epätodeksi emmekä määrittelemättömäksi, vaan päteväksi tai epäpäteväksi.

Esimerkiksi $x > 3 \Rightarrow x + 5 > 4$ on pätevä implikaatio siitä huolimatta, että kun $x = 2$, on sen oikea puoli tosi mutta vasen puoli epätosi. Ratkaisevaa on, että aina kun vasen puoli on tosi, pitää myös oikean puolen olla tosi. Esimerkissämme on näin, sillä kun $x > 3$, pätee $x + 5 > 8$, joten silloin $x + 5 > 4$, koska jokainen kahdeksaa suurempi luku on myös neljää suurempi.

Alla on kaksi esimerkkiä epäpätevistä implikaatioista.

$$\begin{aligned} x^2 = 6^2 &\Rightarrow x = 6 && \text{epäpätevä, koska } (-6)^2 = 36 = 6^2, \text{ mutta } -6 \neq 6 \\ 0 \cdot x = 0 \cdot 3 &\Rightarrow x = 3 && \text{epäpätevä, koska } 0 \cdot 2 = 0 = 0 \cdot 3, \text{ mutta } 2 \neq 3 \end{aligned}$$

Implikaation $\text{vasen} \Rightarrow \text{oikea}$ *vastaesimerkki* (*counter-example*) tarkoittaa mahdollista tilannetta, jossa *vasen* on tosi mutta *oikea* ei ole tosi. Yksikin vastaesimerkki riittää tekemään implikaatiosta epäpätevän. Toisaalta, jos implikaatiolla ei ole ainoatakaan vastaesimerkkiä, niin se on pätevä.

Implikaation $x^2 = 6^2 \Rightarrow x = 6$ tapauksessa $\text{vasen} \Leftarrow x^2 = 6^2$ ja $\text{oikea} \Leftarrow x = 6$. Sillä on vain yksi vastaesimerkki, nimittäin $x = -6$. Siinä tilanteessa *oikea* eli $x = 6$ ei tietenkään ole tosi, mutta *vasen* eli $x^2 = 6^2$ on tosi, koska $(-6)^2 = 36 = 6^2$. Tilanne $x = 6$ ei ole sille vastaesimerkki, koska siinä *oikea* on tosi. Mikään muu tilanne kuin $x = 6$ ja $x = -6$ ei ole vastaesimerkki, koska siinä *vasen* ei ole tosi.

Näimme edellä, että kun $x = 2$, on $0 \cdot x = 0 \cdot 3$ tosi mutta $x = 3$ ei ole tosi. Niinpä $x = 2$ on vastaesimerkki implikaatiolle $0 \cdot x = 0 \cdot 3 \Rightarrow x = 3$. Sillä on äärettömän monta muutakin vastaesimerkkiä, esimerkiksi $x = 4$ ja $x = 0$. Itse asiassa jokainen muu tilanne kuin $x = 3$ on sen vastaesimerkki.

Kun sanotaan että implikaatio on pätevä ilman että samalla mainitaan, mistä tilanteista se muodostaa yhteenvedon eli minkä oletusten alaisuudessa sen väitetään olevan pätevä, niin tarkoitetaan, että se on pätevä niiden oletusten alaisuudessa, joiden alaisuudessa sillä hetkellä ollaan. Kun halutaan sanoa, että implikaatio on pätevä ilman mitään oletuksia, voidaan sanoa ”aina pätevä”.

Toisinaan on hyödyllistä esittää implikaatio oikealta vasemmalle. Sitä varten otamme käyttöön symbolin ” $\Leftarrow$ ”. Ilmaus $\text{vasen} \Leftarrow \text{oikea}$ tarkoittaa samaa kuin $\text{oikea} \Rightarrow \text{vasen}$.

Määritelmistä 2.22 ja 2.16 seuraa välittömästi, että ” $\Leftrightarrow$ ” tarkoittaa samaa kuin ” $\Rightarrow$ ” vaadittuna molempiin suuntiin.

Pikkulause 2.23 Olkoot *vasen* ja *oikea* kaavoja. Tällöin $\text{vasen} \Leftrightarrow \text{oikea}$ jos ja vain jos sekä $\text{vasen} \Rightarrow \text{oikea}$ että $\text{vasen} \Leftarrow \text{oikea}$.

Tätä pikkulausetta käytetään paljon kahdella eri tavalla. Usein tiedetään, että $\text{vasen} \Leftrightarrow \text{oikea}$, ja päätellään $\text{vasen} \Rightarrow \text{oikea}$. Osuuden ” $\text{vasen} \Leftarrow \text{oikea}$ ” eli ” $\text{oikea} \Rightarrow \text{vasen}$ ” pois jättäminen on tässä käytössä luvallista. Se on samankaltaista kuin että siitä, että aurinko paistaa ja linnut laulavat, päätellään, että aurinko paistaa. Voidaan tehdä myös niin, että ” $\text{vasen} \Rightarrow \text{oikea}$ ” jätetään pois ja ” $\text{oikea} \Rightarrow \text{vasen}$ ” säilytetään. Jos aurinko paistaa ja linnut laulavat, niin linnut laulavat.

Toisessa käytössä tiedetään sekä $\text{vasen} \Rightarrow \text{oikea}$ että $\text{oikea} \Rightarrow \text{vasen}$, ja päätellään $\text{vasen} \Leftrightarrow \text{oikea}$. Varsinkin monimutkaisissa tapauksissa on tavallista, että yhtäpitävyyttä $\text{vasen} \Leftrightarrow \text{oikea}$ ei voida sujuvasti päätellä tyyliin $\text{vasen} \Leftrightarrow \text{välivaihe} \Leftrightarrow \text{välivaihe} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \text{välivaihe} \Leftrightarrow \text{oikea}$, mutta $\text{vasen} \Rightarrow \text{välivaihe} \Rightarrow \dots$

$\Rightarrow oikea$ ja $oikea \Rightarrow$ välivaihe $\Rightarrow \dots \Rightarrow vasen$ onnistuvat. Niinpä päätellään jälkimmäiset, päätellään niistä $vasen \Rightarrow oikea$ ja $oikea \Rightarrow vasen$, ja tuotetaan niistä $vasen \Leftrightarrow oikea$ pikkulauseella 2.23.

Seuraavat aiemmin mainitut epäpätevät yhtäpitävyydet ovat päteviä yhteen suuntaan:

<i>vasen</i>	<i>oikea</i>
$x^2 \leq 4$	$\Rightarrow x + 2 \leq 4$
$\frac{x^2-1}{x-1} = 7$	$\Rightarrow x^2 - 1 = 7x - 7$
$1x > 0x$	$\Rightarrow 1 > 0$

Implikaation $x^2 \leq 4 \Rightarrow x + 2 \leq 4$ voi perustella toistamalla edellä olleen taulukon. Tällä kertaa tilanteet, joissa $x < -2$, eivät ole vastaesimerkkejä, sillä $vasen \Rightarrow oikea$ sallii, että *oikea* on mutta *vasen* ei ole tosi.

	$x < -2$	$-2 \leq x \leq 2$	$x > 2$
$x^2 \leq 4$	epätosi	tosi	epätosi
$x + 2 \leq 4$	tosi	tosi	epätosi

Implikaatiosta $\frac{x^2-1}{x-1} = 7 \Rightarrow x^2 - 1 = 7x - 7$ saadaan seuraava taulukko.

	$x = 1$	$x = 6$	muut x :n arvot
$\frac{x^2-1}{x-1} = 7$	ei tosi eikä epätosi	tosi	epätosi
$x^2 - 1 = 7x - 7$	tosi	tosi	epätosi

Koska $1x = x$ ja $0x = 0$, on implikaation $1x > 0x \Rightarrow 1 > 0$ vasen puoli tosi täsmälleen silloin kun $x > 0$. Jokaisessa sellaisessa tilanteessa myös $1 > 0$ on tosi, joten myös tämä implikaatio on pätevä. Itse asiassa sen pätevyyden tarkastamisessa ei olisi tarvinnut miettiä, milloin $1x > 0x$ on tosi. Nimittäin $1 > 0$ on jokaisella x :n arvolla tosi, joten jokainen implikaatio muotoa $vasen \Rightarrow 1 > 0$ on pätevä. Jopa $1 < 0 \Rightarrow 1 > 0$ on pätevä!

Implikaatioketju

Pikkulauseen 2.18 ilmeisin vastine ” $\Rightarrow$ ”:lle on seuraava:

Jos $n \geq 2$ ja $kaava_1 \Rightarrow kaava_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow kaava_n$, niin $kaava_1 \Rightarrow kaava_n$. Jos lisäksi $1 \leq i \leq j \leq n$, niin $kaava_i \Rightarrow kaava_j$.

Huomaa, että nyt täytyy olla $i \leq j$, koska siitä, että jokin $kaava_i$ on tosi, seuraa (jos $1 \leq i < n$), että $kaava_{i+1}$ on tosi, mutta ei välttämättä seuraa (vaikka $1 < i \leq n$), että $kaava_{i-1}$ on tosi.

Pikkulauseen 2.23 ansiosta yllä olevan voi yleistää siten, että jos-osassa min-
kä tahansa yhden tai useamman " $\Rightarrow$ " tilalla saa olla " $\Leftrightarrow$ ". Tämä yleistys on niin
hyödyllinen, että se kannattaa ottaa mukaan, kun tämän kohdan asia esitetään pik-
kulauseena.

Pikkulause 2.24 Jos $n \geq 2$ ja $kaava_1 \Rightarrow_{tai \Leftrightarrow} kaava_2 \Rightarrow_{tai \Leftrightarrow} \dots$
 $\Rightarrow_{tai \Leftrightarrow} kaava_n$, niin $kaava_1 \Rightarrow kaava_n$. Jos lisäksi $1 \leq i \leq j \leq n$,
niin $kaava_i \Rightarrow kaava_j$.

Yhtäsuuruuksia koskevia implikaatioita

Pikkulauseesta 2.11 voidaan johtaa vastaava $\Rightarrow$ -versio.

Pikkulause 2.25 Jos $n \geq 2$, niin $lauseke_1 = lauseke_2 = \dots =$
 $lauseke_n \Rightarrow lauseke_1 = lauseke_n$. Jos lisäksi $1 \leq i \leq n$ ja $1 \leq j \leq n$,
niin $lauseke_1 = lauseke_2 = \dots = lauseke_n \Rightarrow lauseke_i = lauseke_j$.

Todistus. Riittää todistaa jälkimmäinen väite, koska ensimmäinen väite saadaan
siitä valitsemalla $i \Leftarrow 1$ ja $j \Leftarrow n$.

Tarkastellaan mitä tahansa mahdollista tilannetta. Jos jokin $lauseke_k =$
 $lauseke_{k+1}$ ei ole tosi, missä $1 \leq k < n$, niin $lauseke_i = lauseke_j$ ei tarvitse olla
tosi. Muussa tapauksessa pikkulauseen 2.11 mukaan $lauseke_i = lauseke_j$ on tosi.

□

Seuraavaksi johdamme pikkulauseesta 2.14 " $\Rightarrow$ "-version. Sitä varten jou-
dumme jo nyt käyttämään sivulla 89 esiteltävää ilmausta " $[lauseke]$ ", joka tar-
koittaa, että tarkasteltavassa tilanteessa $lauseke$ on määritelty. Niinpä ilmaus
" $[lauseke(vasen)] \vee [lauseke(oikea)]$ " tarkoittaa, että tarkasteltavassa tilantees-
sa $lauseke(vasen)$, $lauseke(oikea)$ tai molemmat on määritelty.

Pikkulause 2.26 Olkoon a muuttuja ja olkoot
 $lauseke(a)$, $vasen$ ja $oikea$ lausekkeita.
Jos $vasen = oikea \Rightarrow [lauseke(vasen)] \vee [lauseke(oikea)]$,
niin $vasen = oikea \Rightarrow lauseke(vasen) = lauseke(oikea)$.

Todistus. Tarkastellaan mitä tahansa mahdollista tilannetta. Jos $vasen = oikea$ ei
ole tosi, niin $lauseke(vasen) = lauseke(oikea)$ ei tarvitse olla tosi. Muussa tapauk-
sessa $vasen = oikea$ on tosi, joten jos-osan vuoksi $lauseke(vasen)$, $lauseke(oikea)$
tai molemmat on määritelty. Pikkulauseen 2.14 mukaan $lauseke(vasen) =$
 $lauseke(oikea)$.

□

Päätelyaskeleen $160 = 2t \Leftrightarrow \frac{160}{2} = \frac{2t}{2}$ suunta " $\Rightarrow$ " saadaan pikkulausees-
ta 2.26 valitsemalla $lauseke(a) \Leftarrow \frac{a}{2}$ ja $vasen \Leftarrow 160$ ja $oikea \Leftarrow 2t$. Tällöin

$lauseke(vasen)$ on $\frac{160}{2}$ ja $lauseke(oikea)$ on $\frac{2t}{2}$. Jos-osa toteutuu, koska $\frac{160}{2}$ on määritelty jokaisella t :n arvolla. Siksi niin-osa tuottaa $160 = 2t \Rightarrow \frac{160}{2} = \frac{2t}{2}$.

Suunta " $\Leftarrow$ " eli $\frac{160}{2} = \frac{2t}{2} \Rightarrow 160 = 2t$ ei onnistu pelkällä pikkulauseella 2.26, vaan tarvitaan myös reaalitylukujen laskusääntöjä ja muita pikkulauseita. Valitsemalla $lauseke(a) \Leftarrow 2a$ ja $vasen \Leftarrow \frac{160}{2}$ ja $oikea \Leftarrow \frac{2t}{2}$ pikkulauseesta 2.26 saadaan $\frac{160}{2} = \frac{2t}{2} \Rightarrow 2 \cdot \frac{160}{2} = 2 \cdot \frac{2t}{2}$, sillä $2 \cdot \frac{160}{2}$ on määritelty jokaisella t :n arvolla. Reaalitylukujen laskusäännöillä saadaan $160 = 2 \cdot \frac{160}{2}$ ja $2 \cdot \frac{2t}{2} = 2t$. Koska nämä kaksi ovat tosia jokaisessa tilanteessa, pikkulauseella 2.21 saadaan

$$2 \cdot \frac{160}{2} = 2 \cdot \frac{2t}{2} \Leftrightarrow 160 = 2 \cdot \frac{160}{2} = 2 \cdot \frac{2t}{2} = 2t \Leftrightarrow 160 = 2t$$

Olemme perustelleet alla olevan päättelyketjun.

$$\frac{160}{2} = \frac{2t}{2} \Rightarrow 2 \cdot \frac{160}{2} = 2 \cdot \frac{2t}{2} \Leftrightarrow 160 = 2 \cdot \frac{160}{2} = 2 \cdot \frac{2t}{2} = 2t \Leftrightarrow 160 = 2t$$

Siitä saadaan $\frac{160}{2} = \frac{2t}{2} \Rightarrow 160 = 2t$ pikkulauseella 2.24.

Koska nyt on perusteltu sekä $160 = 2t \Rightarrow \frac{160}{2} = \frac{2t}{2}$ että $\frac{160}{2} = \frac{2t}{2} \Rightarrow 160 = 2t$, pikkulause 2.23 tuottaa $160 = 2t \Leftrightarrow \frac{160}{2} = \frac{2t}{2}$.

38. Perustele $160 + 3t = 5t \Rightarrow 160 + 3t - 3t = 5t - 3t$ yksityiskohtaisesti.
39. Perustele $160 + 3t - 3t = 5t - 3t \Rightarrow 160 + 3t = 5t$. Näytä päättelyketju ja mainitse käytetyt pikkulauseet ja/tai muut perustelut. Ei tarvitse käyttää " $\Leftarrow$ "-merkintää eikä kertoa pikkulauseiden 2.23 ja 2.24 käyttöä.

Yhdistämällä kahden edellisen tehtävän vastaukset pikkulauseella 2.23 saadaan $160 + 3t = 5t \Leftrightarrow 160 + 3t - 3t = 5t - 3t$. Nyt kaikki esimerkin 2.15 päättelyaskeleet on perusteltu.

Vaikka pikkulausetta 2.26 käytettiin edellä yhtäpitävyyksien $160 = 2t \Leftrightarrow \frac{160}{2} = \frac{2t}{2}$ ja $160 + 3t = 5t \Leftrightarrow 160 + 3t - 3t = 5t - 3t$ perusteluissa, on tärkeää muistaa, että pikkulause 2.26 ei tuota yhtäpitävyyttä vaan vain implikaation. On tapauksia, joissa yhtäpitävyys ei päde, kuten $x = 6 \Rightarrow x^2 = 6^2$, sillä jos $x = -6$, niin $x^2 = 6^2$ on tosi mutta $x = 6$ ei ole. Kun yhtäpitävyys pätee, suunta " $\Leftarrow$ " vaatii oman perustelunsa. Suunta " $\Leftarrow$ " perusteltiin esimerkeissä $160 = 2t \Leftrightarrow \frac{160}{2} = \frac{2t}{2}$ ja $160 + 3t = 5t \Leftrightarrow 160 + 3t - 3t = 5t - 3t$ lisäämällä laskutoimitus, joka kumoaa suunnassa " $\Rightarrow$ " lisätyn laskutoimituksen vaikutuksen, ja osoittamalla reaalitylukujen laskusäännöillä, että kumoaminen toteutuu.

40. Koska nollalla ei saa jakaa, on $160 = 2t \Rightarrow \frac{160}{0} = \frac{2t}{0}$ väärin. Jos se yritetään perustella kuten edellä perusteltiin $160 = 2t \Rightarrow \frac{160}{2} = \frac{2t}{2}$, niin mikä osa päättelyä ei onnistu?

Ei ole jyrkkiä sääntöjä sille, mitkä välivaiheet päättelyssä pitää näyttää. Jos lukijan voi luottaa osaavan tehdä päättelyn helposti itsekin (eikä kyse ole esimerkiksi tentistä), niin välivaiheita ei tarvitse näyttää lainkaan. Tällöin esimerkin 2.15 tapauksessa riittää kirjoittaa $160 + 3t = 5t \Leftrightarrow t = 80$.

Tentissä olennaista on näyttää sen verran välivaiheita, että vastauksesta näkyy, että vastaaja on päättelyt oikein. Usein hyvä tapa pikkulauseen 2.21 kaltaisessa tapauksessa, joka on osa molempiin suuntiin jatkuvaa päättelyketjua, on jättää *vasen* ja *oikea* pois eli kirjoittaa vain *keski*. Alla on esimerkin 2.15 päättely esitetty siten. Se ei vie paljoa tilaa, mutta silti esittää $3t$:n vähentämisen molemmilta puolilta ja molempien puolten jakamisen kahdella sekä niistä aiheutuvat laskelmat.

$$\begin{aligned} & 160 + 3t = 5t \\ \Leftrightarrow & 160 = 160 + 3t - 3t = 5t - 3t = 2t \\ \Leftrightarrow & 80 = \frac{160}{2} = \frac{2t}{2} = t \\ \Leftrightarrow & t = 80 \end{aligned}$$

Aina täytyy näyttää selvästi, mikä on lopullinen vastaus. Siksi rivi " $\Leftrightarrow t = 80$ " on tarpeen, vaikka sen kertoman asian näkee helposti edelliseltä riviltä.

Myös on tärkeää ilmaista, esittääkö yksi- vai kaksisuuntaisen tuloksen. On iso ero sillä, väitetäänkö *lähtökohta* $\Rightarrow$ *lopullinen vastaus* vai *lähtökohta* $\Leftrightarrow$ *lopullinen vastaus*. Jos yhtälön $160 + 3t = 5t$ ratkaisu jää " $\Rightarrow$ "-tasolle, niin vastaus jättää sanomatta, että muita juuria ei ole kuin $t = 80$. Toisaalta, jos käsketään esimerkiksi perustella että $(1+x)^3 \geq 1+3x$ kun x on vähintään -1 , niin $x \geq -1 \Leftrightarrow (1+x)^3 \geq 1+3x$ on väärin. Nimittäin $(1-2)^3 = -1 \geq -5 = 1+3 \cdot (-2)$ vaikka -2 ei ole vähintään -1 .

Mahdottomasta seuraa mitä tahansa

Määritelmästä 2.22 seuraa myös, että jos *vasen* ei ole tosi missään mahdollisessa tilanteessa, niin *vasen* $\Rightarrow$ *oikea* on pätevä riippumatta siitä, mikä kaava *oikea* on ja milloin se on tosi. Siis esimerkiksi $x = x + 1 \Rightarrow x = 42$ on pätevä ja $1 < 0 \Rightarrow 1 = 2$ on pätevä ja $x \neq \frac{1}{0} \Rightarrow \frac{x}{0} > y$ on pätevä.

Tämä on esimerkki asiasta, joka näyttää olevan yksi vaikeimmista logiikan perusteiden opiskelussa: *mahdottomasta seuraa mitä tahansa* (*principle of explosion*). Se näyttää tuottavan niin hulluja lopputuloksia, että niitä ei voi hyväksyä. Mutta se ei tuota niitä oikeasti, vaan vain näennäisesti. Esimerkiksi edellä $1 = 2$ luvataan vain niille tilanteille, joille $1 < 0$ on tosi. Mutta sellaisia tilanteita ei ole olemassa, joten $1 = 2$ ei luvata millekään tilanteelle. Yleisemmin, "mahdottomasta seuraa mitä tahansa" ei koskaan tuota todellisuuden vastaista johtopäätöstä, koska sitä ei koskaan päästä käyttämään todellisissa tilanteissa, koska se nimenomaan vaatii tilanteilta, joihin sitä sovelletaan, että ne ovat mahdottomia.

Tästä seuraa, että jos virheettömistä päättelyaskelista koostuva päättely johtaa mahdottomaan lopputulokseen, niin se ei tarkoita, että lopputulos olisi todellinen, vaan että päättelyn lähtökohdissa on jotain mahdotonta. Tämä on itse asiassa jokapäiväisessä käytössä matematiikassa. Siellä esiintyy paljon niin sanottuja *ristiriitatodistuksia* (*proof by contradiction*). Ristiriitatodistus toimii siten, että oletetaan, että se mikä halutaan todistaa ei olekaan tosi, ja päätellään siitä ristiriita. Koska saatiin mahdoton lopputulos, niin jossain täytyy olla jotain vikaa. Jos päättely käytti vain päteviä päättelymenetelmiä, niin vika ei voi olla muualla kuin lähtökohdassa. Lähtökohtana oli ”se mikä halutaan todistaa ei olekaan tosi”. Niinpä se on pielessä. Siksi se, mikä haluttiin todistaa, onkin tosi.

Sen, että mahdottomasta seuraa mitä tahansa, keksi tietävästi Guillaume de Soissons 1100-luvulla. Se on kuluneiden vuosisatojen aikana osoittautunut luotettavaksi. Siksi siinä kannattaa pitäytyä. Siinä ei ole muuta vikaa kuin se, että se saattaa vaikuttaa oudolta.

Tästä asiasta kannattaa osata käyttää ainakin seuraavaa. Implikaatio on pätevä, jos ja vain jos sillä ei ole ainoatakaan vastaesimerkkiä. Tilanne on implikaation vastaesimerkki, jos ja vain jos se on mahdollinen ja lähtökohta on siinä tosi, mutta johtopäätös ei ole siinä tosi. Jos päättely johtaa hulluun lopputulokseen, se saattaa silti olla itsessään pätevä, mutta lähtökohdissa on silloin jotakin vikaa.

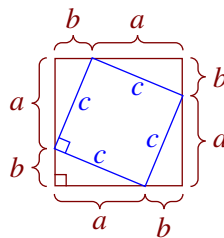
2.5 Toisen asteen polynomi ja toisen asteen yhtälö

neliöjuuri (square root) $\sqrt{\quad}$

??? Tähän kohtaan tulee toisen asteen polynomin ominaisuuksia ja toisen asteen yhtälön ratkaiseminen neliöksi täydentämällä ja juurten summa ja tulo ja ehkä myös kokonaislukukertoimisen ratkaiseminen tekijöitä kokeilemalla. Polynomin käsite ja asteluku. Polynomin jako lausekkeella $x - c$. Polynomilla on korkeintaan astelukunsa ilmoittama määrä nollakohtia.

Se, että yhtälöllä ei ole yhtään juurta, voidaan merkitä *yhtälö* $\Leftrightarrow$ **F**. Se, että jokainen reaaliluku on yhtälön juuri, voidaan merkitä *yhtälö* $\Leftrightarrow$ **T**.

41. Mikä on alla olevan kuvion ruskean (eli isoimman) neliön pinta-ala?



42. Mikä on yllä olevan kuvion yhden kolmion pinta-ala?
43. Mikä on edellä olleen kuvion sinisen (eli toiseksi isoimman) neliön pinta-ala ilmaistuna isoimman neliön ja kolmioiden pinta-alojen avulla? Sievennä saamasi lauseke mahdollisimman yksinkertaiseksi.

Sinisen neliön pinta-ala on tietysti myös c^2 . Merkitsemällä tämä yhtäsuureksi edellisen tehtävän vastauksesi kanssa ja ilmaisemalla a , b ja c suorakulmaiseen kolmioon liittyvien käsitteiden avulla saadaan kuuluisa Pythagoraan lause:

Lause 2.27 Suorakulmaisen kolmion suoran kulman vastaisen sivun pituuden neliö on yhtäsuuri kuin suoran kulman viereisten sivujen pituuksien neliöiden summa.

44. Ratkaise yhtälö $\frac{x^2+x-2}{x-1} = -3$.

2.6 Reaalilukujen suuruusjärjestys

Reaalilukujen suuruusjärjestyksestä puhutaan symboleilla " $\leq$ " ja niin edelleen. Niiden merkitys määriteltiin lähtökohdassa 2.9. Nyt tarkastellaan suuruusjärjestyksen ominaisuuksia ja opetellaan ratkaisemaan suuruusjärjestykseen liittyviä tehtäviä.

Suuruusjärjestyksen perusominaisuudet, osa 1

Suuruusjärjestyksen määritteleminen voidaan aloittaa mistä tahansa symbolista " $<$ ", " $\leq$ ", " $\geq$ " tai " $>$ ". Kun yksi niistä on määritetty, voidaan muut määritellä alla olevien yhtäpitävyyksien avulla. Symboli " $\vee$ " tarkoittaa "tai" ja " $\wedge$ " tarkoittaa "ja".

Lähtökohta 2.28 Jokaisella reaaliluvulla a ja b pätee:

$$(a) \quad a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$$

$$(b) \quad a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$$

$$(c) \quad a < b \Leftrightarrow a \leq b \wedge a \neq b$$

$$(d) \quad a > b \Leftrightarrow b < a$$

Ei ole olennaista eroa siinä, mikä niistä määritellään ensimmäiseksi. Valitsemme " $<$ ". Reaalilukujen suuruusjärjestyksen kaikki ominaisuudet seuraavat alla luetelluista lähtökohdista.

Lähtökohta 2.29 Seuraavat pätevät jokaisella reaaliluvulla a , b ja c .

$$(a) \quad \text{Täsmälleen yksi seuraavista on tosi: } a < b, a = b \text{ tai } b < a.$$

$$(b) \quad a < b < c \Rightarrow a < c$$

$$(c) \quad a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$

$$(d) \quad a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow ab > 0$$

Kohta (a) sanoo, että jos otetaan mitkä tahansa kaksi reaalilukua, niin joko ne ovat sama luku tai jompikumpi on toista pienempi. Matematiikassa esiintyy myös väljempi käsite *osittainen järjestys* (*partial order*). Se on muuten samanlainen, mutta siinä on mahdollista, että joillekin a ja b mikään vaihtoehdoista $a < b$, $a = b$ ja $b < a$ ei ole tosi. Osittainen järjestys sopii esimerkiksi vertaamaan henkilöiden jälkeläisyyttä: **Charlotte** on **Diana**:n jälkeläinen, koska **William** on **Charlotte**:n isä ja **Diana**:n poika, mutta **William** ei ole **Camilla** eikä **Camilla**:n jälkeläinen, eikä **Camilla** ole **William**:n jälkeläinen.

Mutta palataanpa takaisin reaalitylukujen suuruusjärjestykseen. Kohta (b) sanoo, että suuruusjärjestys on *transitiivinen* (*transitive*). Transitiivisuus on arjesta tuttu asia. Jos pulla maksaa enemmän kuin keksi ja kakunpala maksaa enemmän kuin pulla, niin kakunpala maksaa enemmän kuin keksi. Jos Tarja on vanhempi kuin Alexander ja Alexander on vanhempi kuin Sanna, niin Tarja on vanhempi kuin Sanna. Transitiivisuudessa on kyse tästä.

Vertailuketjuista

Usein samassa vertailuketjussa esiintyy useampaa kuin yhtä eri vertailuoperaattoria. Esimerkiksi jos ketjussa esiintyy sekä " $<$ " että " $\leq$ " mutta ei muita, niin voidaan päätellä, että ketjun viimeinen arvo on suurempi kuin ensimmäinen. Vasemmalta oikealle mentäessä kunkin " $\leq$ " kohdalla arvo joko kasvaa tai säilyy ennallaan, ja kunkin " $<$ " kohdalla se kasvaa. Koska luvattiin, että " $<$ " esiintyy ketjussa, arvo kasvaa ainakin kerran.

Vertailuketjussa esiintyvä yhtäsuuruus ei muuta ketjusta tehtävissä olevaa johdopäätöstä. Jos ketjussa esiintyy vastakkaissuuntaisia vertailuja kuten " $\leq$ " ja " $>$ ", ei ketju anna perustetta päätellä ensimmäisen ja viimeisen arvon suhteesta mitään. Jos esimerkiksi $x \leq 7 > 3$, niin x voi olla yhtä hyvin 6 tai 3 tai 1, joten se voi olla suurempi, yhtäsuuri tai pienempi kuin 3.

Seuraavassa pikkulauseessa on lueteltu vertailuketjuista tehtävissä olevat johdopäätökset riippuen siitä, mitä vertailuoperaattoreita ketjussa esiintyy. Pikkulauseen taulukkoa ei kannata yrittää opetella ulkoa, vaan se kannattaa lukea rivi kerrallaan ja kunkin rivin kohdalla miettiä, miksi se pitää paikkansa. Niin toimiminen lisää todennäköisyyttä, että syntyy kyky päätellä taulukon rivit itse aina kun tarvitsee jotakin niistä. Se on pitkällä aikavälillä luotettavampaa ja monikäyttöisempää osaamista kuin taulukon muistaminen ulkoa.

Pikkulause 2.30 Tarkoittakoon "vo" mitä tahansa symboleista " $<$ ", " $\leq$ ", " $=$ ", " $\geq$ " ja " $>$ ". Jos $n \geq 2$ ja vertailuketjussa $lauseke_1$ vo₁ $lauseke_2$ vo₂ ... vo_{n-1} $lauseke_n$ ei esiinny muita vertailuoperaattoreita

kuin	joista ainakin yksi on	niin
$<, \leq$ ja $=$	$<$	$lauseke_1 < lauseke_n$
$<, \leq$ ja $=$		$lauseke_1 \leq lauseke_n$
$=$		$lauseke_1 = lauseke_n$
$>, \geq$ ja $=$		$lauseke_1 \geq lauseke_n$
$>, \geq$ ja $=$	$>$	$lauseke_1 > lauseke_n$

Emme ole vielä määritelleet mitä vertailuketju tarkoittaa, vaan olemme kohdelleet itsestään selvänä, että se tarkoittaa sitä, että ketjun jokaisen vertailun väitetään olevan tosi. Asia lienee niin tuttu, että sen itsensä vuoksi on tuskin tarpeen

määritellä sitä sen enempää. Mutta on hyödyllistä nähdä, miten matematiikassa määritellään tällaisia asioita. On helpompaa ymmärtää se kun määriteltävä asia on jo tuttu.

Vertailuketjun merkitys voidaan määritellä siten, että pitemmän vertailuketjun merkitys määritellään lyhyemmän vertailuketjun avulla. Se on esimerkki *rekursiosta* (*recursion*) eli siitä, että isompi jokin tehdään pienemmän avulla. Rekursiolla tarvitaan *perustapaus* (*base case*) eli pieni tapaus, joka on määritelty muuten kuin vielä pienemmän avulla. Vertailuketjun perustapaus muodostuu yhdestä vertailusta. Se määriteltiin lähtökohdassa 2.9. Rekursiivinen tapaus voidaan määritellä näin:

Määritelmä 2.31 Tarkoittakoon ” $\vee$ ” mitä tahansa symboleista ” $<$ ”, ” $\leq$ ”, ” $=$ ”, ” $\geq$ ” ja ” $>$ ”, ja olkoon $n \geq 2$. Tällöin

$$\text{lauseke}_1 \vee \dots \vee \text{lauseke}_{n-1} \vee \text{lauseke}_n \vee \text{lauseke}_{n+1}$$

tarkoittaa samaa kuin

$$\text{lauseke}_1 \vee \dots \vee \text{lauseke}_{n-1} \wedge \text{lauseke}_n \vee \text{lauseke}_{n+1} .$$

45. Miksi määritelmässä 2.31 tarvitaan vaatimus $n \geq 2$?

Toisinaan vertailuketju joudutaan katkaisemaan kahteen osaan. Kuten seuraavassa pikkulauseessa sanotaan, se tapahtuu toistamalla katkoskohdassa oleva lauseke ja laittamalla osien väliin ” $\wedge$ ”. Erona määritelmään 2.31 on, että nyt katkoskohta saa olla muuallakin kuin viimeisen vertailun alussa. Pikkulauseen 2.32 voisi todistaa lähtökohdasta 2.31, mutta todistus olisi pitkä, tylsä, hyödytön varsinaisen asian ymmärtämisen kannalta ja tuskinpa hyödyllinen edes määrittelemis- ja todistustekniikoiden opiskelun kannalta. Siksi jätämme sen tekemättä.

Pikkulause 2.32 Tarkoittakoon ” $\vee$ ” mitä tahansa symboleista ” $<$ ”, ” $\leq$ ”, ” $=$ ”, ” $\geq$ ” ja ” $>$ ”, ja olkoon $1 < i < n$. Tällöin

$$\text{lauseke}_1 \vee \dots \vee \text{lauseke}_{i-1} \wedge \text{lauseke}_i \vee \dots \vee \text{lauseke}_{n-1} \vee \text{lauseke}_n$$

tarkoittaa samaa kuin $\text{lauseke}_1 \vee \dots \vee \text{lauseke}_{n-1} \vee \text{lauseke}_n$.

46. Miksi pikkulauseessa 2.32 ei tarvitse mainita vaatimusta $n \geq 3$, vaikka määritelmässä 2.31 tarvitsi vaatia $n \geq 2$? (Nämä vaatimukset vastaavat toisiaan, koska viimeisen lausekkeen indeksi on toisessa n ja toisessa $n + 1$.)

Suuruusjärjestyksen perusominaisuudet, osa 2

Lähtökohdassa 2.29 (c) luvataan, että suuruusjärjestys käyttäytyy yhteenlaskussa olennaisesti samoin kuin yhtäsuuruus. Siitä seuraa, että epäyhtälöä muokatessa

saa kummallekin puolelle lisätä saman luvun. Siis saa päätellä vaikkapa $x > 3 \Rightarrow x + 2 > 3 + 2$. Koska luvun lisäyksen voi kumota vähentämällä lisätyn luvun eli lisäämällä lisätyn luvun vastaluvun, saa päätellä myös $x > 3 \Leftarrow x + 2 > 3 + 2$. Yhteensä näistä tulee $x > 3 \Leftrightarrow x + 2 > 3 + 2$.

Havainnollistaaksemme edellä sanottua, osoitamme yksityiskohtaisesti erään yleisesti tunnetun yhtäpitävyyden, nimittäin sen, että $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$:

$$\begin{array}{llll}
 1 & & a < 0 & \\
 2 & \Leftrightarrow & a - a < 0 - a & \text{lähtökohta 2.29 (c)} \\
 3 & \Leftrightarrow & 0 = a - a < 0 - a = -a & \text{pikkulause 2.21} \\
 4 & \Leftrightarrow & 0 < -a & \text{pikkulause 2.21} \\
 5 & \Leftrightarrow & -a > 0 & \text{lähtökohta 2.28 (d)}
 \end{array}$$

Alaraja, yläraja, tarkka alaraja ja tarkka yläraja

Usein lauseketta verrataan lukuun tai yhdenlaista lauseketta verrataan toisenlaiseen, jossain mielessä yksinkertaisempaan lausekkeeseen. Voidaan esimerkiksi sanoa " $x^2 + 5 > 2$ " tai " $x^2 + 5 \geq 5$ " tai "jos $3 \leq x < 8$, niin $y < x + y \leq 8 + y$ ". Lausekkeet y ja $8 + y$ ovat sikäli yksinkertaisempia kun $x + y$, että ne riippuvat vain y :stä.

Lauseke $lauseke_1$ on lausekkeen $lauseke_2$ *alaraja* (*lower bound*), jos ja vain jos jokaisessa mahdollisessa tilanteessa $lauseke_1 \leq lauseke_2$, eli $lauseke_2 \geq lauseke_1$. *Yläraja* (*upper bound*) määritellään vastaavasti, mutta " $\geq$ " ja " $\leq$ " ovat vaihtaneet paikkaa. Esimerkeissämme 2 on lausekkeen $x^2 + 5$ alaraja, myös 5 on sen alaraja, y on lausekkeen $x + y$ alaraja ja $8 + y$ on sen yläraja.

Kuvittele, että Pihtiputaan mummo on rautatieasemalla ja aikoo nousta junaan, jonka pitäisi lähteä Jyväskylään kello 9:30. Kello 9:25 kuulutetaan, että juna Jyväskylään on myöhässä ja sen arvioitu lähtöaika on kello 9:47. Mummo käy ostamassa luettavaa ja palaa kello 9:43. Mummon kannalta olisi ikävää, jos juna olisi lähtenyt tällä välin. (Suomessa niin voi käydä, sillä arvioitu lähtöaika on vain arvio.) Siksi olisi hyvä, jos olisi varmaa, että juna ei lähde ennen arvioitua lähtöaikaa. Toisin sanoen, olisi hyvä, jos arvioitu lähtöaika olisi alaraja todelliselle lähtöajalle.

Toisaalta, myöskään kovin paljon liian varhaisen ajan ilmoittaminen arvioiksi lähtöajaksi ei olisi hyvä, sillä silloin mummo pelkäisi turhaan, että ei ehdi käydä ostamassa luettavaa. Mummon kannalta paras arvioitu lähtöaika olisi myöhäisin aika, josta sillä hetkellä käytettävissä olevan tiedon valossa on varmaa, että juna ei lähde ennen sitä. Alaraja on *tarkka alaraja* (*sharp lower bound*), jos ja vain jos se lakkaa olemasta alaraja jos sitä yhtään suurentaa. Olisi siis hyvä, jos arvioitu lähtöaika olisi tarkka alaraja todelliselle lähtöajalle. *Tarkka yläraja* (*sharp upper bound*) määritellään vastaavasti, mutta " $\geq$ " ja " $\leq$ " ovat vaihtaneet paikkaa.

Esimerkeissämme 2 ei ole mutta 5 on lausekkeen $x^2 + 5$ tarkka alaraja. Oletuksen $3 \leq x < 8$ alaisuudessa y on lausekkeen $x + y$ alaraja mutta ei tarkka alaraja. Tarkka alaraja on $3 + y$. Samalla oletuksella $8 + y$ on lausekkeen $x + y$ tarkka yläraja. Vaikka luvattiin, että $x < 8$, ja siksi pätee $x + y < 8 + y$, ei esimerkiksi $7,99 + y$ olisi lausekkeen $x + y$ yläraja. Nimittäin vaikka 7,995 toteuttaa x :n ehdon, ei $x + y \leq 7,99 + y$ ole tosi kun $x = 7,995$.

Jos alaraja olisi määritelty symbolin " $<$ " tai " $>$ " eikä " $\leq$ " tai " $\geq$ " avulla, ei tarkan alarajan käsite toimisi. Silloin esimerkiksi 5 ei olisi lausekkeen $x^2 + 5$ alaraja, koska 5 ei ole pienempi kuin $x^2 + 5$ kun $x = 0$. Toisaalta 4,9, 4,99, 4,999 ja niin edelleen olisivat sen alarajoja. Niinpä tarkkaa alarajaa ei olisi olemassa.

Esimerkki tarkkojen ala- ja ylärajojen päättelystä

Seuraavien kysymysten tarkoitus on harjoitella edellä olleiden asioiden käyttöä päättelyssä. Tavoitteena on saada vastaukset niin tarkasti oikein, että esimerkiksi " $<$ " ei ole vaihtunut " $\leq$ ":ksi. Jos näet lopullisen vastauksen suoraan, niin vastaa silti alla oleviin kysymyksiin vaihe vaiheelta kuten niissä käsketään. Vertaa suoraan näkemääsi vastausta mallivastaukseen vasta sitten.

47. Aurinkoisella ajelulla sivutietä pitkin vastaan tuli kyltti, jossa luki "Logiikkalahti 17" ja "Matikkamäki 12". Luvut ovat etäisyyksiä kilometreinä pyöristettynä alaspäin lähimpään kokonaislukuun. Merkitse kyltin tarkkaa etäisyyttä Logiikkalahdesta x :llä ja Matikkamäestä y :llä. Ilmaise kyltin etäisyys Logiikkalahdesta vertailuketjuna.
48. Ilmaise etäisyys Matikkamäestä vertailuketjuna. Vähennä kaikilta puolilta y . Lisää tai vähennä vakioita ja järjestä lopputulos uudelleen pikkulauseen 2.32 avulla siten, että keskellä on $-y$. Esitä päättelyn rakenne symboleilla " $\Leftrightarrow$ ", " $\Rightarrow$ " ja/tai " $\Leftarrow$ ". Ei tarvitse viitata lähtökohtaan 2.29 eikä pikkulauseeseen 2.30 eikä muuhun sellaiseen.
49. Tavoitteena on päätellä Logiikkalahden ja Matikkamäen välinen etäisyys niin tarkasti kuin pystytään. Lisää edellisen tuloksen joka puolelle x . Säilytä $x - y$ ennallaan, mutta korvaa muut saamasi lausekkeet ala- ja/tai ylärajoilla, jotka saadaan korvaamalla x aikaisemmin saaduilla ala- ja ylärajalla. Ilmaise vastaus vertailuketjuna, jossa muut lausekkeet kuin $x - y$ ovat pelkkiä lukuja. Kuten edellä, käytä symboleita " $\Leftrightarrow$ ", " $\Rightarrow$ " ja/tai " $\Leftarrow$ ", eikä päättelyaskelia tarvitse perustella.
50. Jonkin matkan päässä vastaan tuli kyltti, jossa luki "Logiikkalahti 9" ja "Matikkamäki 3". Merkitse kylttien tarkkaa etäisyyttä toisistaan d :llä. Mitkä ovat Logiikkalahden ja Matikkamäen etäisyydet tästä kyltistä ilmaistuna d :n ja edellä käyttöön otettujen x :n ja y :n avulla?
51. Päätele Logiikkalahden ja Matikkamäen välinen etäisyys niin tarkasti kuin pelkästään tämän kyltin perusteella on mahdollista. Päättelyä ei tarvitse esittää yh-

tä yksityiskohtaisesti kuin edellä. Riittää, että näytät sen verran välivaiheita, että päättelyn kulku käy ilmi, ja että käytät symboleita ” $\Leftrightarrow$ ”, ” $\Rightarrow$ ” ja/tai ” $\Leftarrow$ ” oikein.

52. Mitä voidaan päätellä Logiikkalahden ja Matikkamäen välisestä etäisyydestä yhdistämällä tämän ja edellisen kyltin antamat tiedot?
53. Mitä voidaan päätellä näiden kahden kyltin välisestä matkasta? Vastaukseksi riittää pelkkä lopputulos.

Suuruusjärjestyksen perusominaisuudet, osa 3

Toisin kuin yhteenlaskussa, suuruusjärjestys käyttäytyy kertolaskussa olennaisesti eri lailla kuin yhtäsuuruus. Kuten kohta käsittelemme tarkemmin, negatiivisella luvulla kerrottaessa vertailun suunta pitää kääntää. Siitä seuraa, että suuruusjärjestystä ei voi soveltaa lausekkeen sisällä ollenkaan yhtä yleisesti kuin yhtäsuuruutta voi.

Tulemme pian tarvitsemaan yhtäpitävyyttä $a < 0 \wedge b < 0 \Leftrightarrow -a > 0 \wedge -b > 0$. Yhtäpitävyys $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$ lienee tuttu ja osoitettiin edellä. Yhtäpitävyys $b < 0 \Leftrightarrow -b > 0$ on olennaisesti sama, siinä on vain käytetty nimeä b edustamaan mitä tahansa reaalityyppiä, kun alun perin nimi oli a . Haluaisimme päätellä näin:

$$\begin{array}{ll} 1 & a < 0 \wedge b < 0 \\ 2 & \Leftrightarrow -a > 0 \wedge b < 0 \quad \text{koska } a < 0 \Leftrightarrow -a > 0 \\ 3 & \Leftrightarrow -a > 0 \wedge -b > 0 \quad \text{koska } b < 0 \Leftrightarrow -b > 0 \end{array}$$

Voisi luulla, että minkä tahansa kaavan minkä tahansa osan saa korvata yhtäpitävällä osalla, jolloin saadaan alkuperäisen kanssa yhtäpitävä kaava. Ikävä kyllä se ei ole totta. Ongelma ilmenee silloin kun lausekkeet voivat olla määrittelemättömiä. Esimerkiksi $x \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > 0$ on pätevä, mutta jos sitä sovelletaan väitteen muotoa ”ei kaava” ja käytetään lähtökohtaa 2.9, saadaan $x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} \leq 0$, joka on selvästi väärin. Jollei tätä ongelmaa olisi, voisi tämä kirja olla huomattavasti lyhyempi!

Vaikka edellä a ja b ovat muuttujia eivätkä niin ollen voi olla määrittelemättömiä (lähtökohta 2.8), olisi vaarallista vain vedota siihen ja unohtaa koko asia. Vaarana on, että ennemmin tai myöhemmin a :n tai b :n tilalle laitetaan lauseke, joka voi olla määrittelemätön, ja saadaan väärä tulos. Tarvitaan sääntö, joka on pätevä silloinkin, kun lausekkeet voivat olla määrittelemättömiä.

Onneksi sellainen sääntö on olemassa: yhtäpitävyyden soveltaminen isomman kaavan sisällä on sallittua silloin, kun yhtäpitävyyden soveltamiskohta isommassa kaavassa ei ole muiden symbolien alaisuudessa kuin ” $\wedge$ ” ja ” $\vee$ ”. Tämä tullaan ilmaisemaan pikkulauseena 3.10. Se antaa luvan soveltaa yhtäpitävyyttä $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$ kaavan $a < 0 \wedge b < 0$ osaan $a < 0$, sekä yhtäpitävyyttä $b < 0 \Leftrightarrow -b > 0$ kaavan $-a > 0 \wedge b < 0$ osaan $b < 0$.

Lähtökohdassa 2.29 (d) puhutaan vain positiivisten lukujen kertolaskusta. Jos kertolaskun molemmat osapuolet ovat negatiivisia, niin tulos on silloinkin positiivinen. Tämä on hyvin helppo osoittaa tähän mennessä saaduista tiedoista ja siitä, että $(-a)(-b) = ab$:

$$\begin{array}{lll}
 1 & a < 0 \wedge b < 0 & \\
 2 & \Leftrightarrow -a > 0 \wedge -b > 0 & \text{osoitettiin edellä} \\
 3 & \Rightarrow (-a)(-b) > 0 & \text{lähtökohta 2.29 (d)} \\
 4 & \Leftrightarrow ab = (-a)(-b) > 0 & ab = (-a)(-b), \text{ pikkulause 2.21} \\
 5 & \Leftrightarrow ab > 0 & \text{pikkulause 2.21}
 \end{array}$$

Jokseenkin kaikki yli kymmenvuotiaat ihmiset tietävät, että $1 > 0$. Silti on mielekästä kysyä, seuraako se tähän mennessä esittämistämme lähtökohdista, vai pitääkö se esittää omana lähtökohtanaan. Vastaus on: ”siltä väliltä”. Lähtökohtiin tarvitaan jotakin varmistamaan, että $1 \neq 0$. Tavallisesti se tehdään sanomalla erikseen, että $1 \neq 0$. Meikin teemme niin: tässä kirjassa $1 \neq 0$. Jos tämän jälkeen osoitamme, että $1 < 0$ ei ole totta, niin lähtökohta 2.29 (a) ei jätä jäljelle muuta mahdollisuutta kuin $1 > 0$.

54. Osoita, että $1 < 0$ ei ole totta. Tähän mennessä saaduilla tiedoilla se onnistuu hyvin helposti.

Tapaus, jossa ensimmäinen kerrottava on positiivinen ja jälkimmäinen on negatiivinen, on huomattavasti hankalampia tutkia. Osoitamme, että $a > 0 \wedge b < 0 \Rightarrow ab < 0$. Oletamme yhteen- ja kertolaskuja koskevat yhtäsuuruudet tutuiksi, mutta muut yksityiskohdat käsittelemme huolellisesti.

$$\begin{array}{lll}
 1 & a > 0 \wedge b < 0 & \\
 2 & \Leftrightarrow a > 0 \wedge -b > 0 & \text{pikkulause 3.10} \\
 3 & \Rightarrow a(-b) > 0 & \text{lähtökohta 2.29 (d)} \\
 4 & \Leftrightarrow 0 < a(-b) = -ab & \text{lähtökohta 2.28 (d), pikkulause 2.21} \\
 5 & \Leftrightarrow ab < -ab + ab = 0 & \text{lähtökohta 2.29 (c), pikkulause 2.21} \\
 6 & \Leftrightarrow ab < 0 & \text{pikkulause 2.21}
 \end{array}$$

Vielä puuttuu $a < 0 \wedge b > 0 \Rightarrow ab < 0$. Se on hyvin helppo johtaa tiedosta $a > 0 \wedge b < 0 \Rightarrow ab < 0$ käyttäen apuna reaalilukujen yhteen- ja kertolaskuja koskevia yhtäsuuruuksia.

55. Osoita, että $a < 0 \wedge b > 0 \Rightarrow ab < 0$.

Jompikumpi tai molemmat kerrottavista voi tietenkin olla myös nolla. Kuten hyvin tiedetään, silloin kertolaskun tuloskin on nolla (olettaen, että toinenkin kerrottava on määritelty). Tämä näkyy esimerkiksi siten, että $a < 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow ab \leq 0$. Ei voida luvata $ab < 0$, jos b voi olla nolla.

Nyt voidaan päätellä $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$ käyttäen sitä tosiasiaa, että $a \neq 0 \Rightarrow a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Olkoon $a > 0$. Tällöin $a \neq 0$, joten $\frac{1}{a}$ on määritelty. Jos olisi $\frac{1}{a} = 0$,

niin olisi $a \cdot \frac{1}{a} = 0$. Jos olisi $\frac{1}{a} < 0$, niin olisi $a \cdot \frac{1}{a} < 0$. Mutta kumpikaan näistä ei ole mahdollinen, koska $a \cdot \frac{1}{a} = 1 > 0$. Lähtökohta 2.29 (a) ei jätä jäljelle muuta vaihtoehtoa kuin $\frac{1}{a} > 0$. Siksi $\frac{1}{a} > 0$.

Epäyhtälöitä käsiteltäessä tulee usein tapauksia, että on päätelty esimerkiksi $\text{vasen} < \text{oikea}$ ja sen molemmat puolet tarvitsee kertoa samalla negatiivisella lausekkeella. Sellaiset saa käsiteltyä seuraavan esimerkin tyyliä.

Esimerkki Olkoon $c < 0$. Ensin perustellaan $a < b \Rightarrow ac > bc$:

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \Rightarrow (a - b)c > 0 \Leftrightarrow ac - bc > 0 \Leftrightarrow ac > bc$$

Sitten perustellaan $a < b \Leftarrow ac > bc$:

$$\begin{aligned} ac > bc &\Leftrightarrow bc - ac < 0 \Leftrightarrow (b - a)c < 0 \\ &\Rightarrow (b - a)c \cdot \frac{1}{c} > 0 \Leftrightarrow b - a > 0 \Leftrightarrow a < b \end{aligned}$$

Pikkulause 2.23 tuottaa näistä $a < b \Leftrightarrow ac > bc$. □

Kun tämän osaa, niin ei tarvitse muistaa valtavaa määrää sääntöjä eri tapauksiin. Heitä varten, jotka kuitenkin mieluummin opettelevat eri tapaukset ulkoa, ne on lueteltu seuraavassa pikkulauseessa.

Pikkulause 2.33 Jos oheisen taulukon vasemmasta reunasta ja yläriviltä valitut kaavat ovat tosia, niin niitä vastaavien rivin ja sarakkeen leikkauskohdan kaava on tosi.

	$c < 0$	$c \leq 0$	$c \neq 0$	$c \geq 0$	$c > 0$
$a < b$	$ac > bc$	$ac \geq bc$	$ac \neq bc$	$ac \leq bc$	$ac < bc$
$a \leq b$	$ac \geq bc$	$ac \geq bc$		$ac \leq bc$	$ac \leq bc$
$a \neq b$	$ac \neq bc$		$ac \neq bc$		$ac \neq bc$
$a \geq b$	$ac \leq bc$	$ac \leq bc$		$ac \geq bc$	$ac \geq bc$
$a > b$	$ac < bc$	$ac \leq bc$	$ac \neq bc$	$ac \geq bc$	$ac > bc$

Siitä, että kertolaskun tapauksessa vertailun suunta voi vaihtua, seuraa, että pikkulauseen 2.14 vastine suuruusjärjestyksille ei päde. Toisin sanoen, vaikka lausekkeen saa korvata yhtäsuurella lausekkeella toisen lausekkeen sisällä ja tulokseksi saadaan (mikäli tulos on määritelty) yhtäsuuret toiset lausekkeet, ei lauseketta saa korvata vaikkapa pienemmällä lausekkeella toisen lausekkeen sisällä paitsi poikkeustapauksissa. Esimerkiksi siitä, että $x > 3$ ei saa noin vain päätellä $\text{lauseke}(x) > \text{lauseke}(3)$, sillä jos lauseke on vaikkapa $10 - x$ ja $x = 6$, on $x > 3$ tosi mutta $\text{lauseke}(x) > \text{lauseke}(3)$ väittää $10 - 6 > 10 - 3$ eli $4 > 7$, joka ei ole tosi.

Mitä silloin tehdään, kun kertoja on lauseke, joka ei ole kaikissa mahdollisissa tilanteissa positiivinen tai nolla, eikä kaikissa mahdollisissa tilanteissa negatiivinen tai nolla? Silloin voidaan jakaa päättely enintään neljään haaraan sen mukaan, onko kertoja negatiivinen, nolla, positiivinen vai määrittelemätön.

Epäyhtälöiden ratkaisemisesta

Seuraava esimerkki näyttää, miten epäyhtälön voi ratkaista jakamalla päättely haaroihin. Yhdessä haaroista syntyy määrittelemätön lauseke, joten lähtökohdan 2.9 (e) vuoksi siitä ei tule juuria. Kahdessa muussa haarassa epäyhtälö muokataan muotoon, jossa kertolaskun tulosta verrataan nollaan. Siten päästään päättämään vastaus lähtökohdan 2.29 (d) ja siitä edellä johdettujen tulosten avulla. Nämä haarat ovat pitkän matkaa niin samanlaiset, että osan jälkimmäisestä voi näyttää kolmena pisteenä.

Esimerkki 2.34 Ratkaise epäyhtälö $\frac{x^2-1}{x-2} \leq 8$.

- Jos $x < 2$, on $x - 2 < 0$, joten $\frac{x^2-1}{x-2} \leq 8 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 8(x - 2)$
 $\Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 5) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3 \vee x \geq 5 \Leftrightarrow x < 2$.
- Jos $x > 2$, on $x - 2 > 0$, joten $\frac{x^2-1}{x-2} \leq 8 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 8(x - 2)$
 $\Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 5) \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 5$.
- Jos $x = 2$, on $x - 2 = 0$, joten $\frac{x^2-1}{x-2}$ on määrittelemätön.

Vastaus: $\frac{x^2-1}{x-2} \leq 8 \Leftrightarrow x < 2 \vee 3 \leq x \leq 5$. □

56. Miksi edellä voitiin päätellä $x \leq 3 \vee x \geq 5 \Leftrightarrow x < 2$?

Reaalilukujen tapauksessa *väli* (*interval*) on reaalilukujoukko muotoa $a < x < b$, $a < x \leq b$, $a \leq x < b$ ja niin edelleen, missä a ja b ovat vakioita.

57. Erilaisia reaalilukujen välejä on kaikkiaan yhdeksää eri muotoa. Luettele loput kuusi.

58. Miten yksittäinen reaaliluku r voidaan ilmaista välinä?

On melko tavallista, että epäyhtälön ratkaisujoukko koostuu pienestä määrästä välejä. Silloin epäyhtälön juurten testaamisen voi aloittaa tunnistamalla muuttujan arvot, jotka saattavat olla tällaisten välien alku- tai loppukohtia. Yleisimpiä sellaisia ovat arvot, joissa jakaja, neliöjuuren argumentti tai logaritmin argumentti saavat arvon nolla, sekä epäyhtälöä vastaavan yhtälön juuret.

Kannattaa testata jokainen tällainen arvo. Sen jälkeen kannattaa testata jokin pienintä tällaista arvoa pienempi arvo, jokin suurinta tällaista arvoa suurempi arvo,

sekä jokaiselle kahdelle peräkkäiselle tällaiselle arvolle jokin arvo niiden välistä. Näiden arvojen valinnassa saa suosia sellaisia, joilla laskut on helppo tehdä. Jos epäyhtälön jompikumpi puoli on testattavalla muuttujan arvolla määrittelemätön, ei vastakkaista puolta tarvitse laskea.

Seuraavassa esimerkissä testataan esimerkin 2.34 lopputulos.

Esimerkki Yhtälöllä $\frac{x^2-1}{x-2} = 8$ ei voi olla enempää kuin kaksi juurta, koska kertomalla nimittäjä pois siitä tulee toisen asteen yhtälö. Ainoa kohta, jossa siinä esiintyy määrittelemätön lauseke, on $x = 2$.

testiarvo x	0	2	$2\frac{1}{2}$	3	4	5	7
<i>vasen</i>	$\frac{1}{2}$	ei määritelty	$10\frac{1}{2}$	8	$7\frac{1}{2}$	8	$9\frac{3}{5}$
<i>oikea</i>	8		8	8	8	8	8
$vasen \leq oikea$	tosi	ei kumpikaan	epätosi	tosi	tosi	tosi	epätosi

□

”Merkkikaavio” tarkoittaa taulukkoa, jossa lukusuora on pilkottu yllä kuvatulla tavalla väleihin ja jokaisesta katkoskohdasta ja jokaisesta katkoskohtien välisestä osuudesta on merkitty, onko tarkasteltava lauseke siinä nolla, positiivinen, negatiivinen vai määrittelemätön. Edellä kuvattu testausmenetelmä on melkein sama asia kuin merkkikaavion laatiminen. Merkkikaaviota varten kaikki pitää siirtää samalle puolelle, mutta siitä syntyvä ero on pieni: sen sijaan, että verrataan esimerkiksi onko $vasen \leq oikea$, verrataankin onko $vasen - oikea \leq 0$.

Merkkikaavion laatimista voi käyttää myös epäyhtälön ratkaisumenetelmänä. Käytännössä se johtaa jokseenkin samoihin laskelmiin kuin yllä kuvattu tapa. Jos lauseke on pelkkä polynomi tai polynomi jaettuna polynomilla, ovat katkoskohtia näiden polynomien nollakohdat ja vain ne. Merkkikaaviomenetelmän käyttöä tätä monimutkaisemmissa tapauksissa ei tässä kohdassa käsitellä, koska katkoskohtien löytämiseen liittyy asia, jota ei ole vielä käsitelty (se on ”jatkuvuus”).

Esimerkiksi epäyhtälön $\frac{x^2-1}{x-2} \leq 8$ voi ratkaista merkkikaavion laatimalla näin:

Esimerkki Ensin muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on jakolasku ja toisella puolella nolla:

$$\frac{x^2-1}{x-2} \leq 8 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x-2} - 8 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1-8x+16}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-8x+15}{x-2} \leq 0$$

Sitten etsitään osoittajan ja nimittäjän nollakohdat:

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 15 = 0 &\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 5 \\ x - 2 = 0 &\Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Laaditaan merkkikaavio:

testiarvo x	0	2	$2\frac{1}{2}$	3	4	5	7
merkki	–	ei määritelty	+	0	–	0	+

Lopuksi kirjoitetaan vastaus. Koska vertailuna on " $\leq$ ", mukaan otetaan ne, joissa merkki on " $-$ " tai " 0 ".

Vastaus: $x < 2 \vee 3 \leq x \leq 5$

□

59. Ratkaise epäyhtälö $\frac{x-1}{x-4} \geq x-5$. Testaa saamasi juuret.

60. Ratkaise epäyhtälö $\sqrt{x+7} > x-5$. Testaa saamasi juuret.

Esimerkkejä

Tekniikassa, fysiikassa ja arjessa ei aina tarvita lausekkeen tarkkaa arvoa, vaan riittää, että saadaan hyvä likiarvo — varsinkin jos on varmaa, että se poikkeaa tarkasta arvosta esimerkiksi enintään yhden prosentin. Sen ansiosta lausekkeitä voidaan korvata yksinkertaisemmilla. Likiarvoilla, joiden voidaan osoittaa olevan annettua rajaa tarkempia, on myös keskeistäkin keskeisempi rooli raja-arvoille ja derivaatoille, jotka ovat erittäin tärkeitä matematiikassa ja sen sovelluksissa.

Esimerkki 2.35 Esimerkkinä hyvistä likiarvoista osoitamme, että kun $x \geq 100$, poikkeaa $\frac{1}{x}$ luvusta $\frac{1}{x+1}$ enintään yhden prosentin, ja poikkeama on ylöspäin. Koko tämä esimerkki on oletuksen $x \geq 100$ alaisuudessa.

Ensiksi osoitamme, että $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x}$.

$$\begin{array}{ll}
 1 & 0 < 1 \\
 2 & \Leftrightarrow x < x+1 \quad \text{lisätty } x \text{ molemmille puolille, 2.29 (c)} \\
 3 & \Rightarrow \frac{1}{x+1} \\
 4 & = \frac{x}{x(x+1)} \quad \text{lavennettu } x\text{:llä, } x \neq 0 \text{ koska } x \geq 100 \\
 5 & < \frac{x+1}{x(x+1)} \quad \text{riviltä 2 jaettu } x(x+1)\text{:llä, } x(x+1) > 0 \text{ koska } x \geq 100 \\
 6 & = \frac{1}{x} \quad \text{supistettu } (x+1)\text{:llä, } x+1 \neq 0 \text{ koska } x \geq 100
 \end{array}$$

Rivien 4 ja 6 yhtäsuuruudet seuraavat reaalitylukujen laskusäännöistä, ja lupa lisätä ne keskelle päättelyketjua saadaan pikkulauseesta 2.21. Rivin 5 yhtäsuuruus seuraa rivistä 2 pikkulauseella 2.33. Rivin 3 alussa on " $\Rightarrow$ ", koska pikkulause 2.33 on yksisuuntainen. Tässä tapauksessa myös " $\Leftrightarrow$ " olisi oikein, mutta sitä ei päättelyn jatkossa tarvita ja se vaatisi pitemmän perustelun.

Päättelyketjun alusta ja lopusta ja heikoimmista matkan varrella käytetyistä päättely- ja vertailuoperaattoreista voidaan poimia $0 < 1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x}$. Koska $0 < 1$ on aina tosi, on $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x}$ tosi oletuksen $x \geq 100$ alaisuudessa.

61. Osoita, että $\frac{1}{x} \leq 1,01 \cdot \frac{1}{x+1}$. Aloita siitä, että $x \geq 100$, ja lisää kummallekin puolelle $100x$. Näytä muutama välivaihe. Sen enempää ei päättelyäsi tarvitse perustella.

Kaikkiaan saimme, että kun $x \geq 100$, pätee $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} \leq 1,01 \cdot \frac{1}{x+1}$. $\square$

Esimerkki 2.36 Osoita, että jos $p < q$, niin $p < \frac{p+q}{2} < \frac{p+2q}{3} < \frac{p+3q}{4} < \dots < q$.

Ratkaisu. Ensimmäinen ”<” on helppo osoittaa:

$$\begin{array}{lll} 1 & p < q & \text{lähtökohta} \\ 2 & \Leftrightarrow p + p < p + q & \text{lisätty } p \\ 3 & \Leftrightarrow p < \frac{p+q}{2} & \text{jaettu 2:lla, } 2 > 0 \end{array}$$

Muut kuin ensimmäinen ja viimeinen ”<” voidaan yhdistää väitteeksi $\frac{p+(i-1)q}{i} < \frac{p+iq}{i+1}$, missä i voi olla mikä tahansa ykköistä suurempi kokonaisluku.

$$\begin{array}{lll} 1 & p < q & \text{lähtökohta} \\ 2 & \Leftrightarrow p + (i-1)q < q + (i-1)q = iq & \text{lisätty } (i-1)q \\ 3 & \Leftrightarrow i(p + (i-1)q) + (p + (i-1)q) & \\ & < i(p + (i-1)q) + iq = i(p + (i-1)q + q) & \text{lisätty } i(p + (i-1)q) \\ 4 & \Leftrightarrow (i+1)(p + (i-1)q) < i(p + iq) & \\ 5 & \Leftrightarrow \frac{p+(i-1)q}{i} < \frac{p+iq}{i+1} & \text{jaettu } i(i+1):llä, \\ & & \text{jakaja } > 0 \text{ koska } i > 1 \end{array}$$

Viimeinen ”<” sanoo, että jokainen $\frac{p+(i-1)q}{i}$ on pienempi kuin q .

$$\begin{array}{lll} 1 & p < q & \text{lähtökohta} \\ 2 & \Leftrightarrow p + (i-1)q < q + (i-1)q = iq & \text{lisätty } (i-1)q \\ 3 & \Leftrightarrow \frac{p+(i-1)q}{i} < \frac{iq}{i} = q & \text{jaettu } i:\text{llä, } i > 0 \text{ koska } i > 1 \quad \square \end{array}$$

62. Miten esimerkin 2.36 ensimmäisen vaiheen voi korvata tekemällä muualle esimerkkiin pieniä muutoksia?

3 Logiikan peruskäsitteitä

3.1	Kaava ja totuusarvo	67
3.2	Yhtäpitävyyttä tai yhtätotuutta koskevia pikkulauseita	83
3.3	Propositiologiikkaa	91
3.4	Kvanttorit	95
3.5	Kvanttorien päättelysääntöjä	95
3.6	Ensimmäisen ja toisen kertaluvun logiikka	95

Tässä luvussa ???

3.1 Kaava ja totuusarvo

Kuten alaluvussa 2.2 todettiin, esimerkiksi 0 , $160 + 3t$ ja 1000 ovat lausekkeita. Alaluvussa 2.2 esiintyi myös ilmauksia, kuten $0 \leq 160 + 3t \leq 1000$, jotka eivät ole lausekkeita vaan *kaavoja*. Lausekkeet tuottavat puheenaiheen olioita, esimerkiksi lukuja, tai ovat määrittelemättömiä. Kaavat eivät tuota puheenaiheen olioita vaan *totuusarvoja*. Tässä alaluvussa käsitellään kaavoja ja totuusarvoja.

Totuusarvo

Yleisimmin käytetään kahta eri *totuusarvoa* (*truth value*): *tosi* (*true*) ja *epätosi* (*false*). Esimerkiksi $1 + 2 = 3$ on tosi ja $1 + 2 = 4$ on epätosi. Ikävä kyllä jokainen yritys käsitellä määrittelemättömät lausekkeet vain niiden avulla on johtanut omituisiin tuloksiin syistä, joita käsitellään sivulta 68 alkaen. Siksi tässä kirjassa on käytössä kolmaskin totuusarvo: *määrittelemätön* (*undefined*). Esimerkiksi $1 + 2 = \frac{1}{0}$ on määrittelemätön. Sen mukaan onko totuusarvoja kaksi vai kolme, puhutaan *kaksiarvoisesta logiikasta* (*two-valued logic*) tai *kolmiarvoisesta logiikasta* (*three-valued logic*).

Totuusarvojen merkit vaihtelevat kirjallisuudessa. Tässä kirjassa käytetään niiden englanninkielisiin nimiin viittaavia, pystysuoria pääteviivattomia kirjaimia **T**, **F** ja **U**. Samat kirjaimet kursivoituina pääteviivallisina, eli *T*, *F* ja *U*, säästetään muuhun käyttöön (sivu 72).

Määrittelemätön totuusarvo on eri asia kuin määrittelemätön lauseke (sivu 14). Lausekkeen määrittelemättömyys tarkoittaa, että lauseke ei tuota arvoa. Määrittelemätön totuusarvo ei liity lausekkeisiin, vaan kaavoihin. Kuitenkaan ”kaava on määrittelemätön” ei tarkoita, että kaava ei tuota totuusarvoa, vaan että kaava tuottaa totuusarvon jonka nimi on ”määrittelemätön”. On ehkä harhaanjohtavaa, että yhdelle kolmesta totuusarvosta on annettu nimeksi ”määrittelemätön”. Toisaalta se on sikäli luontevaa, että tärkein tapa, jolla määrittelemätön totuusarvo syntyy, on että väitetään jotakin määrittelemättömästä lausekkeesta. Tähän palataan sivulla 70.

Väite voi siis olla olematta tosi kahdella eri tavalla: se on epätosi tai määrittelemätön. Niiden ero on siinä, että jos väitteestä poistetaan tai siihen lisätään ”ei” matemaattisille merkinnöille tyypillisellä tavalla, niin epätosi väite muuttuu todeksi mutta määrittelemätön väite säilyy määrittelemättömänä. (”Tyypillisellä tavalla” tarkoittaa pian esiteltävän symbolin ” $\neg$ ” poistamista tai lisäämistä, taikka vastaavia merkintäkeinoja, kuten symbolin ” $\neq$ ” vaihtamista symboliin ” $=$ ” tai toisinpäin.)

Määrittelemättömän totuusarvon käyttöönotolla saadaan jotkin tapaukset vastaamaan paremmin ihmisten tapaa ajatella kuin jos käytössä olisivat vain ”tosi” ja ”epätosi”. Esimerkiksi vuonna 2024 sattuneeseen tapahtumaan liittyen ”tasavallan presidentti myönsi hengenpelastusmitalin avantoon pudonneen pelastaneelle” on tosi ja ”tasavallan presidentti ei myöntänyt hengenpelastusmitalia avantoon pudonneen pelastaneelle” on epätosi. Koska Suomella ei ole kuningatarta, ei ”Suomen kuningatar myönsi hengenpelastusmitalin ...” ole koskaan tosi. Mutta jos se olisi epätosi, niin väitteen ”Suomen kuningatar ei myöntänyt hengenpelastusmitalia ...” pitäisi olla tosi. Se ei ole oikein tai ainakaan ongelmatonta, sillä siitä syntyy mielikuva, että Suomen kuningatar olisi olemassa mutta jätti mitalin myöntämättä.

Hyvä esimerkki reaalityyppisillä saadaan siitä, että a ei ole pienempi kuin b jos ja vain jos a on suurempi tai yhtäsuuri kuin b . Niinpä $a < b$ on epätosi täsmälleen silloin kun $a \not< b$ on tosi, ja se on tosi täsmälleen silloin kun $a \geq b$ on tosi. Mutta jos a tai b ei olekaan reaalityyppi vaan määrittelemätön lauseke, niin kumpikaan väitteistä $a < b$ ja $a \geq b$ ei ole tosi. Esimerkiksi $\frac{1}{0} < 0$ ei ole tosi, mutta myöskään $\frac{1}{0} \geq 0$ ei ole tosi. Jos $\frac{1}{0} < 0$ julistettaisiin epätodeksi, niin jouduttaisiin luopumaan periaatteesta ”ei ole pienempi jos ja vain jos on suurempi tai yhtäsuuri”, koska muutoin $\frac{1}{0} \not< 0$ olisi tosi, joten $\frac{1}{0} \geq 0$ olisi tosi. Tämä ongelma vältetään sillä, että sekä $\frac{1}{0} < 0$ että $\frac{1}{0} \geq 0$ on määrittelemätön.

Jos määrittelemätön totuusarvo ei ole käytössä, niin $\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$ tuottaa lisää ongelmia. Jos valitaan että se on tosi, herää kysymys, milloin eri tavalla muodostetut määrittelemättömyydet ovat yhtäsuuria. Pitäisikö $\frac{2}{0} = \frac{1}{0}$ olla tosi vai epätosi? Pitäisikö $\frac{1}{0} + 0 = \frac{1}{0}$ olla tosi vai epätosi? Pitäisikö $\frac{1}{0} = \sqrt{-1}$ olla tosi vai epätosi? Jos valitaan että $\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$ on epätosi, herää kysymys, onko $\frac{1}{0} \neq \frac{1}{0}$ tosi vai luovutaanko periaatteesta, että ” $\neq$ ” tarkoittaa ”ei =”. On selkeämpää että mikään niistä ei ole tosi eikä epätosi vaan kaikki ovat määrittelemättömiä, myös $\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$ ja $\frac{1}{0} \neq \frac{1}{0}$.

Ongelmaa ei voi loputtomiin väistää myöskään kieltämällä kokonaan ne tilanteet, joissa jokin puheena olevista lausekkeista on määrittelemätön. Esimerkiksi yhtälön $3\sqrt{|x|} - 1 = x + 1$ tapauksessa sanottaisiin, että huomioon otetaan ne ja vain ne x :n arvot, joilla $x \leq -1$ tai $x \geq 1$. (” $|$ ” on nimeltään ”itseisarvo” ja esitellään sivulla 75.) Useimmat tai kaikki matemaatikot hyväksyvät, että tämän yhtälön ratkaisemisen voi aloittaa poistamalla itseisarvo, jolloin saadaan

$$(1) \quad x < 0 \text{ ja } 3\sqrt{-x-1} = x+1 \text{ tai } x \geq 0 \text{ ja } 3\sqrt{x-1} = x+1$$

Yhtälöllä $3\sqrt{-x-1} = x+1$ on yksi juuri, nimittäin $x = -1$. Se toteuttaa ehdon $x < 0$. Yhtälöllä $3\sqrt{x-1} = x+1$ on kaksi juurta, nimittäin 2 ja 5, ja ne toteuttavat ehdon $x \geq 0$. Niinpä yhtälön $3\sqrt{|x|-1} = x+1$ juuret ovat -1 , 2 ja 5.

Tämän pätevyys perustuu siihen, että (1) on tosi niissä ja vain niissä tilanteissa, joissa $3\sqrt{|x|-1} = x+1$ on tosi. Mutta jos totuusarvosta saa puhua vain niissä tilanteissa, joissa jokainen lauseke on määritelty, niin tältä putoaa pohja pois. Nimittäin silloin (1):lle ei riitä kieltää $-1 < x < 1$, sillä kun $x \leq -1$ on $3\sqrt{x-1}$ määrittelemätön, ja kun $x \geq 1$ on $3\sqrt{-x-1}$ määrittelemätön. Eli kaikki x :n arvot pitäisi kieltää, mukaan lukien juuret -1 , 2 ja 5!

Kuriositeettina mainittakoon, että tietokoneissa nykyisin hyvin yleisesti noudatetussa reaalitylukujen likiarvojen standardissa on käsite *epäluku* (*not-a-number*). Jos laskun tulos on määrittelemätön eikä ole tulkittavissa plus tai miinus äärettömäksi, niin se on epäluku. Jos vertailun $x = y$, $x < y$, $x \leq y$, $x \geq y$ tai $x > y$ jompikumpi tai molemmat puolet on epäluku, niin tulos on epätosi, mutta vertailun $x \neq y$ tapauksessa tulos onkin tosi. Niinpä muuttujan x arvosta voi testata onko se epäluku testaamalla onko $x \neq x$ tosi.

Johdanto kaavoihin

Kaava (*formula*) esittää funktiota tilanteilta totuusarvoille. Kaava voi siis olla joissakin tilanteissa tosi, joissakin toisissa epätosi ja kolmansissa määrittelemätön. Tässä yhteydessä ”määrittelemätön” ei tarkoita, että kaava ei tuota tulosta tai ei ole lyöty lukkoon mikä sen tuottaman tuloksen pitäisi olla, vaan että kaava tuottaa hyvin määritellyn totuusarvon, jonka nimi on ”määrittelemätön”. Sanan ”määrittelemätön” käyttäminen hyvin määritellyn totuusarvon nimenä on harhaanjohtavaa, mutta silti niin tehdään.

Kaavoja on kahdenlaisia: *atomikaavoja* ja *yhdistettyjä kaavoja*.

Johdanto atomikaavoihin

Tässä kirjassa esiintyy kolmenlaisia *atomikaavoja* (*atomic formula*):

- lausekkeen sisältävät atomikaavat,
- totuusarvovakiot **F**, **U** ja **T** sekä
- propositiomuuttujat eli totuusarvomuttujat.

Lausekkeen sisältävät atomikaavat

Lausekkeen sisältäviä atomikaavoja ovat muun muassa vertailut muotoa *vasen = oikea*, *vasen $\neq$ oikea*, *vasen < oikea* ja niin edelleen, missä *vasen* ja *oikea* ovat

kaava	tosi, kun	epätosi, kun	määrittelemätön, kun
$3x - 5 = 7$	$x = 4$	$x < 4 \vee x > 4$	ei koskaan
$x^2 = 9$	$x = -3 \vee x = 3$	$x \neq -3 \wedge x \neq 3$	ei koskaan
$x^2 < 9$	$-3 < x < 3$	$x \leq -3 \vee x \geq 3$	ei koskaan
$\frac{1}{x} \leq 0$	$x < 0$	$x > 0$	$x = 0$
$\sqrt{x} \geq 2$	$x \geq 4$	$0 \leq x < 4$	$x < 0$
$1 + 1 = 2$	aina	ei koskaan	ei koskaan
$x = x + 1$	ei koskaan	aina	ei koskaan
F	ei koskaan	aina	ei koskaan

Kuva 8: Esimerkkejä lausekkeen sisältävistä atomikaavoista

lausekkeita. Niitä ovat myös $\text{lauseke} \in \mathbb{R}$ (*lauseke*:n tuottama arvo on reaaliluku) ja $\text{lauseke} \notin \mathbb{Z}$ (ei ole kokonaisluku). Myöhemmin niitä esitellään lisää. (Kuitenkaan vertailuista muodostetut ketjut kuten $\text{vasen} \leq \text{keski} < \text{oikea}$ eivät ole atomikaavoja.)

Atomikaava $\text{vasen} = \text{oikea}$ on tosi täsmälleen niissä tilanteissa, joissa sekä vasen että oikea tuottaa arvon ja ne tuottavat saman arvon. Se on epätosi täsmälleen niissä tilanteissa, joissa sekä vasen että oikea tuottaa arvon mutta ne tuottavat eri arvon. Se on määrittelemätön täsmälleen niissä tilanteissa, joissa vasen tai oikea ei tuota arvoa. Tässä kirjassa sama periaate on yleistetty kaikkiin lausekkeen sisältäviin atomikaavoihin:

Lähtökohta 3.1 Lausekkeen sisältävä atomikaava tuottaa **U** jos ja vain jos ainakin yksi sen sisältämistä lausekkeista on määrittelemätön.

Lähtökohdasta 3.1 seuraa muun muassa, että $\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$ ei ole tosi vaan määrittelemätön. Tämä heijastaa sitä, että määrittelemätön ei ole jokin erikoinen kaikista luvuista poikkeava arvo joka on kuitenkin itsensä kanssa yhtäsuuri, vaan se todellakin tarkoittaa sitä, että arvoa ei ole. Yksi peruste sille, että määrittelemätön kannattaa tulkita näin, on että ohjelmoinnissa esiintyy tällainen määrittelemätön. Nimittäin ohjelman jäämistä ikuiseen silmukkaan (sivu 21) on usein vaikea tai mahdoton huomata. Ikuiseen silmukkaan jäänyt ohjelma ei tuota tulokseksi erikoisarvoa, joka tarkoittaa, että tulos on määrittelemätön. Se vain jatkaa laskemista loputtomiin tuottamatta koskaan mitään tulosta.

Ajatuksena on siis, että kun väitetään jotakin sellaisen olion ominaisuuksista, jota ei ole olemassa, saadaan totuusarvoksi ”määrittelemätön” eli **U**. Esimerkiksi ”Suomen kuningatar on 56 vuotta vanha” ei ole tosi eikä epätosi, koska Suomella ei ole kuningatarta. Siksi sen totuusarvo on ”määrittelemätön” eli **U**.

Kuvassa 8 on esimerkkejä lausekkeen sisältävistä atomikaavoista.

Atomikaavat muotoa $vasen = oikea$ ja $vasen \neq oikea$ ovat käytettävissä kaikissa puheenaiheissa. Vaikka ne luetaan usein ” $vasen$ on yhtäsuuri / erisuuri kuin $oikea$ ”, logiikan näkökulmasta ne tarkoittavat ” $vasen$ tuottaa saman / eri olion kuin $oikea$ ”. Esimerkiksi äiti(Charlotte) = puoliso(William) ei tarkoita, että Charlotten äiti on yhtä pitkä tai yhtä painava kuin Williamin puoliso, vaan että Charlotten äiti ja Williamin puoliso ovat sama henkilö (nimittäin prinsessa Catherine). Jokaisessa puheenaiheessa on mielekästä kysyä, tuottavatko kaksi lauseketta saman olion ($vasen = oikea$) vai eri oliot ($vasen \neq oikea$), vai onko niin että toinen tai molemmat ei tuota oliota lainkaan (sekä $vasen = oikea$ että $vasen \neq oikea$ on määrittelemätön).

Mitä muita lausekkeen sisältäviä atomikaavoja on käytössä, riippuu puheenaiheesta ja siitä, mitä on haluttu ottaa käyttöön. Esimerkiksi $vasen < oikea$ ei Britannian kuninkaallisten tapauksessa ole lähtökohtaisesti käytössä. Mutta jos halutaan, niin sille voidaan antaa merkitykseksi vaikkapa ” $vasen$ on kruununperimysjärjestyksessä ennen kuin $oikea$ ”.

Totuusarvovakio

Totuusarvovakiot ovat **F**, **U** ja **T**. Ne edustavat totuusarvoja epätosi, määrittelemätön ja tosi aivan kuten vakio ”24” esittää lukua kaksikymmentäneljä.

On hyvä muistaa, että totuusarvovakiot ovat logiikan symboleita eivätkä puheenaiheen symboleita. Se tarkoittaa, että ne ovat käytettävissä kaikissa puheenaiheissa, eikä niiden merkitys vaihdu puheenaiheen vaihtuessa. Esimerkiksi lukuvakiot ja ihmisten nimet käyttäytyvät eri lailla. Luvuista puhuttaessa ”24” tarkoittaa lukua kaksikymmentäneljä, mutta Britannian kuninkaallisista puhuttaessa se ei tarkoita mitään. Britannian kuninkaallisista puhuttaessa ”Charles” tarkoittaa vuonna 2023 kruunattua kuningasta, mutta luvuista puhuttaessa se ei tarkoita mitään. Mutta sekä luvuista puhuttaessa että Britannian kuninkaallisista puhuttaessa ”**T**” tarkoittaa ”tosi”.

Totuusarvovakion ja totuusarvon välinen ero on samankaltainen kuin vakiosymbolin ja vakion tai muuttujasymbolin ja muuttujan välinen ero: kukin totuusarvovakio on jonkin totuusarvon nimi. Joidenkin logiikan asioiden käsittelyssä tämä ero on tärkeä, mutta tässä kirjassa ei käsitellä sellaisia asioita. Niinpä voit huoletta unohtaa tämän eron.

Totuusarvoista on tähän mennessä puhuttu jo niin paljon, että tässä kohdassa niistä ei tarvitse puhua tämän enempää.

Propositiomuuttuja

Propositiomuuttuja (*propositional variable*) edustaa tilanteesta riippuvaa totuusarvoa, aivan kuten reaalitylukumuuttuja edustaa tilanteesta riippuvaa lukua. Propositiomuuttujina käytetään kursivoituja pääteviivallisia isoja kirjaimia mahdollisesti

alaindeksien tai muiden koristeiden kanssa, kuten P , Q , P_1 ja P' . Esimerkiksi P voi tarkoittaa että mummo on Pihtiputaalla ja S että hän on Suomessa. Myös kirjaimia F , U ja T voi käyttää propositiomuuttujina. Esimerkiksi T voi tarkoittaa että mummo on Turussa.

Sivulla 11 tilanteet jaettiin mahdollisiin ja mahdottomiin sen mukaan, toteuttavatko ne voimassa olevat oletukset. Reaalilukumuuttujia koskevia oletuksia tehtiin varsinkin päättelyn jakamiseksi haaroihin. Sama on hyödyllistä myös propositiomuuttujien tapauksessa. Siitä on esimerkkejä sivulta 91 alkaen.

Propositiomuuttujien tapauksessa tilanteiden jakoa mahdollisiin ja mahdottomiin voi käyttää myös esittämään pääteltävää asiaa koskevia lainalaisuuksia. Tällöin on varsin tavallista, että propositiomuuttujalle annetaan vain totuusarvoja **T** ja **F**. Tarkoittakoot P , S ja T , että mummo on Pihtiputaalla, Suomessa ja Turussa, ja älköön U olko käytössä. Koska Pihtipudas on Suomessa, ei ole mahdollista, että P on tosi ja samalla S on epätosi. Samasta syystä ei voi olla, että T on tosi ja samalla S on epätosi. Mummo ei voi olla kahdessa paikassa yhtäaikaan. Siksi, ja koska Pihtipudas ja Turku ovat erilliset paikkakunnat, eivät P ja T voi olla yhtäaikaan tosi. Saadaan kaikkiaan kahdeksan tilannetta, joista vain neljä on mahdollisia:

	mahdollisia				mahdottomia			
P	tosi	epätosi	epätosi	epätosi	tosi	tosi	tosi	epätosi
S	tosi	tosi	tosi	epätosi	tosi	epätosi	epätosi	epätosi
T	epätosi	tosi	epätosi	epätosi	tosi	tosi	epätosi	tosi

63. Kirjoita mahdollisimman yksinkertainen kaava, joka on tosi jokaisessa mahdollisessa tilanteessa.
64. Kirjoita mahdollisimman yksinkertainen kaava, jossa esiintyy muuttuja x , ja joka on tosi jokaisessa mahdollisessa tilanteessa.

Yhdistetty kaava

Yhdistetty kaava (*compound formula*) muodostetaan yhdestä tai useammasta atomikaavasta jollakin seuraavista tavoista:

$\neg$	niissä tilanteissa, joissa <i>kaava</i> on	on $\neg$ <i>kaava</i>
	tosi	epätosi
	epätosi	tosi
	määrittelemätön	määrittelemätön
$\wedge$	niissä tilanteissa, joissa	on <i>vasen</i> $\wedge$ <i>oikea</i>
	<i>vasen</i> on epätosi	epätosi
	<i>oikea</i> on epätosi	epätosi
	sekä <i>vasen</i> että <i>oikea</i> on tosi	tosi
	muissa tilanteissa	määrittelemätön

$\neg$		$\wedge$	F	U	T	$\vee$	F	U	T	$\rightarrow$	F	U	T	$\leftrightarrow$	F	U	T
F	T	F	F	F	F	F	F	U	T	F	T	T	T	F	T	U	F
U	U	U	F	U	U	U	U	U	T	U	U	U	T	U	U	U	U
T	F	T	F	U	T	T	T	T	T	T	F	U	T	T	F	U	T

Kuva 9: " $\neg$ ", " $\wedge$ ", " $\vee$ ", " $\rightarrow$ " ja " $\leftrightarrow$ "

$\vee$	niissä tilanteissa, joissa	on <i>vasen</i> $\vee$ <i>oikea</i>
	<i>vasen</i> on tosi	tosi
	<i>oikea</i> on tosi	tosi
	sekä <i>vasen</i> että <i>oikea</i> on epätosi	epätosi
	muissa tilanteissa	määrittelemätön

$\rightarrow$	niissä tilanteissa, joissa	on <i>vasen</i> $\rightarrow$ <i>oikea</i>
	<i>vasen</i> on epätosi	tosi
	<i>oikea</i> on tosi	tosi
	<i>vasen</i> on tosi ja <i>oikea</i> on epätosi	epätosi
	muissa tilanteissa	määrittelemätön

$\leftrightarrow$	niissä tilanteissa, joissa	on <i>vasen</i> $\leftrightarrow$ <i>oikea</i>
	sekä <i>vasen</i> että <i>oikea</i> on tosi	tosi
	sekä <i>vasen</i> että <i>oikea</i> on epätosi	tosi
	toinen on tosi ja toinen on epätosi	epätosi
	muissa tilanteissa	määrittelemätön

- $\forall$ muuttuja : kaava ja $\exists$ muuttuja : kaava esitellään luvussa 3.4.

Symbolien " $\neg$ ", " $\wedge$ ", " $\vee$ ", " $\rightarrow$ " ja " $\leftrightarrow$ " käyttäytyminen on esitetty tiiviissä muodossa kuvassa 9. Jos rivi valitaan kaavan *vasen* totuusarvon mukaan ja sarake valitaan kaavan *oikea* totuusarvon mukaan, niin niiden leikkauskohdasta löytyy yhdistetyn kaavan *vasen* $\wedge$ *oikea*, *vasen* $\vee$ *oikea* ja niin edelleen totuusarvo.

Symboli " $\neg$ " voidaan lukea "ei" ja " $\wedge$ " voidaan lukea "ja". Ne tuskin tarvitsevat perusteellisempaa esittelyä kuin on jo annettu. Vertailuketjut kuten

$$(1+x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2 \geq 1+(n+1)x > (n+1)x$$

tarkoittavat samaa kuin ketjun sisältämät vertailut " $\wedge$ ":lla yhdistettyinä, kuten

$$\begin{aligned} & (1+x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2 \\ \wedge & 1+x+nx+nx^2 \geq 1+(n+1)x \\ \wedge & 1+(n+1)x > (n+1)x. \end{aligned}$$

Symboli " $\vee$ " voidaan lukea "tai". On ehkä hyvä korostaa, että *vasen* $\vee$ *oikea* tarkoittaa, että *vasen* tai *oikea* tai molemmat on tosi. Luonnollisen kielen "tai" on

jos	on	niin	tuottaa
<i>vasen</i>	tosi	$vasen \wedge oikea$	saman totuusarvon kuin <i>oikea</i>
<i>vasen</i>	epätosi	$vasen \wedge oikea$	epätosi
<i>oikea</i>	tosi	$vasen \wedge oikea$	saman totuusarvon kuin <i>vasen</i>
<i>oikea</i>	epätosi	$vasen \wedge oikea$	epätosi
<i>vasen</i>	tosi	$vasen \vee oikea$	tosi
<i>vasen</i>	epätosi	$vasen \vee oikea$	saman totuusarvon kuin <i>oikea</i>
<i>oikea</i>	tosi	$vasen \vee oikea$	tosi
<i>oikea</i>	epätosi	$vasen \vee oikea$	saman totuusarvon kuin <i>vasen</i>

Kuva 10: Hyödyllisiä päättelysääntöjä koskien symboleita ” $\wedge$ ” ja ” $\vee$ ”

sikäli erilainen, että se tarkoittaa joissakin tapauksissa ”toinen tai toinen tai molemmat”, ja joissakin toisissa tapauksissa ”toinen tai toinen, mutta ei molemmat”. Jos joku sanoo tulevansa mukaan ravintolaan, jos siellä saa kala- tai kasvisruokaa, niin hänelle melko varmasti kelpaa ravintola, jossa on tarjolla molempia. Mutta kun ruokalistalla lukee ”jälkiruoaksi piirakanpala tai jäätelö”, niin se tavallisesti tarkoittaa, että jommankumman saa ottaa mutta ei molempia.

Sivun 69 (1) voidaan nyt kirjoittaa kaavana seuraavasti:

$$(x < 0 \wedge 3\sqrt{-x-1} = x+1) \vee (x \geq 0 \wedge 3\sqrt{x-1} = x+1)$$

”Tai”, joka ei salli molempia, voidaan rakentaa esimerkiksi $(vasen \vee oikea) \wedge \neg (vasen \wedge oikea)$. Toinen tapa muodostaa se on $(vasen \wedge \neg oikea) \vee (oikea \wedge \neg vasen)$.

Kuvassa 10 on symboleita ” $\wedge$ ” ja ” $\vee$ ” koskevia helppoja päättelysääntöjä. Esimerkiksi kuvan alin rivi voidaan lukea ”jos *oikea* on epätosi, niin $vasen \vee oikea$ tuottaa saman totuusarvon kuin *vasen*”. Vaikka kuvan päättelysäännöt ovat hyvin yksinkertaisia, on niistä usein suurta hyötyä.

Symboleiden ” $\rightarrow$ ” ja ” $\leftrightarrow$ ” paras ominaisuus on, että niistä päästään melko helposti eroon. Tähän mennessä esiteltyt asiat eivät riitä sen kertomiseen, mutta siitä puhutaan sivulta 79 alkaen.

Kuten edeltä käy ilmi, vaikka kaavan osa olisi määrittelemätön, voi koko kaava silti olla tosi tai epätosi. Hyvä esimerkki tästä on $x \neq 0 \rightarrow x \cdot \frac{1}{x} = 1$ tilanteessa $x = 0$. Silloin $x \neq 0$ on epätosi joten koko kaava on sivun 73 mukaan tosi, siitä huolimatta, että $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ on määrittelemätön. Tämä on olennainen ero lausekkeisiin, joilla osan määrittelemättömyys aina aiheuttaa koko lausekkeen määrittelemättömyyden (lähtökohta 2.7). Ero näkyy myös siinä, että lauseke esittää osittaisfunktion tilanteilta puheenaiheen olioille, mutta kaava esittää funktion (ilman alkuosaa ”osittais”) tilanteilta totuusarvoille. Lauseke voi jättää tuottamatta arvon, mutta kaava ei voi jättää tuottamatta totuusarvoa.

Itseisarvo kaavana

Emme arjessa puhu kovinkaan usein negatiivisista välimatkoista. Jos aamulla katsoit kartasta, että Rovaniemeltä on linnuntietä Pihtiputaalle 349 kilometriä, ja iltapäivällä mummo kysyy, kuinka pitkä matka on linnuntietä Pihtiputaalta Rovaniemelle, niin tuskinpa vastaat, että miinus 349 kilometriä.

Matematiikassa on usein tarve puhua lukujen välisestä etäisyydestä samalla tavalla, siis siten, että tulos ei koskaan ole negatiivinen. Reaaliluvuilla tähän riittää, että on merkintä joka muuttaa negatiiviset luvut vastaluvuikseen ja säilyttää nollan ja positiiviset luvut ennallaan. Mutta siitäkin on paljon hyötyä, koska se yksinkertaistaa käsittelyä poistamalla tarpeen puhua erikseen tapauksista, joissa ensin mainittu luku on jälkimmäistä pienempi ja tapauksista, joissa luvut ovatkin suurusjärjestyksessä toisinpäin. Jos koskaan jatkat opiskelua esimerkiksi kompleksilukuihin, tulet huomaamaan, että siellä tarvitaan tällaista merkintää vielä kovemmin.

Sellaisen käsitteen nimi on *itseisarvo* (*absolute value*). Sitä merkitään $| \cdot |$. Se määritellään usein näin:

Määritelmä 3.2

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0 \\ -x, & \text{jos } x < 0 \end{cases}$$

65. Ilmaise kaavana, että esimerkin 2.1 juoksijan ja pyöräilijän välinen etäisyys on 100 metriä.

Esimerkki 3.3 Itseisarvon määritelmä voidaan ilmoittaa kaavana seuraavasti:

$$(x \geq 0 \wedge |x| = x) \vee (x < 0 \wedge |x| = -x)$$

Nähdäksemme, että se todellakin sanoo saman kuin määritelmä 3.2, korvaamme siinä $|x| \leftarrow y$ ja päätelemme, että se on tosi silloin kun y :llä on se arvo, mikä määritelmän 3.2 mukaan $|x|$:llä on. Päätelemme myös, että muulloin se on epätosi.

Korvaamisen jälkeen kaavamme näyttää tältä:

$$(x \geq 0 \wedge y = x) \vee (x < 0 \wedge y = -x)$$

Kun $x < 0$, on $x \geq 0$ epätosi, joten kuvan 10 perusteella $x \geq 0 \wedge y = x$ on epätosi. Saman kuvan perusteella $(x \geq 0 \wedge y = x) \vee (x < 0 \wedge y = -x)$ tuottaa saman totuusarvon kuin $x < 0 \wedge y = -x$. Se puolestaan tuottaa saman totuusarvon kuin $y = -x$, koska $x < 0$ on tosi. Niinpä kun $x < 0$, on kaavamme tosi jos ja vain jos $y = -x$.

66. Perustele, että kun $x \geq 0$, on kaavamme tosi jos ja vain jos $y = x$.

Kaiken kaikkiaan kun $x < 0$, on kaavamme tosi jos ja vain jos $y = -x$; ja kun $x \geq 0$, on kaavamme tosi jos ja vain jos $y = x$. Niinpä kaavamme on tosi täsmälleen silloin, kun y :llä on se arvo, joka $|x|$:llä kuuluu olla määritelmän 3.2 mukaan.

Koska kaavassamme ei ole jakolaskuja, neliöjuuria eikä muutakaan mahdollisesti määrittelemätöntä, se ei koskaan tuota määrittelemätöntä totuusarvoa. Niinpä silloin kun se ei ole tosi, on se epätosi. $\square$

67. Tarkoittakoon $\min(x, y)$ pienempää luvuista x ja y . Kirjoita esimerkin 3.3 kaavan kaltainen kaava, jossa ei ole muita funktiosymboleita kuin peruslaskutoimituksia, ja joka on tosi täsmälleen silloin kun $z = \min(x, y)$.

Yhtätotuus

Edellä kaavojen totuusarvoista eri tilanteissa puhuttiin tyyliin ” $x \geq 0 \wedge y = x$ on epätosi”. Se on jossain määrin kömpelöä samaan tapaan kuin ” $1 + 2$ tuottaa 3” on kömpelöä. Luvuista puhuttaessa käytettävissä on myös kätevämpi merkintätapa: ” $1 + 2 = 3$ ”. Olisi hyödyllistä, jos kaavoista puhuttaessa käytettävissä olisi symboli ilmaisemaan, että *vasen* ja *oikea* tuottavat jokaisessa mahdollisessa tilanteessa saman totuusarvon.

Yhtäpitävyyden symboli ” $\Leftrightarrow$ ” ei sitä tee, koska se sallii, että toinen puoli on epätosi ja toinen määrittelemätön (määritelmä 2.16). Siksi se soveltuu esittämään (epä)yhtälöiden ratkaisuja silloinkin, kun lausekkeet eivät ole aina määritellyt (sivu 39). Mutta nyt on erilainen tarve, joten tarvitaan eri symboli.

Myöskään yhtäsuuruuden symboli ” $=$ ” ei sitä tee, koska se on kaavojen sisälle kuuluva symboli joka vertaa puheenaiheen olioita eikä kaavojen väliin kuuluva symboli joka vertaa totuusarvoja.

Uusi symbolimme ” $\equiv$ ” määritellään samaan tapaan kuin ” $\Leftrightarrow$ ” ja ” $\Rightarrow$ ”.

Määritelmä 3.4 Olkoot *vasen* ja *oikea* kaavoja. Ilmaus *vasen* $\equiv$ *oikea* tarkoittaa, että jokaisessa mahdollisessa tilanteessa *oikea* tuottaa saman totuusarvon kuin *vasen*. Sen nimi on *yhtätotuus*. Yhtätotuusketju *kaava*₁ $\equiv$ *kaava*₂ $\equiv$... $\equiv$ *kaava*_{*n*}, missä $n \geq 3$, tarkoittaa, että jokainen siihen sisältyvistä yhtätotuuksista *kaava*_{*i*} $\equiv$ *kaava*_{*i*+1}, missä $1 \leq i < n$, pätee.

Yhtätotuus ei ole kaava, vaan vertaa kahta kaavaa. Se ei ole tosi, epätosi eikä määrittelemätön, vaan *pätevä* tai *epäpätevä*. Se on pätevä, jos ja vain jos jokaisessa tilanteessa, joka toteuttaa voimassa olevat oletukset, *oikea* tuottaa saman totuusarvon kuin *vasen*. Se on epäpätevä, jos ja vain jos on olemassa yksikin tilanne, joka toteuttaa voimassa olevat oletukset ja jossa *oikea* tuottaa eri totuusarvon kuin *vasen*.

Kun sanotaan että yhtätotuus on pätevä ilman että samalla mainitaan, mistä tilanteista se muodostaa yhteenvedon eli minkä oletusten alaisuudessa sen väitettään olevan pätevä, niin tarkoitetaan, että se on pätevä niiden oletusten alaisuudessa, joiden alaisuudessa sillä hetkellä ollaan. Kun halutaan sanoa, että yhtätotuus on pätevä ilman mitään oletuksia, voidaan sanoa ”aina pätevä”.

Jos x :stä ei oleteta mitään, niin jokainen x :n arvo on mahdollinen. Tällöin esimerkiksi $3x - 5 = 7 \equiv 3x = 12$ on pätevä, koska kun $x = 4$, ovat sen molemmat puolet tosia, ja kun $x \neq 4$, ovat sen molemmat puolet epätosia. Toisaalta $3x - 5 = 7 \equiv x = 5$ on epäpätevä, koska kun $x = 4$, on sen vasen puoli tosi mutta oikea puoli epätosi. Mutta jos ollaan oletuksen $x \leq 0$ alaisuudessa, niin $3x - 5 = 7 \equiv x = 5$ onkin pätevä. Nimittäin silloin $3x - 5 \leq 0 - 5 = -5$, joten sekä $3x - 5 = 7$ että $x = 5$ on epätosi.

Alla on lisää aina päteviä eli kaikissa tilanteissa päteviä yhtätotuuksia.

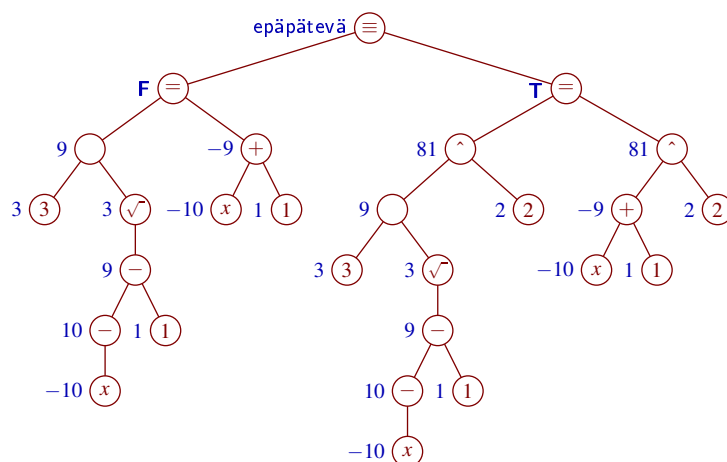
<i>vasen</i>	$\equiv$	<i>oikea</i>
$x^2 = 9$	$\equiv$	$x = -3 \vee x = 3$
$x \geq y$	$\equiv$	$x > y \vee x = y$
$2 < 3$	$\equiv$	$a + 2 < a + 3$
$x = 2 + \sqrt{44 - x}$	$\equiv$	$\sqrt{44 - x} = x - 2$
$x > x + 1$	$\equiv$	$1 + 1 = 3$

68. Tiedetään, että $x = 2 + \sqrt{44 - x} \Leftrightarrow \sqrt{44 - x} = x - 2$. Miksi $x = 2 + \sqrt{44 - x} \equiv \sqrt{44 - x} = x - 2$ on pätevä, kun $x > 44$? Miksi se on pätevä, kun $x \leq 44$?
69. Perustele, että $x > x + 1 \equiv 1 + 1 = 3$ on aina pätevä.

Yhtätotuuden *vasen* $\equiv$ *oikea* *vastaesimerkki* (*counter-example*) on mahdollinen tilanne, jossa *vasen* ja *oikea* tuottavat eri totuusarvon. Edellä huomasimme, että $x = 4$ on vastaesimerkki yhtätotuukselle $3x - 5 = 7 \equiv x = 5$. Myös $x = 5$ on sen vastaesimerkki, koska silloin $3x - 5 = 7$ on epätosi mutta $x = 5$ on tosi. Mikään muu tilanne ei ole sen vastaesimerkki. Esimerkiksi $x = 0$ ei ole sen vastaesimerkki, koska kun $x = 0$, on sen kumpikin puoli epätosi.

Kun a saa olla mikä tahansa reaaliluku, on $2 < 3 \equiv 2a < 3a$ epäpätevä, koska $a = -1$ on sen vastaesimerkki. Nimittäin $2 \cdot (-1) = -2$ ja $3 \cdot (-1) = -3$, mutta $-2 \not< -3$. Siksi kun $a = -1$, on $2 < 3$ tosi mutta $2a < 3a$ epätosi. Alla on tämä esimerkki tiiviissä muodossa sekä kaksi muuta epäpätevää yhtätotuuksia. Taulukon kaksi viimeistä saraketta kertovat kaavojen *vasen* ja *oikea* totuusarvot vastaesimerkin tilanteessa. Alin vastaesimerkki on esitetty välituloksineen kuvassa 11.

<i>vasen</i>	$\equiv$	<i>oikea</i>	vastaesimerkki		
$2 < 3$	$\equiv$	$2a < 3a$	$a = -1$	T	F
$\frac{x+5}{x} = 2$	$\equiv$	$x + 5 = 2x$	$x = 0$	U	F
$3\sqrt{-x-1} = x + 1$	$\equiv$	$(3\sqrt{-x-1})^2 = (x + 1)^2$	$x = -10$	F	T



Kuva 11: $3\sqrt{-x-1} = x+1 \equiv (3\sqrt{-x-1})^2 = (x+1)^2$ on epäpätevä

On tärkeää ymmärtää symbolien ”=”, ”≡”, ”⇔”, ”⇒” ja ”→” erot ja kulloinkin valita niistä oikea.

70. Anna alla olevan päättelyketjun jokaiselle yhtätotuuudelle oletus, jonka vallitessa se on pätevä ja joka on yhtälön ratkaisemisen kannalta mielekäs. Lopuksi anna mielekäs oletus, jonka vallitessa koko päättelyketju on pätevä.

$$\begin{aligned} & \sqrt{44-x} = x-2 \\ \text{(a)} & \equiv (\sqrt{44-x})^2 = (x-2)^2 \\ \text{(b)} & \equiv 44-x = x^2-4x+4 \\ \text{(c)} & \equiv x = -5 \vee x = 8 \end{aligned}$$

71. Kirjoita sellaiset lausekkeet *vasen*, *keski* ja *oikea*, että $\text{vasen} = \text{keski} = \text{oikea} \equiv \text{vasen} = \text{oikea} = \text{keski}$ ei päde.
72. Päteekö $\text{vasen} = \text{keski} = \text{oikea} \Leftrightarrow \text{vasen} = \text{oikea} = \text{keski}$ kaikille lausekkeille *vasen*, *keski* ja *oikea*? Perustele vastauksesi.

Laskujärjestys

Sivulla 15 palautettiin mieleen, että ellei sulkeilla määrätä toisin, reaalitylukujen lausekkeissa lasketaan kertolasku ennen yhteenlaskua, ja yhteen- ja vähennyslaskut etenevät vasemmalta oikealle. Ellei tällaisia sääntöjä olisi, tulisi monimutkaisiin lausekkeisiin paljon sulkeita vaikeuttaen niiden hahmottamista. Esimerkiksi $a^2 - 2ab + b^2$ täytyisi kirjoittaa $((a^2) - ((2a)b)) + (b^2)$.

Samasta syystä symboleille $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ on asetettu *laskujärjestyssääntöjä*. Ikävä kyllä ne eivät ole täysin vakiintuneet. Tässä kirjassa noudatetaan seuraavaa laskujärjestystä:

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$$

Siis ellei sulkeilla määrätä toisin, lasketaan $\neg$ ensimmäisenä ja $\leftrightarrow$ viimeisenä. Tämä laskujärjestys on nykyisin varsin yleinen. Toisaalta on melko tavallista jättää symbolien $\wedge$ ja $\vee$ keskinäinen järjestys määrittelemättä. Silloin ei saa kirjoittaa $P \wedge Q \vee R$, vaan pitää kirjoittaa $(P \wedge Q) \vee R$. Myöskään symbolien $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ järjestys suhteessa toisiinsa ja muihin symboleihin ei ole täysin vakiintunut.

Sivun 74 kaava voidaan nyt kirjoittaa ilman sulkeita:

$$x < 0 \wedge 3\sqrt{-x-1} = x+1 \vee x \geq 0 \wedge 3\sqrt{x-1} = x+1$$

Kaavojen muotoa $kaava_1 \wedge kaava_2 \wedge \dots \wedge kaava_n$ lopputulos ei riipu siitä, oletetaanko laskennan etenevän vasemmalta oikealle vai oikealta vasemmalle. Toisin sanoen esimerkiksi $((kaava_1 \wedge kaava_2) \wedge kaava_3) \wedge kaava_4 \equiv kaava_1 \wedge (kaava_2 \wedge (kaava_3 \wedge (kaava_4 \wedge kaava_5)))$. Sama pätee, kun ” $\vee$ ” tai ” $\leftrightarrow$ ”. Siksi niiden tapauksessa ei tarvitse sanoa, kummin päin laskenta etenee.

Mutta se ei päde kun ” $\wedge$ ”:*n* tilalla on ” $\rightarrow$ ”. Esimerkiksi $(F \rightarrow T) \rightarrow F \equiv T \rightarrow F \equiv F$ mutta $F \rightarrow (T \rightarrow F) \equiv F \rightarrow F \equiv T$. Siihen, lasketaanko *vasen* $\rightarrow$ *keski* $\rightarrow$ *oikea* kuten $(vasen \rightarrow keski) \rightarrow oikea$ vai kuten $vasen \rightarrow (keski \rightarrow oikea)$ vai onko aina pakko käyttää sulkeita, ei kirjallisuudesta löydy vakiintunutta kantaa. Osa kirjoittajista on valinnut etenemisen vasemmalta oikealle, kenties siksi, että se on tuttu lukujen vähennyslaskusta. Jotkut toiset ovat valinneet etenemisen oikealta vasemmalle, kenties siksi, että

$$kaava_1 \rightarrow (kaava_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (kaava_{n-1} \rightarrow kaava_n) \dots)) \equiv kaava_1 \wedge kaava_2 \wedge \dots \wedge kaava_{n-1} \rightarrow kaava_n$$

Tällä yhtätotuisuudella on paljon käyttöä, mutta $((\dots (kaava_1 \rightarrow kaava_2) \rightarrow \dots) \rightarrow kaava_{n-1}) \rightarrow kaava_n$ ei sievene kauniisti. Tässä kirjassa $\rightarrow$ etenee oikealta vasemmalle.

Miten symboleista ” $\rightarrow$ ” ja ” $\leftrightarrow$ ” pääsee eroon

Symboleihin ” $\rightarrow$ ” ja ” $\leftrightarrow$ ” liittyy sekaannus. Sitä käsitellään pian, mutta kerrottakoon ensin, miten sen voi melko kätevästi välttää. Sen välttää, kun ei yritä tulkita symboleita ” $\rightarrow$ ” ja ” $\leftrightarrow$ ” mitenkään muuten kuin seuraavan pikkulauseen mukaisesti:

Pikkulause 3.5 Olkoot *vasen* ja *oikea* kaavoja.

- (a) $vasen \rightarrow oikea \equiv \neg vasen \vee oikea$
- (b) $vasen \leftrightarrow oikea \equiv (vasen \rightarrow oikea) \wedge (oikea \rightarrow vasen)$
 $\equiv vasen \wedge oikea \vee \neg vasen \wedge \neg oikea$
 $\equiv (\neg vasen \vee oikea) \wedge (vasen \vee \neg oikea)$

Keskimmäisessä (b)-kohdan kaavoista on luotettu edellä kerrottuun laskujärjestykseen ja jätetty sulkeet pois. Sulkeiden kanssa se on seuraava:

$$(\text{vasen} \wedge \text{oikea}) \vee (\neg \text{vasen} \wedge \neg \text{oikea})$$

”Jos ... niin ...” ei aina tarkoita ” $\rightarrow$ ”

Symboli ” $\rightarrow$ ” luetaan tavallisesti ”jos ... niin ...”, mutta ikävä kyllä se on altis väärinkäsityksille. Tästä hyvä esimerkki on ”jos mummo on Pihtiputaalla niin hän on Rovaniemellä, tai jos hän on Rovaniemellä niin hän on Pihtiputaalla”. Monien, kenties useimpien, mielestä se on väärin: Pihtipudas ja Rovaniemi ovat eri paikkakuntia eikä kumpikaan ole edes osittain toisen sisällä, joten mummo ei voi olla yhtäaikaan molemmissa.

Kuitenkin jos valitaan ” P ” tarkoittamaan että mummo on Pihtiputaalla ja ” R ” että hän on Rovaniemellä, ja jos ”jos ... niin ...” esitetään ” $\rightarrow$ ” ja ”tai” esitetään ” $\vee$ ”, niin saadaan $(P \rightarrow R) \vee (R \rightarrow P)$. Vaihtoehto ”on määrittelemätöntä, onko mummo Pihtiputaalla”, ei ole tämän esimerkin kannalta tärkeä, joten jätämme sen analysoimatta. Jos mummo on Pihtiputaalla eli jos P on tosi, niin ” $\rightarrow$ ”:n määritelmän (sivu 73) mukaan $R \rightarrow P$ on tosi ja ” $\vee$ ”:n määritelmän (sivu 73) mukaan $(P \rightarrow R) \vee (R \rightarrow P)$ on tosi. Jos mummo ei ole Pihtiputaalla eli jos P on epätosi, niin ” $\rightarrow$ ”:n määritelmän mukaan $P \rightarrow R$ on tosi ja ” $\vee$ ”:n määritelmän mukaan $(P \rightarrow R) \vee (R \rightarrow P)$ on tosi. Niinpä $(P \rightarrow R) \vee (R \rightarrow P)$ on tosi jokaisessa mahdollisessa tilanteessa!

Tästä syystä ”jos ... niin ...” on toisinaan parempi tulkita määritelmän 2.22 mukaiseksi päättelysäännöksi tai päättelyaskeleeksi kuin kaavaksi. Tällöin ”jos mummo on Pihtiputaalla niin hän on Rovaniemellä” ei ole jotakin, joka on jos-sakin tilanteessa tosi ja toisessa epätosi, vaan se on kaikki mahdolliset tilanteet yhtäaikaan huomioon ottava sääntö, joka on tai ei ole kaiken kaikkiaan pätevä. Se merkitään $P \Rightarrow R$. Jos jokaisessa mahdollisessa tilanteessa, jossa mummo on Pihtiputaalla, hän on myös Rovaniemellä, niin se on pätevä. Jos on olemassa yksikin mahdollinen tilanne, jossa mummo on Pihtiputaalla mutta ei Rovaniemellä, niin se on epäpätevä.

Tässä esimerkissä on kolme mahdollista tilannetta: mummo on Pihtiputaalla mutta ei Rovaniemellä, mummo on Rovaniemellä mutta ei Pihtiputaalla, ja mummo ei ole kummassakaan. On siis olemassa mahdollinen tilanne, jossa mummo on Pihtiputaalla mutta ei Rovaniemellä. Niinpä säännöksi tulkittuna ”jos mummo on Pihtiputaalla niin hän on Rovaniemellä” eli $P \Rightarrow R$ on epäpätevä.

Samalla tavalla havaitaan, että säännöksi tulkittuna ”jos mummo on Rovaniemellä niin hän on Pihtiputaalla” eli $R \Rightarrow P$ on epäpätevä.

Tällä tulkinnalla ”jos mummo on Pihtiputaalla niin hän on Rovaniemellä, tai jos hän on Rovaniemellä niin hän on Pihtiputaalla” tarkoittaa väitettä, että $P \Rightarrow R$

$\rightarrow$ materiaalinen implikaatio	$\Rightarrow$ päättelyimplikaatio
sijaitsee kaavan sisällä tilanteesta riippuen F , U tai T	sijaitsee kaavojen välissä mahdollisten tilanteiden joukosta riippuen pätevä tai epäpätevä
$F \rightarrow (T \rightarrow F)$ on tosi	$F \Rightarrow (T \Rightarrow F)$ on syntaksivirhe
$F \rightarrow T \rightarrow F$ on tosi	$F \Rightarrow T \Rightarrow F$ on epäpätevä
$U \rightarrow U$ ja $U \rightarrow F$ eivät ole tosia	$U \Rightarrow U$ ja $U \Rightarrow F$ ovat päteviä

Kuva 12: Materiaalisen implikaation ja päättelyimplikaation tärkeimmät erot

on pätevä tai $R \Rightarrow P$ on pätevä. Mutta huomasimme juuri, että kumpikaan ei ole pätevä. Niinpä alkuperäinen ilmaus on väärin. Tämä vastaa sitä, että monien, kenties useimpien, mielestä alkuperäinen ilmaus kuulostaa väärältä.

Kaksi eri implikaatiota ja kaksi eri ekvivalenssia

Meillä on nyt kaksi eri implikaatiota: " $\rightarrow$ " ja " $\Rightarrow$ ". Jotta voitaisiin tarvittaessa tehdä selväksi kummasta puhutaan, määritelmässä 2.22 annettiin " $\Rightarrow$ ":n edustamalle käsitteelle nimeksi paitsi "implikaatio", myös "päättelyimplikaatio". Symbolin " $\rightarrow$ " edustaman käsitteen nimi on *materiaalinen implikaatio* (*material implication*). Niiden tärkeimmät erot on esitelty kuvassa 12.

Kolmannella rivillä "syntaksivirhe" tarkoittaa, että " $F \Rightarrow (T \Rightarrow F)$ " rikkoo päättelyiden kirjoittamisen sääntöjä eikä siksi tarkoita mitään, aivan kuten " $1 + =$ " rikkoo reaalilukujen lausekkeiden kirjoittamisen sääntöjä eikä siksi tarkoita mitään. Kaavoja saa panna sulkeisiin mutta päättelyaskelia ei saa, eikä " $T \Rightarrow F$ " ole kaava vaan päättelyaskel. Siksi " $(T \Rightarrow F)$ " on väärin.

Kahdesta alimmasta rivistä saa enemmän irti, kun sijoittaa T :n, F :n ja U :n tilalle sopivat reaaliluvuista puhuvat kaavat. Esimerkiksi toiseksi alimmasta rivistä voidaan muodostaa $1 = 2 \rightarrow 2 = 2 \rightarrow 2 = 3$ ja $1 = 2 \Rightarrow 2 = 2 \Rightarrow 2 = 3$. Sivulla 79 todettiin, että " $\rightarrow$ " etenee oikealta vasemmalle. Siksi $1 = 2 \rightarrow 2 = 2 \rightarrow 2 = 3 \equiv 1 = 2 \rightarrow (2 = 2 \rightarrow 2 = 3) \equiv F \rightarrow (T \rightarrow F) \equiv F \rightarrow F \equiv T$, mutta $1 = 2 \Rightarrow 2 = 2 \Rightarrow 2 = 3$ ei ole pätevä, koska $2 = 2 \Rightarrow 2 = 3$ ei ole pätevä.

Alimmasta rivistä saadaan, että $\frac{1}{x} = 3 \Rightarrow \frac{1}{x} = 3$ on pätevä siitä huolimatta, että kun $x = 0$, ei $\frac{1}{x} = 3 \rightarrow \frac{1}{x} = 3$ ole tosi. On järkevää, että $\frac{1}{x} = 3 \Rightarrow \frac{1}{x} = 3$ on pätevä, koska matematiikassa hyväksytään hyvin yleisesti, että mistä tahansa kaavasta saa päätellä itsensä. Toisaalta, on havaittu järkeväksi laajentaa materiaallinen implikaatio määrittelemättömälle totuusarvolle pikkulauseen 3.5 (a) mukaisesti, jolloin $U \rightarrow U \equiv U$. (Mainittakoon kuitenkin, että jotkut käyttävät vaihtoehtoista laajennosta, jolla $U \rightarrow U$ on tosi.)

Kun symbolia " $\rightarrow$ " käytetään kirjallisuudessa loogisena symbolina, sillä tar-

koitetaan melkein aina materiaalista implikaatiota. Sen sijaan symbolin " $\Rightarrow$ " käyttö kirjallisuudessa on sekavaa. Toisinaan sitä käytetään " $\rightarrow$ ":n sijaan. Toisinaan sitä käytetään suunnilleen samoin kuin tässä kirjassa, mutta saatetaan silti määritellä se ikään kuin se tarkoittaisi materiaalista implikaatiota. Toisinaan sitä käytetään epämuodollisena, varsinaisen logiikan ulkopuolisena symbolina, jolle ei anneta tarkkaa merkitystä.

Ehkä tässä kohdassa on hyvä mainita myös käsitteeseen "looginen seuraus" liittyvästä sekaannuksesta. Yleisimmin käytetty loogisen seurauksen täsmällinen määritelmä esittää käsitteen, jota merkitään "*lähtökohdat* $\models$ *seuraus*". Niin määriteltä looginen seuraus olettaa logiikan symboleilla (kuten " $\wedge$ ", " $\neg$ ", " $\forall$ " ja " $=$ ") olevan ne merkitykset kuin tässäkin kirjassa, mutta puheenaiheen symbolien (kuten " $>$ ", " $+$ " ja " $>$ ") merkityksestä se ei oleta mitään.

Siksi esimerkiksi vaikka $x > 5 \Rightarrow x > 3$ on pätevä, ei $x > 3$ ole kaavan $x > 5$ looginen seuraus. Koska ei ole kerrottu, mitä " $>$ ", " 5 " ja " $>$ " tarkoittavat, ne voivat tarkoittaa vaikkapa "Pihtipudas", "Rovaniemi" ja "on naapurikunta". Niin tulkittuna $x > 5 \Rightarrow x > 3$ sanoo, että jos x on Rovaniemen naapurikunta niin se on myös Pihtiputaan naapurikunta. Mutta se ei ole totta. Niinpä tuo implikaatio ei ole looginen seuraus.

Jotta siitä saataisiin looginen seuraus, vasemmalle täytyy lisätä jotakin tietoa siitä mitä " $>$ ", " $>$ " ja " 5 " tarkoittavat. Esimerkiksi

$$x > 5 \wedge 5 > 3 \wedge \forall a : \forall b : \forall c : (a > b \wedge b > c \rightarrow a > c) \Rightarrow x > 3$$

on looginen seuraus. Mutta symbolia " $\Rightarrow$ " ei tavallisesti käytetä näin, vaan vaikiintuneiden symbolien tutut ominaisuudet kuten $5 > 3$ ja " $>$ ":n transitiiivisuus oletetaan tunnetuiksi, eikä niitä toisteta kun päättely käyttää niitä.

Silti ilmausta "*vasen* $\Rightarrow$ *oikea*" sanotaan toisinaan loogiseksi seuraukseksi. Se on harhaanjohtavaa, joten tässä kirjassa sitä vältetään.

Symboli " $\Leftrightarrow$ " luetaan tavallisesti "jos ja vain jos". Sillä (tai sen tarkoittamalla asialla) on myös pitempi nimi *materiaalinen ekvivalenssi* (*material equivalence*). Se on altis samankaltaiselle väärinkäsitykselle kuin " $\rightarrow$ ". Sitä vastaava päättelysääntö esitetään symbolilla " $\Leftrightarrow$ ".

3.2 Yhtäpitävyyttä tai yhtätotuutta koskevia pikkulauseita

Tässä luvussa ???

Yhtätotuusketjua koskevia

Kuvassa 7 havainnollistettiin sitä, että jos yhtäpitävyyshetjussa jokin kaava on tosi, niin myös sen vieressä oleva kaava on tosi, tämän vieressä oleva kaava on tosi ja niin edelleen kumpaankin suuntaan laitimmaiseen kaavaan saakka. Yhtäpitävyyshetjussa sama ei päde erikseen epätodelle ja erikseen määrittelemättömälle, koska " $\Leftrightarrow$ " sallii, että sen toisella puolella oleva kaava on epätosi ja toisella puolella oleva on määrittelemätön. Mutta yhtätotuushetjussa pätee. Saamme pikkulausetta 2.18 muistuttavan pikkulauseen.

Pikkulause 3.6 Jos $n \geq 2$ ja $kaava_1 \equiv kaava_2 \equiv \dots \equiv kaava_n$, niin $kaava_1 \equiv kaava_n$. Jos lisäksi $1 \leq i \leq n$ ja $1 \leq j \leq n$, niin $kaava_i \equiv kaava_j$.

73. Johda pikkulauseelle 2.17 " $\equiv$ "-vastine pikkulauseesta 3.6.

Kutsumme symboleita " $\equiv$ ", " $\Leftrightarrow$ ", " $\Rightarrow$ " ja " $\Leftarrow$ " *päätelyoperaattoreiksi*. Määritelmien 3.4 ja 2.16 perusteella on selvää, että jos $vasen \equiv oikea$ niin $vasen \Leftrightarrow oikea$. Pikkulauseen 2.23 mukaan jos $vasen \Leftrightarrow oikea$ niin $vasen \Rightarrow oikea$ ja $vasen \Leftarrow oikea$. Nämä tulokset yleistyvät seuraavaksi päätelyketjuja koskevaksi pikkulauseeksi, joka on yleisempi kuin pikkulause 2.24.

Pikkulause 3.7 Tarkoittakoon " po " mitä tahansa päätelyoperaattoria. Jos $n \geq 2$ ja pätevässä päätelyketjussa $kaava_1 po_1 kaava_2 po_2 \dots po_{n-1} kaava_n$ ei esiinny muita päätelyoperaattoreita

kuin	niin
$\equiv$	$kaava_1 \equiv kaava_n$
$\equiv$ ja $\Leftrightarrow$	$kaava_1 \Leftrightarrow kaava_n$
$\equiv$, $\Leftrightarrow$ ja $\Rightarrow$	$kaava_1 \Rightarrow kaava_n$
$\equiv$, $\Leftrightarrow$ ja $\Leftarrow$	$kaava_1 \Leftarrow kaava_n$

Pikkulause 3.7 kuuluu niihin perusasioihin, joita käytetään vähän väliä ilman mainintaa.

Ei ole totta, että jokainen lauseke on yhtäsuuri itsensä kanssa, koska esimerkiksi $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$ ei ole tosi, koska $\sqrt{-1}$ ei ole määritelty. Vastaava asia menee toisin päätelyoperaattoreiden tapauksessa: määritelmästä 3.4 seuraa, että jokaiselle kaavalle pätee $kaava \equiv kaava$ (sama kaava molemmilla puolilla). Tämä ero johtuu siitä, että määrittelemätön lauseke tarkoittaa tässä kirjassa, että lauseke ei tuota

mitään arvoa — ei edes mitään erikoisarvoa kuten ”virhe” tai ”not-a-number” — mutta määrittelemätön totuusarvo on nimestään huolimatta aito totuusarvo, jonka esiintyminen osakaavan tuloksena ei välttämättä johda siihen, että koko kaava olisi määrittelemätön.

Määrittelemättömän lausekkeen käyttäytyminen on tässä kirjassa valittu edellä kuvatun mukaiseksi siksi, että sillä tavalla määrittelemätöntä käsitellään matematiikassa hyvin usein, ehkä jopa melkein aina. Myös tämän kirjan tapa käsitellä määrittelemätöntä totuusarvoa vastaa matematiikan yleistä tapaa (logiikka pois lukien), vaikka se on erilainen kuin määrittelemättömän lausekkeen käsitteily ja vaikka matemaatikot eivät yleensä kerro, miten määrittelemätöntä käsitellään. Kuitenkin kun katsoo mitä he tekevät, se vastaa tämän kirjan tapaa. He eivät esimerkiksi sano, että on määrittelemätöntä, onko 1 yhtälön $\frac{x^2-1}{x-1} = 7$ juuri, koska $x = 1$ aiheuttaa nollalla jakamisen, vaan he sanovat, että 1 ei voi olla yhtälön $\frac{x^2-1}{x-1} = 7$ juuri, koska $x = 1$ aiheuttaa nollalla jakamisen.

Siitä, että jokaiselle kaavalle pätee $kaava \equiv kaava$, seuraa pikkulauseen 3.7 mukaan, että jokaiselle kaavalle pätee myös $kaava \Leftrightarrow kaava$ ja $kaava \Rightarrow kaava$ ja $kaava \Leftarrow kaava$ (koko ajan sama kaava molemmilla puolilla).

Yhtäsuuruus uudelleen

Pikkulauseet 2.19 ja 2.20 säilyvät pätevinä myös jos yhtäpitävyys korvataan yhtätuudella.

Pikkulause 3.8

- (a) Jos *vasen* ja *oikea* ovat lausekkeita, niin $vasen = oikea \equiv oikea = vasen$.
- (b) Jos $n \geq 2$ ja $i_1, \dots, i_n$ ovat $1, \dots, n$ mahdollisesti eri järjestyksessä, niin $lauseke_{i_1} = lauseke_{i_2} = \dots = lauseke_{i_n} \equiv lauseke_{i_1} = lauseke_{i_2} = \dots = lauseke_{i_n}$.

Pikkulauseet 2.19, 2.20 ja 3.8 havainnollistavat kahta näkökohtaa, jotka ovat vaikuttaneet tämän kirjan rakenteeseen.

Jos tämä kirja olisi tarkoitettu kokeneelle matemaatikolle, niin pikkulauseen 3.8 (a)-kohta olisi jätetty pois, koska sen saa helposti (b)-kohdasta. Toisaalta (b)-kohta on (a)-kohtaa abstraktimpi, joten opiskelijalta saattaa jäädä huomaamatta, että siitä saisi sen. Siksi tässä kirjassa näytetään molemmat.

Pikkulause 3.7 antaa monissa tapauksissa luvan korvata symboli ” $\equiv$ ” symbolilla ” $\Leftrightarrow$ ”. Tarkoitus on, että sellainen korvaaminen muuttuu pikkuhiljaa niin tutuksi, että kun sitä tarvitaan, se tapahtuu melkein huomaamatta. Sen jälkeen pikkulauseet 2.19 ja 2.20 ovat tarpeettomia, sillä ne saa sellaisella korvaamisella pikkulauseesta 3.8. Mutta pikkulauseen 3.7 saattoi esittää vasta kun sekä ” $\Leftrightarrow$ ” että

” $\equiv$ ” olivat riittävän tuttuja. Tässä kirjassa käsiteltiin ” $\Leftrightarrow$ ” ensin, koska sitä on helpompi havainnollistaa, sillä se sopii yhtälöiden ratkaisemiseen. Ja siihen tarvittiin pikkulausetta 2.19 paljon ennen kuin tuli aika esitellä ” $\equiv$ ”.

Näistä syistä tässä kirjassa käsitellään joitakin asioita useasti siten että uudella käsittelykerralla tulee aina jotakin uutta mukaan. Mainittakoon tässä, että symbolit ” $\forall$ ” ja ” $\exists$ ” tuovat mukanaan muuttujien käsittelyä koskevia lisäasioita, jotka ovat kulloisenkin pääasian kannalta aika häiritseviä. Siksi monet jatkossa käsiteltävät asiat käsitellään kahteen kertaan, ensin ilman ” $\forall$ ” ja ” $\exists$ ” ja sitten niiden kanssa.

Osakaavan korvaaminen yhtäpitävällä

Alla on esimerkki yhtälöparin ratkaisemisesta sijoituskeinolla. Se on esitetty sikäli kömpelösti, että yhtälöitä toistetaan muuttumattomina. Toisaalta esitystapa on sikäli erinomainen, että ratkaisutapa ja sen pätevyys näkyvät selvästi.

	eka	toka
1	$3x + y = 1 \wedge 5x + 2y = 4$	
2	$\Leftrightarrow y = 1 - 3x \wedge 5x + 2y = 4$	ratkaistiin y ekasta
3	$\Leftrightarrow y = 1 - 3x \wedge 5x + 2(1 - 3x) = 4$	sijoitettiin y:n lauseke tokaan
4	$\Leftrightarrow y = 1 - 3x \wedge x = -2$	ratkaistiin x tokasta
5	$\Leftrightarrow y = 1 - 3 \cdot (-2) \wedge x = -2$	sijoitettiin x:n lauseke ekaan
6	$\Leftrightarrow y = 7 \wedge x = -2$	laskettiin $1 - 3 \cdot (-2) = 7$

Rivillä 2 ratkaistiin y ensimmäisestä yhtälöstä. Siinä ei ole itsessään mitään kummallista, mutta mikä antaa luvan tehdä niin isomman kaavan sisällä? Jotta näkyisi, että tämä ei ole tyhmä kysymys, tarkastelemme hetken toista esimerkkiä.

Esimerkki 3.9 Esimerkissä 2.35 osoitettiin, että jos $x \geq 100$, niin $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} \leq 1,01 \cdot \frac{1}{x+1}$. Joku saattaisi tämän kuultuaan kysyä, että kuinka paljon $\frac{1}{x}$:n pitäisi olla, jotta päti $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} \leq 1,01 \cdot \frac{1}{x+1}$. Tiedetään, että $x \geq 100 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} \leq 0,01$. Saattaisi olla houkuttelevaa esittää edellä oleva ”jos ... niin ...” symbolin ” $\rightarrow$ ” avulla ja päätellä seuraavasti:

$$\begin{aligned} x \geq 100 &\rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} \leq 1,01 \cdot \frac{1}{x+1} \\ \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} \leq 0,01 &\rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} \leq 1,01 \cdot \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

Mutta se ei ole oikein. Kun $x = 0$, on $x \geq 100$ epätosi, joten kuvan 9 mukaan ylempi kaava on tosi. Toisaalta silloin jokainen alemman kaavan sisältämä vertailu on määrittelemätön, joten se sievenee muotoon $\mathbf{U} \wedge \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U} \wedge \mathbf{U}$. Se tuottaa $\mathbf{U}$, eikä siis ole tosi. $\square$

Osakaavan korvaaminen kaavan sisällä on yleisimmillään aika monimutkainen asia (vilkaise vaikkapa lauseita 3.21 ja 3.22). Mutta yhtälöparien ratkaisemiseen riittää paljon yksinkertaisempi pikkulause. Se on lauseen 3.22 seuraus.

Pikkulause 3.10 Olkoot *vasen* ja *oikea* kaavoja. Jos $\text{vasen} \Leftrightarrow \text{oikea}$ ja X ei sijaitse $\text{kaava}(X)$:ssä muiden symbolien alaisuudessa kuin " $\wedge$ " ja " $\vee$ ", niin $\text{kaava}(\text{vasen}) \Leftrightarrow \text{kaava}(\text{oikea})$.

??? Todistus

Koska $3x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 3x$, rivin 2 yhtäpitävyys

$$3x + y = 1 \wedge 5x + 2y = 4 \Leftrightarrow y = 1 - 3x \wedge 5x + 2y = 4$$

saadaan pikkulauseesta 3.10 valinnoilla $\text{vasen} \Leftarrow 3x + y = 1$ ja $\text{oikea} \Leftarrow y = 1 - 3x$ ja $\text{kaava}(X) \Leftarrow X \wedge 5x + 2y = 4$.

74. Näytä $\Leftarrow$ -merkinnällä, millä valinnoilla rivin 4 yhtäpitävyys

$$y = 1 - 3x \wedge 5x + 2(1 - 3x) = 4 \Leftrightarrow y = 1 - 3x \wedge x = -2$$

saadaan pikkulauseesta 3.10.

75. Näytä " $\Leftarrow$ "-merkinnällä, mitkä olisivat *vasen* ja niin edelleen, jos pikkulausetta 3.10 yritettäisiin käyttää antamaan lupa tehdä esimerkissä 3.9 tehty virheellinen osakaavan korvaaminen

$$x \geq 100 \rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} \leq 1,01 \cdot \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} \leq 0,01 \rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} \leq 1,01 \cdot \frac{1}{x+1}$$

Mikä pikkulauseessa 3.10 estää luvan saamisen?

Yhtäsuuruuden soveltaminen kaavan sisällä

Rivin 3 yhtäpitävyyden

$$y = 1 - 3x \wedge 5x + 2y = 4 \Leftrightarrow y = 1 - 3x \wedge 5x + 2(1 - 3x) = 4$$

voi perustella seuraavasti. Ensin päätellään oletuksen $y = 1 - 3x$ alaisuudessa $5x + 2y = 4 \Leftrightarrow 5x + 2(1 - 3x) = 4$. Se tapahtuu kohta näytettävällä pikkulauseella 3.11. Valitsemme

x	$\text{kaava}(a)$	vasen	oikea
a	$5x + 2a = 4$	y	$1 - 3x$

Pikkulauseessa 3.11 " $\neg[\text{vasen}] \wedge \neg[\text{oikea}]$ " tarkoittaa, että tarkasteltavassa tilanteessa kumpikaan lausekkeista *vasen* ja *oikea* ei ole määritelty. Jotta pikkulauseen x ja kaavamme x eivät sekottuisi toisiinsa, vaihdoimme pikkulauseessa x :n tilalle a :n. Se on sallittua, koska pikkulauseen x on pikkulauseen sisäinen apumuuttuja, jonka ainoa tehtävä on näyttää, mihin kohtaan kaavaa *vasen* ja *oikea* laitetaan. Niinpä sen nimen saa valita vapaasti, kunhan se ei sekoitu muiden muuttujien nimiin.

Pikkulause 3.11 Olkoot *vasen* ja *oikea* lausekkeita. Jos x ei esiinny symbolin " $\forall$ " eikä " $\exists$ " alaisuudessa $kaava(x)$:ssä ja jos jokaisessa mahdollisessa tilanteessa $vasen = oikea \vee \neg[vasen] \wedge \neg[oikea]$, niin $kaava(vasen) \equiv kaava(oikea)$.

Todistus. Todistuksen perusidea on sama kuin pikkulauseen 2.14 todistuksessa, jota havainnollistettiin kuvassa 6.

Oletuksen $vasen = oikea \vee \neg[vasen] \wedge \neg[oikea]$ vuoksi joko *vasen* ja *oikea* tuottavat saman arvon, tai kumpikaan ei tuota arvoa. Jos ne tuottavat arvon, niin $kaava(vasen)$ ja $kaava(oikea)$ tekevät samat puheenaiheen laskut samoilla arvoilla. Jolleivät ne tuota arvoa, niin lähtökohdan 2.7 ansiosta niihin kohdistuvien laskujen lopputulos on määrittelemätön.

Kummassakin tapauksessa kukin atomikaava saa $kaava(vasen)$:ssa argumentteikseen samat tiedot kuin $kaava(oikea)$:ssa, missä tieto on joko puheenaiheen alkio tai määrittelemätön. Kaavan tuottama totuusarvo riippuu vain atomikaavojen saamista tiedoista, ei siitä, miten ne tiedot on tuotettu. Siksi $kaava(vasen)$ ja $kaava(oikea)$ tuottavat saman tuloksen. $\square$

Koska olemme valinneet $x \Leftarrow a$, on a se muuttuja, jonka tilalle y ja $1 - 3x$ laitetaan. Kaavassa $5x + 2a = 4$ ei ole symboleita " $\forall$ " eikä " $\exists$ ", joten a ei ole niiden alaisuudessa. Ehdosta $vasen = oikea \vee \dots$ tulee $y = 1 - 3x \vee \dots$. Se on jokaisessa mahdollisessa tilanteessa tosi, koska olemme oletuksen $y = 1 - 3x$ alaisuudessa, eli nyt mahdollisia ovat vain tilanteet, joissa $y = 1 - 3x$ on tosi. Niinpä pikkulause 3.11 tuottaa $kaava(vasen) \equiv kaava(oikea)$ eli $5x + 2y = 4 \equiv 5x + 2(1 - 3x) = 4$. Pikkulause 3.7 antaa luvan vaihtaa " $\equiv$ ":n tilalle " $\Leftrightarrow$ ".

76. Miten *kaava*, *vasen* ja *oikea* pitää valita, jos halutaan osoittaa rivin 6 yhtäpitävyys

$$y = 1 - 3 \cdot (-2) \wedge x = -2 \Leftrightarrow y = 7 \wedge x = -2$$

pikkulauseella 3.11? Perustele lyhyesti, että pikkulauseen 3.11 jos-osa toteutuu.

Oletuksen siirto kaavaan ja toisinpäin

Nyt on osoitettu, että oletuksen $y = 1 - 3x$ alaisuudessa $5x + 2y = 4 \Leftrightarrow 5x + 2(1 - 3x) = 4$. Seuraavan pikkulauseen kohdan (b) mukaan se on sama asia kuin $y = 1 - 3x \wedge 5x + 2y = 4 \Leftrightarrow y = 1 - 3x \wedge 5x + 2(1 - 3x) = 4$.

Pikkulause 3.12

- (a) Oletusten *oletus* ja *muut_oletukset* alaisuudessa $vasen \Rightarrow oikea$ jos ja vain jos oletusten *muut_oletukset* alaisuudessa $oletus \wedge vasen \Rightarrow oikea$.

- (b) Oletusten *oletus* ja *muut_oletukset* alaisuudessa *vasen* $\Leftrightarrow$ *oikea*
jos ja vain jos oletusten *muut_oletukset* alaisuudessa
oletus $\wedge$ *vasen* $\Leftrightarrow$ *oletus* $\wedge$ *oikea* .

Todistus. Kohdan (a) voi näppärästi todistaa ajattelemalla asian vastaesimerkkien kautta. Määritelmän 2.22 mukaan sen alkuosan vastaesimerkkejä ovat tilanteet, joissa *muut_oletukset* ja *oletus* ja *vasen* ovat tosia mutta *oikea* ei ole. Saman määritelmän mukaan sen loppuosan vastaesimerkkejä ovat tilanteet, joissa *muut_oletukset* ja *oletus* $\wedge$ *vasen* ovat tosia mutta *oikea* ei ole. Näiden kahden ainoa ero on, että toisessa lukee ”ja” ja toisessa ” $\wedge$ ”. Niinpä ne tarkoittavat samaa.

Kohdan (b) saisi todistettua samaan tyyliin, mutta todistamme sen eri lailla havainnollistaaksemme, että todistuksia voi muotoilla monilla eri tavoilla. (Sen saisi todistettua kolmannellakin tavalla kohdan (a) ja pikkulauseen 2.23 avulla, mutta se vaatisi enemmän propositiologiikkaa kuin tähän mennessä on käsitelty.)

Tilanteet, joissa *muut_oletukset* ei ole tosi, eivät kuulu tarkasteltaviin tilanteisiin. Jos *oletus* ei ole tosi, niin tilanne ei ole alkuosan vastaesimerkki, koska se ei ole alkuosassa tarkasteltava tilanne; eikä se ole loppuosan vastaesimerkki, koska kumpikaan kaavoista *oletus* $\wedge$ *vasen* ja *oletus* $\wedge$ *oikea* ei ole tosi.

Jos kumpikaan kaavoista *vasen* ja *oikea* ei ole tosi, niin sekä alku- että loppuosassa ” $\Leftrightarrow$ ”:n kumpikaan puoli ei ole tosi. Jos molemmat kaavoista *vasen* ja *oikea* ovat tosia, niin molemmat yhtäpitävyydet ovat tarkasteltavassa tilanteessa päteviä.

Jäljellä ovat tilanteet, joissa *oletus* ja *muut_oletukset* sekä täsmälleen yksi kaavoista *vasen* ja *oikea* ovat tosia. Ne ovat sekä alkuosan että loppuosan vastaesimerkkejä. $\square$

Koska oletuksen $y = 1 - 3x$ alaisuudessa onnistuttiin päättelemään $5x + 2y = 4 \Leftrightarrow 5x + 2(1 - 3x) = 4$, saadaan rivin 3 yhtäpitävyys pikkulauseesta 3.12 (b) seuraavilla valinnoilla:

	<i>oletus</i>	<i>muut_oletukset</i>	<i>vasen</i>	<i>oikea</i>
$\Leftarrow$	$y = 1 - 3x$	ei mitään	$5x + 2y = 4$	$5x + 2(1 - 3x) = 4$

77. Osoita rivin 5 yhtäpitävyys

$$y = 1 - 3x \wedge x = -2 \Leftrightarrow y = 1 - 3 \cdot (-2) \wedge x = -2$$

samaan tapaan kuin edellä osoitettiin rivin 3 yhtäpitävyys. Älä kuitenkaan kirjoita yhtä paljon yksityiskohtia vaan ainoastaan suuret linjat muutamalla rivillä.

78. Ratkaise tällä menetelmällä yhtälöpari $8a - 15b = 12 \wedge 6b + 5a = 28$. Käytä symboleita ” $\Leftrightarrow$ ”, ” $\Rightarrow$ ” ja/tai ” $\Leftarrow$ ”, eikä päättelyaskelia tarvitse perustella. Vihje: ikävien murtolukujen määrä vähenee, kun sopivassa vaiheessa kerrot toisen tai

molempien yhtälöiden molemmat puolet sopivalla luvulla. Saat vähentää kirjoittamista pikkulauseella 2.21.

79. Ratkaise tällä menetelmällä yhtälöpari $10x - 6y = 14 \wedge 15x = 21 + 9y$. Esitä ratkaisusi kuten edellä.

Milloin lauseke on määrittelemätön?

Pikkulauseiden 2.26, 3.11 ja joidenkin myöhemmin esitettävien pikkulauseiden vuoksi on tarpeen tietää, missä tilanteissa lauseke on määrittelemätön. Sitä on jo jonkin verran käsitelty lähtökohdissa 2.7 ja 2.8. Nyt se käsitellään kattavasti. Kohta esitettävä lähtökohta 3.13 korvaa lähtökohdat 2.7 ja 2.8. Ne eivät kuitenkaan muutu epäpäteviksi, sillä lähtökohta 3.13 tullaan muodostamaan siten, että se ei ole ristiriidassa niiden kanssa.

Jokaiseen funktiosymboliin f liittyy kaava $\lceil f \rceil$, joka kertoo, millä argumenteilla f on määritelty. Esimerkiksi $\lceil \sqrt{x} \rceil$ on $x \geq 0$, $\lceil \frac{x}{y} \rceil$ on $y \neq 0$ ja $\lceil x + y \rceil$ on $\mathbf{T}$. Jos $\lceil f \rceil$ on $\mathbf{T}$, niin f on määritelty kaikilla puheenaiheen arvojen yhdistelmillä.

80. Mikä on $\lceil \ln x \rceil$? (Tarvittaessa katso Wikipediasta ”Luonnollinen logaritmi”.)
 81. Mikä on $\lceil |x| \rceil$?

Kaava $\lceil f \rceil$ pitää laatia siten, että se ei koskaan tuota $\mathbf{U}$. Jos $\lceil f \rceil$ ei sisällä funktiosymboleita, niin tämä toteutuu automaattisesti, koska, kuten sivulla 24 sanottiin, määrittelemätön lauseke voi tässä kirjassa syntyä vain siten, että jotakin osittaisfunktioita ei voi laskea. Voidaan kuitenkin sallia, että $\lceil f \rceil$ sisältää funktiosymboleita, kunhan niistä jokaisen oma $\lceil \cdot \rceil$ -kaava on $\mathbf{T}$. Se varmistaa, että ne ovat määritelty kaikilla puheenaiheen arvojen yhdistelmillä.

Myös jokaiseen lausekkeeseen liittyy kaava $\lceil \text{lauseke} \rceil$, joka kertoo, milloin *lauseke* on määritelty. Lähtökohdassa 2.8 luvattiin, että jokainen vakio ja jokainen muuttuja on aina määritelty. Jotta $\lceil \text{lauseke} \rceil$ olisi tämän mukainen, sovimme, että jos *lauseke* on pelkkä vakio tai pelkkä muuttuja, niin $\lceil \text{lauseke} \rceil$ on $\mathbf{T}$.

Lähtökohtien 2.7 ja 2.8 mukaan osittaisfunktion kutsu on määritelty, jos ja vain jos osittaisfunktion jokainen argumentti on määritelty, ja osittaisfunktio itse on määritelty saamallaan argumenttien arvoilla. Siksi, jos f :llä on kaksi argumenttia ja ne ovat *vasen* ja *oikea*, niin $\lceil f(\text{vasen}, \text{oikea}) \rceil$ muodostetaan seuraavasti:

$$\lceil \text{vasen} \rceil \wedge \lceil \text{oikea} \rceil \wedge \lceil f \rceil(\text{vasen}, \text{oikea})$$

Sama periaate toimii muillakin argumenttien määrillä.

Edellä oleva on tiivistetty seuraavaan lähtökohtaan.

Lähtökohta 3.13

- (a) Jokaiseen funktiosymboliin f liittyy kaava $\lceil f \rceil$, joka kertoo, millä argumenteilla f on määritelty. Kaava $\lceil f \rceil$ ei saa sisältää muita funktiosymboleita kuin sellaisia g , joiden oma $\lceil g \rceil$ on $\mathbf{T}$.
- (b) Jos *lauseke* on pelkkä vakio tai pelkkä muuttuja, niin $\lceil \text{lauseke} \rceil$ on $\mathbf{T}$.
- (c) Jos *lauseke* on muotoa $f(\text{kaava}_1, \dots, \text{kaava}_n)$, niin $\lceil \text{lauseke} \rceil$ on $\lceil \text{kaava}_1 \rceil \wedge \dots \wedge \lceil \text{kaava}_n \rceil \wedge \lceil f \rceil(\text{kaava}_1, \dots, \text{kaava}_n)$.

Tätä lähtökohtaa käytettäessä kaavaan syntyy usein monta ” $\wedge \mathbf{T}$ ” tai ” $\mathbf{T} \wedge$ ”. Ne saa jättää pois (kuva 10).

Lopuksi jokaiseen kaavaan liittyy kaava $\lceil \text{kaava} \rceil$, joka kertoo, milloin *kaava* on määritelty.

Tästä eteenpäin luku 3 on niin keskeneräinen, että kannattaa lopettaa sen lukeminen.

??? isdef ei ole logiikan symboli vaan lyhennemerkintä, isdef kaavoille

Toisinaan on päätelty $\text{vasen} \Leftrightarrow \text{oikea}$, mutta tarvittaisiin $\text{vasen} \equiv \text{oikea}$ esimerkiksi siksi, että halutaan seuraavaksi käyttää pikkulausetta ???. Se saadaan seuraavan pikkulauseen avulla.

Pikkulause 3.14 Jos $\text{vasen} \Leftrightarrow \text{oikea}$ ja $\lceil \text{vasen} \rceil \Leftrightarrow \lceil \text{oikea} \rceil$,
niin $\text{vasen} \equiv \text{oikea}$.

Jollei $\lceil \text{vasen} \rceil \Leftrightarrow \lceil \text{oikea} \rceil$ ole voimassa kaikissa tilanteissa, voidaan käsitellä erikseen tilanteet, joissa jompikumpi kaavoista *vasen* ja *oikea* tuottaa $\mathbf{U}$ mutta toinen ei tuota, ja käsitellä muut tilanteet oletuksen $\lceil \text{vasen} \rceil \Leftrightarrow \lceil \text{oikea} \rceil$ alaisuudessa.

???

Pikkulause 3.15 Jos $n \geq 2$ ja $i_1, \dots, i_n$ ovat $1, \dots, n$ mahdollisesti eri järjestyksessä, niin $\text{lauseke}_1 = \text{lauseke}_2 = \dots = \text{lauseke}_n \equiv \text{lauseke}_{i_1} = \text{lauseke}_{i_2} = \dots = \text{lauseke}_{i_n}$.

Pikkulause 2.21 on pätevä myös jos jokaisen ” $\Leftrightarrow$ ” tilalla on ” $\equiv$ ”.

Pikkulause 3.16 Jos vasen ja oikea ovat lausekkeita, niin $\text{vasen} = \text{oikea} \equiv \text{oikea} = \text{vasen}$.

3.3 Propositiologiikkaa

Propositiologiikka (*propositional logic*) tarkoittaa logiikan alalajia, jossa kaavoissa esiintyy vain symboleita **F**, **U**, **T**, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ ja propositiomuuttujia. Toisin sanoen, kaavoissa ei esiinny lausekkeita eikä symboleita $\forall$ ja $\exists$. Niinpä propositiologiikan kaavat eivät puhu mistään sellaisesta puheenaiheesta kuin reaaliluvut tai Britannian kuninkaalliset, vaan esimerkiksi siitä, onko mummo Pihtiputaalla vai eikö ole ja onko hän Suomessa vai eikö ole.

Lause 3.17 Jos *vasen* $\equiv$ *oikea*, niin
kaava(vasen) $\equiv$ *kaava(oikea)*.

Todistus.

□

$$kaava \wedge F \equiv F \wedge kaava \equiv F$$

$$kaava \vee F \equiv F \vee kaava \equiv kaava$$

$$kaava \wedge T \equiv T \wedge kaava \equiv kaava$$

$$kaava \vee T \equiv T \vee kaava \equiv T$$

De Morganin lait

$$vasen \rightarrow oikea \equiv \neg vasen \vee oikea$$

$$vasen \leftrightarrow oikea \equiv (vasen \rightarrow oikea) \wedge (oikea \rightarrow vasen)$$

???

Päättelyminen kaksiarvoisessa propositiologiikassa onnistuu usein valitsemalla jokin propositiomuuttuja, sijoittamalla siihen vuoronperään **F** ja **T** ja sieventämällä.

Esimerkki 3.18 Osoitamme, että kaksiarvoisessa logiikassa $P \vee Q \wedge R \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$. Teemme sen kokeilemalla P :n molemmat totuusarvot.

Jos $P \equiv F$, niin $P \vee Q \wedge R \equiv F \vee Q \wedge R \equiv Q \wedge R$ ja $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \equiv (F \vee Q) \wedge (F \vee R) \equiv Q \wedge R$. Molemmista tuli sama kaava (nimittäin $Q \wedge R$).

Jos $P \equiv T$, niin $P \vee Q \wedge R \equiv T \vee Q \wedge R \equiv T$ ja $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \equiv (T \vee Q) \wedge (T \vee R) \equiv T \wedge T \equiv T$. Molemmista tuli sama kaava (nimittäin **T**). □

Kun ei puhuta jostakin nimenomaisesta kaavasta vaan kaavoista yleisemmin, käytetään tässä kirjassa muun muassa merkintöjä *kaava*, *vasen* ja *oikea*. Tällöin totuusarvon sijoittamista propositiomuuttujaan merkitään siten, että ilmauksella *kaava*(X) kerrotaan sen propositiomuuttujan nimi, johon sijoitetaan, ja ilmauksella *kaava*(**F**), *kaava*(**U**) ja *kaava*(**T**) kerrotaan se totuusarvo, joka sijoitetaan. Merkintä *kaava*(X) sallii *kaava*:ssa muitakin propositiomuuttujia kuin X . Se ei myöskään vaadi, että X esiintyy *kaava*:ssa. Jos X ei esiinny *kaava*:ssa, niin *kaava*(X) on sama kaava kuin *kaava*(Y), laitetaanpa Y :ksi mitä tahansa. Tätä vapautta hyödynnetään pian lauseen 3.20 todistuksessa.

Moni kaksiarvoisen logiikan laki voidaan yleistää kolmiarvoiseen logiikkaan kätevästi kohta esitettävän lauseen avulla. Jotta lauseen todistus saataisiin helpommin ymmärrettäväksi, esitetään ja todistetaan ensin apulause.

??? Selitä käsitteet

Apulause 3.19 Olkoon X propositionimuuttuja ja olkoot $vasen(X)$ ja $oikea(X)$ kaavoja. Olkoot (1), (2), (3) ja (4) kuten alla. Jos (1) ja (2), niin (3) tai (4).

- (1) $vasen(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{U}$ tai $vasen(\mathbf{F}) \equiv vasen(\mathbf{U}) \equiv vasen(\mathbf{T})$
- (2) $oikea(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{U}$ tai $oikea(\mathbf{F}) \equiv oikea(\mathbf{U}) \equiv oikea(\mathbf{T})$
- (3) $vasen(\mathbf{U}) \wedge oikea(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{U}$
- (4) $vasen(\mathbf{F}) \wedge oikea(\mathbf{F}) \equiv vasen(\mathbf{U}) \wedge oikea(\mathbf{U}) \equiv vasen(\mathbf{T}) \wedge oikea(\mathbf{T})$

Todistus. Todistus jakautuu viiteen tapaukseen.

Ensimmäisessä tapauksessa $vasen(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{F}$. Siksi ei voi olla $vasen(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{U}$, joten (1) tuottaa alla olevan kuvan $\equiv$:t. Tapauksen oletus $vasen(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{F}$ tuottaa sellaisenaan $\equiv$:n.

$$\begin{array}{c} vasen(\mathbf{F}) \equiv vasen(\mathbf{U}) \equiv vasen(\mathbf{T}) \\ \equiv \\ \mathbf{F} \end{array}$$

Niinpä jokaiselle totuusarvolle X pätee $vasen(X) \equiv \mathbf{F}$. Siksi $vasen(X) \wedge oikea(X) \equiv \mathbf{F} \wedge oikea(X) \equiv \mathbf{F}$. Siis $vasen(\mathbf{F}) \wedge oikea(\mathbf{F})$, $vasen(\mathbf{U}) \wedge oikea(\mathbf{U})$ ja $vasen(\mathbf{T}) \wedge oikea(\mathbf{T})$ ovat kaikki yhtätodet kuin $\mathbf{F}$. Siksi ne ovat myös keskenään yhtätodet. Olemme osoittaneet, että (4) pätee.

Toisessa tapauksessa $oikea(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{F}$. Siinä pätee muuten sama päättely kuin ensimmäisessä tapauksessa, mutta $vasen$:n tilalla on $oikea$, vedotaan (2):een eikä (1):een, ja kaavan $\mathbf{F} \wedge oikea(X)$ tilalla on $vasen(X) \wedge \mathbf{F}$.

Kolmannessa tapauksessa $vasen(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{T}$. Päättely muistuttaa alkuun ensimmäistä tapausta, mutta saadaankin $vasen(X) \equiv \mathbf{T}$. Siksi $vasen(X) \wedge oikea(X) \equiv oikea(X)$. Jos $oikea(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{U}$, niin (3) pätee. Muussa tapauksessa oletuksen (2) vuoksi $oikea(\mathbf{F}) \equiv oikea(\mathbf{U}) \equiv oikea(\mathbf{T})$, joten alla olevan kuvan jokainen " $\equiv$ " pätee. Edellä todettu $vasen(X) \wedge oikea(X) \equiv oikea(X)$ tuottaa $\equiv$:t. Siksi (4) pätee.

$$\begin{array}{ccccc} vasen(\mathbf{F}) \wedge oikea(\mathbf{F}) & & vasen(\mathbf{U}) \wedge oikea(\mathbf{U}) & & vasen(\mathbf{T}) \wedge oikea(\mathbf{T}) \\ \equiv & & \equiv & & \equiv \\ oikea(\mathbf{F}) & \equiv & oikea(\mathbf{U}) & \equiv & oikea(\mathbf{T}) \end{array}$$

Tapauksessa $oikea(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{T}$ saadaan samaan tapaan (3) tai (4).

Jäljellä on tapaus $vasen(\mathbf{U}) \equiv oikea(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{U}$. Sille pätee $vasen(\mathbf{U}) \wedge oikea(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{U} \wedge \mathbf{U} \equiv \mathbf{U}$. □

Lause 3.20 Olkoon X propositiomuuttuja ja olkoon $kaava(X)$ kaava, jossa ei esiinny muita symboleita kuin $F, U, T, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ ja propositiomuuttujia. Kussakin tilanteessa joko $kaava(U) \equiv U$ tai $kaava(F) \equiv kaava(U) \equiv kaava(T)$.

Todistus. Tarkastellaan mielivaltaista tilannetta. Olkoon ϕ lauseen 3.20 kaava tai mikä tahansa sen osakaava. Tarkoittakoon "(1) pätee ϕ :lle", että $\phi(U) \equiv U$ tai $\phi(F) \equiv \phi(U) \equiv \phi(T)$. Lause 3.20 todistetaan rakenteellisella induktiolla eli osoittamalla, että (1) pätee atomikaavoille ja osoittamalla että (1) pätee yhdistetyille kaavoille jos se pätee niiden osakaavoille.

Jos $kaava(X)$ on pelkkä X , niin $kaava(U)$ on pelkkä U . Siksi $kaava(U) \equiv U$. Jos $kaava(X)$ on F, U, T tai muu propositiomuuttuja kuin X , niin X ei esiinny siinä. Silloin sekä $kaava(F)$, $kaava(U)$ että $kaava(T)$ ovat sama kaava kuin $kaava(X)$, joten $kaava(F) \equiv kaava(U) \equiv kaava(T) \equiv kaava(X)$. Atomikaavat on käsitelty.

Jos $vasen(U) \equiv U$, niin $\neg vasesen(U) \equiv \neg U \equiv U$. Jos $vasen(F) \equiv vasesen(U) \equiv vasesen(T)$, niin $\neg vasesen(F) \equiv \neg vasesen(U) \equiv \neg vasesen(T)$. Siis jos (1) pätee $vasen(X)$:lle, niin se pätee myös $\neg vasesen(X)$:lle. Nyt " $\neg$ " on käsitelty.

Apulause 3.19 sanoo, että jos (1) pätee kaavoille $vasen(X)$ ja $oikea(X)$, niin se pätee kaavalle $vasen(X) \wedge oikea(X)$. Nyt " $\wedge$ " on käsitelty.

Oletetaan, että (1) pätee kaavoille $vasen(X)$ ja $oikea(X)$. Koska " $\neg$ " on käsitelty, se pätee myös kaavoille $\neg vasesen(X)$ ja $\neg oikea(X)$. Apulauseen 3.19 mukaan se pätee myös kaavalle $\neg vasesen(X) \wedge \neg oikea(X)$. Koska " $\neg$ " on käsitelty, se pätee myös kaavalle $\neg(\neg vasesen(X) \wedge \neg oikea(X))$. Niinpä se pätee myös kaavalle $vasen(X) \vee oikea(X)$, sillä $vasen(X) \vee oikea(X) \equiv \neg(\neg vasesen(X) \wedge \neg oikea(X))$. Nyt " $\vee$ " on käsitelty.

Vielä on käsiteltävä " $\rightarrow$ " ja " $\leftrightarrow$ ". Oletetaan, että (1) pätee kaavoille $vasen(X)$ ja $oikea(X)$. Se pätee myös kaavalle $vasen(X) \rightarrow oikea(X)$, koska " $\neg$ " ja " $\vee$ " on käsitelty ja koska $vasen(X) \rightarrow oikea(X) \equiv \neg vasesen(X) \vee oikea(X)$. Se pätee myös kaavalle $vasen(X) \leftrightarrow oikea(X)$, koska " $\rightarrow$ " ja " $\wedge$ " on käsitelty ja koska $vasen(X) \leftrightarrow oikea(X) \equiv (vasen(X) \rightarrow oikea(X)) \wedge (oikea(X) \rightarrow vasesen(X))$. $\square$

Lauseessa 3.20 lueteltiin kaikki tähän asti esitellyt osakaavoja yhdistävät symbolit $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ siksi, että kolmiarvoisessa logiikassa on mahdollista määrittellä myös symboleita, joille lause 3.20 ei päde. Kenties tärkein sellainen on $*$. Sille pätee $*U \equiv F$ ja $*F \equiv *T \equiv T$.

Esimerkki Täydennämme esimerkin 3.18 tuloksen $P \vee Q \wedge R \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ kattamaan myös tilanteet, joissa $P \equiv U$. Olkoon $vasen(P) \equiv P \vee Q \wedge R$ ja $oikea(P) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$. Esimerkin 3.18 mukaan $vasen(F) \equiv oikea(F) \equiv Q \wedge R$ ja $vasen(T) \equiv oikea(T) \equiv T$.

Jos Q ei ole $\mathbf{T}$ tai R ei ole $\mathbf{T}$ niin $Q \wedge R$ ei ole $\mathbf{T}$, joten $\text{vasen}(\mathbf{F})$ ei ole $\text{vasen}(\mathbf{T})$ ja $\text{oikea}(\mathbf{F})$ ei ole $\text{oikea}(\mathbf{T})$. Siksi lauseen 3.20 mukaan $\text{vasen}(\mathbf{U}) \equiv \text{oikea}(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{U}$.

Muussa tapauksessa $Q \equiv R \equiv \mathbf{T}$. Silloin $\text{vasen}(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{U} \vee \mathbf{T} \wedge \mathbf{T} \equiv \mathbf{U} \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ ja $\text{oikea}(\mathbf{U}) \equiv (\mathbf{U} \vee \mathbf{T}) \wedge (\mathbf{U} \vee \mathbf{T}) \equiv \mathbf{T} \wedge \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$. Siksi $\text{vasen}(\mathbf{U}) \equiv \text{oikea}(\mathbf{U})$. $\square$

??? Tanne pikkulauseen 3.10 todistus.

Luvuista puhuttaessa lausekkeen tunnistaa siita, etta sen muuttujille pitaa antaa arvoiksi lukuja ja lauseke itse tuottaa luvun tai on maarittelematon. Jos puhutaan jostakin muusta, niin lausekkeen muuttujille pitaa antaa arvoiksi sen muun maailman olioita ja lauseke tuottaa sen muun maailman olion tai on maarittelematon. Esimerkiksi Britannian kuninkaallisten tapauksessa muuttujille pitaa antaa arvoiksi Britannian kuninkaallisia ja lauseke tuottaa Britannian kuninkaallisen tai on maarittelematon.

Toisinaan voidaan haluta, etta lauseke ei ole maarittelematon vaikka siina on maarittelematon osa. Saatetaan esimerkiksi haluta kertolasku, joka tuottaa nolla aina kun ensimmäinen kerrottava on nolla, vaikka jalimmainen kerrottava olisi maarittelematon. Ohjelmoinnissa sellaisen voi toteuttaa vaikkapa seuraavaan tyyliin. Ensin lasketaan lausekkeen *vasen* arvo ja sijoitetaan se muuttujaan x . Jos se on 0, niin ei tehda muuta. Jos se on maarittelematon, niin ohjelman suoritus epaonnistuu. Muussa tapauksessa lasketaan myos lausekkeen *oikea* arvo ja kerrotaan x silla.

```
 $x := \text{vasen}$ 
jos  $x \neq 0$  niin  $x := x \cdot \text{oikea}$ 
```

Lahtokohdassa 2.7 ilmaistun periaatteen vuoksi ei taman kirjan kyttamassa logiikassa voida toteuttaa sellaista kertolaskua. Mutta tama rajoitus voidaan usein kiertaa, koska sellainen kertolasku on usein tarkoitettu kaavan osaksi. Atomikaavat, joiden halutaan olevan muotoa $\text{atomikaava}(\text{lauseke}(\text{vasen}$ ”sellainen kertolasku” $\text{oikea}))$, voidaan korvata seuraavanlaisilla kaavoilla:

$$\begin{aligned} &\text{vasen} = 0 \wedge \text{atomikaava}(\text{lauseke}(0)) \\ &\vee \text{vasen} \neq 0 \wedge \text{atomikaava}(\text{lauseke}(\text{vasen} \cdot \text{oikea})) \end{aligned}$$

Jos vasen tuottaa 0, niin $\text{vasen} = 0 \equiv \mathbf{T}$ ja $\text{vasen} \neq 0 \equiv \mathbf{F}$, joten tama kaava tuottaa saman totuusarvon kuin $\text{atomikaava}(\text{lauseke}(0))$. Vastaavasti jos vasen tuottaa muun luvun kuin 0, niin $\text{vasen} = 0 \equiv \mathbf{F}$ ja $\text{vasen} \neq 0 \equiv \mathbf{T}$, joten tama kaava tuottaa saman totuusarvon kuin $\text{atomikaava}(\text{lauseke}(\text{vasen} \cdot \text{oikea}))$. Jos vasen ei tuota lukua eli on maarittelematon, niin lahtokohdan 2.7 mukaan

myös $\text{lauseke}(\text{vasen} \cdot \text{oikea})$ on määrittelemätön, joten lähtökohdan 3.1 mukaan sekä $\text{vasen} = 0$, $\text{vasen} \neq 0$ että $\text{atomikaava}(\text{lauseke}(\text{vasen} \cdot \text{oikea}))$ tuottavat **U**. Niinpä $\text{vasen} \neq 0 \wedge \text{atomikaava}(\text{lauseke}(\text{vasen} \cdot \text{oikea}))$ tuottaa **U**, ja $\text{vasen} = 0 \wedge \text{atomikaava}(\text{lauseke}(0))$ tuottaa **F** tai **U**. Siksi koko kaava tuottaa **U**. Olemme osoittaneet, että tämä kaava tuottaa aina saman totuusarvon kuin minkä $\text{atomikaava}(\text{lauseke}(\text{vasen}$ ”sellainen kertolasku” $\text{oikea}))$ tuottaisi.

3.4 Kvanttorit

$\forall \exists$

3.5 Kvanttorien päättelysääntöjä

Lause 3.21 Jos mikään sekä kaavassa vasen tai oikea tai molemmissa että oletuksissa vapaana esiintyvä muuttuja ei joudu sidotuksi $\text{kaava}(X)$:ssä ja jos $\text{vasen} \equiv \text{oikea}$, niin $\text{kaava}(\text{vasen}) \equiv \text{kaava}(\text{oikea})$.

Lause 3.22 Jos mikään sekä kaavassa vasen tai oikea tai molemmissa että oletuksissa vapaana esiintyvä muuttuja ei joudu sidotuksi $\text{kaava}(X)$:ssä ja jos X ei sijaitse $\text{kaava}(X)$:ssä muiden symbolien alaisuudessa kuin ” $\wedge$ ”, ” $\vee$ ”, ” $\forall$ ” ja ” $\exists$ ” ja jos $\text{vasen} \Leftrightarrow \text{oikea}$, niin $\text{kaava}(\text{vasen}) \Leftrightarrow \text{kaava}(\text{oikea})$.

3.6 Ensimmäisen ja toisen kertaluvun logiikka

4 Kokonaisluvuista

4.1	Kokonaislukujen joukon perusominaisuuksia	96
4.2	Luonnolliset luvut	96
4.3	Kokonaisluvut suhteessa reaalityihin	97
4.4	Kokonaislukujen jakolasku	99

???

4.1 Kokonaislukujen joukon perusominaisuuksia

Merkintä $\mathbb{Z}$ tarkoittaa *kokonaislukujen* (*integer*) joukkoa, eli lukujen $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ muodostamaa kokonaisuutta. Siis $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Merkinnot $\text{lauseke} \in \text{joukko}$ ja $\text{lauseke} \notin \text{joukko}$ tarkoittavat, että *lauseke*:n tuottama arvo kuuluu ja ei kuulu *joukko*:on. Niinpä $x \in \mathbb{Z}$ tarkoittaa, että x on kokonaisluku. Sen, että x ei ole kokonaisluku, voi merkitä $x \notin \mathbb{Z}$. Merkinnot $\text{lauseke} \in \text{joukko}$ ja $\text{lauseke} \notin \text{joukko}$ ovat lausekkeen sisältäviä atomikaavoja (sivu 69).

Kokonaisluvut voidaan määritellä matemaattisen tarkasti monella tavalla. Mikään niistä ei kuitenkaan tuo tämän kirjan kannalta lisäarvoa siihen mielikuvaan, joka kokonaisluvuista syntyy koulussa. Siksi tässä ei esitetä niille määritelmää, vaan ainoastaan luetellaan ilman todistusta ne perusominaisuudet, joita tullaan jatkossa käyttämään.

Lähtökohta 4.1

- (a) Jos n ja m ovat kokonaislukuja, niin myös $n + m$, $n - m$, nm ja $|n|$ ovat kokonaislukuja.
- (b) Jos n on kokonaisluku ja i on nolla tai positiivinen kokonaisluku, niin n^i on kokonaisluku.
- (c) Jos n ja m ovat kokonaislukuja, niin $n < m \equiv n + 1 \leq m$.
- (d) Kaikki kokonaisluvut ovat reaalitylukuja.

Merkintä $\mathbb{Z}^+$ tarkoittaa positiivisten kokonaislukujen joukkoa, eli $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$.

4.2 Luonnolliset luvut

Merkintä $\mathbb{N}$ tarkoittaa *luonnollisten lukujen* (*natural number*) joukkoa, eli $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Luku on luonnollinen luku jos ja vain jos se on kokonaisluku eikä ole negatiivinen. (Jotkut kirjoittajat jättävät nollan pois luonnollisista luvuista. Nollan ottaminen mukaan lienee nykyisin yleisin käytäntö.)

Joukon suurin alkio tarkoittaa sellaista alkioita, että se kuuluu joukkoon eikä mikään joukon alkio ole sitä suurempi.

Pikkulause 4.2 Joukko luonnollisia lukuja on äärellinen jos ja vain jos se on tyhjä tai siinä on suurin alkio.

Todistus. Jos se on tyhjä, niin siinä on nolla alkioita. Jos sen suurin alkio on n , niin siinä on enintään $n + 1$ alkioita, nimittäin $0, 1, \dots, n$. Kummassakin tapauksessa se on äärellinen.

Jos se ei ole tyhjä, niin siinä on jokin alkio n_1 . Jos lisäksi siinä ei ole suurinta alkioita, niin jollekin sen alkiolle n_2 pätee $n_2 > n_1$, jollekin sen alkiolle n_3 pätee $n_3 > n_2$ ja niin edelleen loputtomasti. Niinpä se on ääretön. $\square$

Pikkulause 4.3 Joukko luonnollisia lukuja on epätyhjä jos ja vain jos siinä on pienin alkio.

Todistus. Jos se on tyhjä, niin siinä ei ole alkioita lainkaan, joten siinä ei ole pienintä alkioita.

Jos se on epätyhjä, niin olkoon n_1 jokin sen alkio. Jos lisäksi siinä ei ole pienintä alkioita, niin siinä on sellaiset $n_2, n_3, \dots$, että $n_1 > n_2 > n_3 > \dots$. Koska luonnollisilla luvuilla $m > n \equiv m \geq n + 1$ (lähtökohta 4.1 (c)), pätee $n_1 \geq n_2 + 1 \geq n_3 + 2 \geq \dots$. Siksi jokaiselle $i \in \mathbb{Z}^+$ pätee $n_i \leq n_1 - (i - 1)$. Valitsemalla $i = n_1 + 2$ saadaan $n_i \leq n_1 - (n_1 + 1) = -1$. Se on ristiriidassa sen kanssa, että kukin luonnollinen luku on vähintään 0. $\square$

4.3 Kokonaisluvut suhteessa reaalityihin

Reaalitylukujen (*real number*) joukko $\mathbb{R}$ sisältää kaikki lukusuoran luvut. Se sisältää siis sekä kaikki kokonaisluvut että kaikki peräkkäisten kokonaislukujen välissä olevat luvut. Merkinnät $x \in \mathbb{R}$ ja $x \notin \mathbb{R}$ tarkoittavat, että x on ja ei ole reaalityluku.

Seuraava pikkulause kertoo, että 1 on kokonaisluku; minkä tahansa kahden kokonaisluvun summa, erotus ja tulo ovat kokonaislukuja; ja kahden peräkkäisen kokonaisluvun väliin jäävät luvut eivät ole kokonaislukuja. Sen pohjalta voi osoittaa muun muassa, että myös 0 on kokonaisluku.

Pikkulause 4.4 (Kokonaislukujen ominaisuuksia)

(a) $1 \in \mathbb{Z}$

(b) $x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + y \in \mathbb{Z} \wedge x - y \in \mathbb{Z} \wedge xy \in \mathbb{Z}$

(c) $x \in \mathbb{Z} \wedge x < y < x + 1 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$

82. Osoita, että $0 \in \mathbb{Z}$.

Jos x on mikä tahansa kokonaisluku, niin $x + 1$ on pienin sitä suurempi kokonaisluku ja $x - 1$ on suurin sitä pienempi kokonaisluku. Muussa tapauksessa x voidaan esittää muodossa *kokonaisosa*, *desimaaliosa*, missä *desimaaliosa* $\neq 0$. Tällöin *kokonaisosa* + 1 on pienin x :ää suurempi kokonaisluku ja *kokonaisosa* on suurin x :ää pienempi kokonaisluku. Olemme todistaneet seuraavan lauseen.

Lause 4.5 Jokaiselle reaaliluvulle on olemassa pienin sitä suurempi kokonaisluku ja suurin sitä pienempi kokonaisluku.

Todistus. ??? Reaalilukujen täydellisyysaksiooman avulla

□

Määritelmä 4.6 Reaaliluvun x *lattia* (*floor*) eli $\lfloor x \rfloor$ on suurin kokonaisluku, joka on enintään x . Reaaliluvun x *katto* (*ceiling*) eli $\lceil x \rceil$ on pienin kokonaisluku, joka on vähintään x .

Pikkulause 4.7 Jos $x \in \mathbb{R}$, niin

- (a) $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$
- (b) $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

4.4 Kokonaislukujen jakolasku

Kokonaislukujen jakolaskun, missä jakaja ei ole nolla, pitää toteuttaa niin sanottu jakoyhtälö. Se sisältää kaksi vaatimusta.

Määritelmä 4.8 (Kokonaislukujen jakoyhtälö)

(a) $jaettava = jakaja \cdot osamäärä + jakojäännös$

(b) $0 \leq jakojäännös < |jakaja|$

Jos $jaettava \geq 0$ ja $jakaja > 0$, voidaan kokonaislukujen jakolasku toteuttaa siten, että vähennetään jaettavasta jakaja niin monta kertaa, että jaettavasta jäljelle jäänyt luku on pienempi kuin jakaja. Osamäärä on vähennyskertojen määrä ja jakojäännös on jaettavasta jäljelle jäänyt luku. Tällainen toteutus on hyvin tehoton. Silti se auttaa ymmärtämään kokonaislukujen jakolaskun ominaisuuksia. Lisäksi se havainnollistaa ajattelutapaa, jolla voidaan perustella, että tietokoneohjelma laskee oikean tuloksen.

Alla olevassa ohjelmanpätkässä q sisältää tehtyjen vähennyslaskujen määrän ja r sisältää jaettavasta jäljellä olevan luvun. Kun ohjelmanpätkä on lopettanut, q sisältää osamäärän ja r sisältää jakojäännöksen.

VÄHENNYSJAKO($jaettava, jakaja$)

```
1  $q := 0; r := jaettava$ 
2 kun  $r \geq jakaja$  toista seuraavaa:
3    $r := r - jakaja; q := q + 1$ 
```

Alla oleva taulukko näyttää, miten luvun 30 jakaminen luvulla 7 tällä tavalla tuottaa osamääräksi 4 ja jakojäännökseksi 2. Taulukon viimeinen sarake havainnollistaa sitä, että aina rivin 3 lopussa $jaettava = jakaja \cdot q + r$.

vähennyslasku	kuinka mones	kierroksen jälkeen
$30 - 7 = 23$	1	$7 \cdot 1 + 23 = 30$
$23 - 7 = 16$	2	$7 \cdot 2 + 16 = 30$
$16 - 7 = 9$	3	$7 \cdot 3 + 9 = 30$
$9 - 7 = 2$	4	$7 \cdot 4 + 2 = 30$

Kenties yllättäen, seuraavassa lauseessa kumpikaan ” $\geq$ ” ei ole kirjoitusvirhe.

Pikkulause 4.9 Jos alussa $jaettava \geq 0$ ja $jakaja \geq 0$, niin VÄHENNYSJAKO:n lopetettua jakoyhtälö toteutuu siten, että q on osamäärä ja r on jakojäännös.

Todistus. Osoitamme, että aina rivin 2 alussa $jaettava = jakaja \cdot q + r$. Se on totta rivin 1 lopussa, koska silloin $q = 0$ ja $r = jaettava$. Se säilyy voimassa rivillä 2,

koska minkään muuttujan arvo ei muutu siellä. Se säilyy voimassa rivillä 3, koska silloin q kasvaa yhdellä ja r pienenee jakajan verran, joten $jakaja \cdot q + r$ ei muutu.

Ainoa tapa, jolla VÄHENNYSLASKO lopettaa, on todeta rivillä 2 että $r \geq jakaja$ ei (enää) päde. Sen jälkeen VÄHENNYSLASKO ei muuta muuttujien arvoja. Siksi, ja koska $jaettava = jakaja \cdot q + r$ on voimassa aina rivin 2 alussa, se on voimassa myös VÄHENNYSLASKO:n lopetettua. Niinpä jakoyhtälön 4.8 kohta (a) pätee.

Rivin 2 vuoksi VÄHENNYSLASKO jatkaa rivien 2 ja 3 toistamista niin kauan kun $r \geq jakaja$. Siksi VÄHENNYSLASKO:n lopetettua $r \not\geq jakaja$ eli $r < jakaja$. Koska oletimme $jakaja \geq 0$ pätee $|jakaja| = jakaja$, joten VÄHENNYSLASKO:n lopetettua $r < |jakaja|$. Siksi määritelmän 4.8 (b) loppuosa pätee.

Osoitamme, että VÄHENNYSLASKO:n lopetettua $r \geq 0$. Rivin 1 lopussa $r \geq 0$, koska siellä $r = jaettava$ ja oletimme, että $jaettava \geq 0$. Niinpä, jos riviä 3 ei suoriteta yhtään kertaa, $r \geq 0$ pätee VÄHENNYSLASKO:n lopetettua. Aina rivin 3 alussa $r \geq jakaja$, koska muussa tapauksessa suoritus ei olisi mennyt riviltä 2 riville 3. Siksi aina rivin 3 lopussa $r \geq 0$. Niinpä, jos rivi 3 suoritetaan ainakin kerran, $r \geq 0$ pätee VÄHENNYSLASKO:n lopetettua. Siksi määritelmän 4.8 (b) alkuosa pätee. $\square$

Missään kohdassa edellä olevaa päättelyä ei vedottu siihen, että $jakaja$ ei ole nolla. Olemme siis osoittaneet, että VÄHENNYSLASKO:n tuottama vastaus on oikea myös silloin, kun $jakaja$ on nolla. Mutta eihän nollalla voi jakaa! Määritelmä 4.8 (b) ei voi toteutua, jos $jakaja$ on nolla. Missä päättely meni pieleen?

Ei missään. VÄHENNYSLASKO ei tuota vastausta, jos $jakaja$ on nolla. Siinä tapauksessa jakajan vähentäminen jaettavasta ei muuta mitään. Koska rivin 1 lopussa $r \geq 0 = jakaja$ ja r ja $jakaja$ eivät muutu, ei ehto $r < jakaja$ toteudu koskaan. VÄHENNYSLASKO pyörii ikuisessa silmukassa.

vähennyslasku	kuinka mones	kierroksen jälkeen
$30 - 0 = 30$	1	$0 \cdot 1 + 30 = 30$
$30 - 0 = 30$	2	$0 \cdot 2 + 30 = 30$
$30 - 0 = 30$	3	$0 \cdot 3 + 30 = 30$
$30 - 0 = 30$	4	$0 \cdot 4 + 30 = 30$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Ohjelman osoittamiseksi oikein toimivaksi on osoitettava kaksi asiaa: että se lopettaa joskus ja että kun se on lopettanut, on sen vastaus oikea. Olemme osoittaneet, että VÄHENNYSLASKO toteuttaa jälkimmäisen, mutta emme vielä, että se lopettaa. Jos $jakaja = 0$, niin se ei lopeta. Jos $jakaja > 0$, niin r pienenee jokaisella kierroksella. Siinä tapauksessa viimeistään $jaettava$ kierroksen jälkeen $r \leq 0 < jakaja$. VÄHENNYSLASKO lopettaa viimeistään silloin.

Edellä ”viimeistään $jaettava$ kierroksen jälkeen” oli epätarkempi likiarvo kuin minkä olisimme pystyneet antamaan. VÄHENNYSLASKO lopettaa jo silloin, kun r

painuu alle $jakaja:n$, joten ”viimeistään $\max(0, jaettava - jakaja + 1)$ kierroksen jälkeen” olisi ollut tarkempi. Vielä tarkempi olisi ollut ”viimeistään $\frac{jaettava}{jakaja}$ pyöristettynä alaspäin lähimpään kokonaislukuun kierroksen jälkeen”. Mutta nyt tavoitteena ei ollut antaa mahdollisimman tarkkaa likiarvoa kierrosten määrälle, vaan osoittaa, että VÄHENNYSJAKO ei jää ikuisen silmukkaan. Siihen tarkoitukseen ”viimeistään $jaettava$ kierroksen jälkeen” on riittävän tarkka. Päättely oli helpompi viedä läpi sen kanssa kuin tarkempien likiarvojen kanssa. Siksi kannatti käyttää sitä.

Jos millekään jakolaskumenetelmälle annetaan jakajaksi nolla, täytyy sen kieltäytyä tehtävästä tai epäonnistua jotenkin. VÄHENNYSJAKO epäonnistuu siten, että suoritus ei valmistu koskaan.

83. Mitä VÄHENNYSJAKO tuottaa tulokseksi vai tuottaako se tulosta lainkaan, jos jaettava on negatiivinen mutta jakaja on yhä positiivinen? Miltä osin tulos on oikein ja miltä osin väärin?
84. Miten VÄHENNYSJAKO:a muuttamalla saadaan ohjelma, joka antaa oikean vastauksen myös kun jaettava on negatiivinen? Jakaja on yhä positiivinen.
85. Miten edellisen tehtävän jakolasku saadaan toimimaan oikein myös kun jakaja voi olla negatiivinen?
86. Perustele, että edellisen tehtävän vastaus toteuttaa jakoyhtälön $n = mq + r \wedge 0 \leq r < |m|$, kun jakaja m on negatiivinen.

5 Lisää reaalityyppiluvuista

5.1	Rationaaliluvut	102
5.2	Desimaaliluvut	105
5.3	Potenssi	107
5.4	Logaritmi	107
5.5	Sarjoja	107
5.6	Kunta-aksioomat	107
5.7	Täydellisyysaksiooma	107
5.8	Numeroituvuus ja ylinumeroituvuus	108

5.1 Rationaaliluvut

Kuten hyvin tiedetään, mikä tahansa luonnollinen luku voidaan esittää numerojonona, eli laittamalla yksi tai useampi numero (sivu 105) peräkkäin. Esimerkiksi ”24” on mutta ”16 + 8” ei ole luvun 24 esitys numerojonona. Ellei erikseen sanota toisin, numerojonossa saa olla vain äärellinen määrä numeroita. Esimerkiksi 14159... (luvun π desimaaliosa) ei ole numerojono vaan ääretön numerojono.

Määritelmä 5.1 *Murtoluku (fractional number)* tarkoittaa luvun esitystä, jossa aluksi on tai ei ole miinusmerkki ja sitten on $\frac{\text{jaettava}}{\text{jakaja}}$ tai *jaettava/jakaja*, missä *jaettava* ja *jakaja* ovat numerojonoina esitettyjä luonnollisia lukuja ja *jakaja* ei ole nolla. Murtoluvun jaettavaa ja jakajaa kutsutaan myös nimillä *osoittaja (numerator)* ja *nimittäjä (denominator)*.

Sekaluku (mixed number) tarkoittaa luvun esitystä, jossa aluksi on tai ei ole miinusmerkki, sitten on numerojonona esitetty luonnollinen luku ja lopuksi on murtoluku, jossa ei ole miinusmerkkiä.

Olkoot k , n ja m numerojonoja. Sekaluku $k\frac{n}{m}$ tarkoittaa samaa lukua kuin lauseke $k + \frac{n}{m}$. Sekaluvun edessä oleva miinusmerkki vaikuttaa sekä keskiosaan että murtolukuosaan. Siis sekaluku $-k\frac{n}{m}$ tarkoittaa samaa lukua kuin lauseke $-(k + \frac{n}{m})$. Koska $k + \frac{n}{m} = \frac{mk+n}{m}$, voidaan jokainen sekaluku esittää murtolukuna.

Murtoluvun ja sekaluvun käsitteet vaihtelevat kirjallisuudessa hiukan. Edessä oleva miinusmerkki voidaan katsoa kuuluvaksi murtolukuun, tai se voidaan ajatella laskutoimitukseksi, joka ottaa murtoluvun ja tuottaa sen vastaluvun. Sama pätee tietysti sekaluvuille. Sekaluvun keskiosan voidaan kieltää tai sallia olevan nolla. Sekaluvun lopussa olevan murtoluvun voidaan vaatia tai jättää vaatimatta olevan nollaa suurempi ja ykköstä pienempi. Määritelmän 5.1 yksityiskohtien valinnassa on pyritty välttämään murto- ja sekalukujen käsitteiden tarpeetonta kaventamista. Mahdollisen miinusmerkin vaaditaan selvyuden vuoksi kuitenkin olevan aina edessä.

Murtoluvut ja sekaluvut eivät siis ole lukujoukkoja, vaan lukujen esitystapoja. Esimerkiksi 7 ei ole murtoluku, mutta $\frac{7}{1}$ on. Luvut, jotka voidaan esittää murtolukuina (ja sekalukuina) tunnetaan nimellä ”rationaaliluvut”.

Määritelmä 5.2 Reaaliluku on *rationaaliluku* (*rational number*), jos ja vain jos se voidaan esittää kahden kokonaisluvun jakolaskuna, jossa jakaja on positiivinen. Rationaalilukujen joukkoa merkitään $\mathbb{Q}$.

Seuraavia rationaalilukujen ominaisuuksia tarvitaan useasti.

Pikkulause 5.3

- (a) Kaikki kokonaisluvut ovat rationaalilukuja.
- (b) Kaikki rationaaliluvut ovat reaalilukuja.
- (c) Jos p ja q ovat rationaalilukuja, niin myös $p + q$, $p - q$, pq ja $|p|$ ovat rationaalilukuja.
- (d) Jos p ja q ovat rationaalilukuja ja $q \neq 0$, niin myös $\frac{p}{q}$ on rationaaliluku.
- (e) Jos p on rationaaliluku ja i on luonnollinen luku, niin p^i on rationaaliluku.
- (f) Jos p on rationaaliluku, $p \neq 0$ ja i on kokonaisluku, niin p^i on rationaaliluku.

Todistus. (a) Kukin kokonaisluku k voidaan esittää muodossa $\frac{k}{1}$.

(b) Kokonaisluvut ovat reaalilukuja. Rationaaliluvut saadaan kokonaisluvuista laskutoimituksilla, jotka tuottavat reaaliluvuista reaalilukuja (jakolasku, jossa jakaja ei ole nolla, sekä vastaluvun otto).

(c) Jos p ja q ovat rationaalilukuja, niin on olemassa sellaiset kokonaisluvut n, m, k ja h , että $m > 0$, $h > 0$, $p = \frac{n}{m}$ ja $q = \frac{k}{h}$. Tällöin kaikki alla olevat jaettavat ja jakajat ovat kokonaislukuja (lähtökohta 4.1 (a)), ja $mh > 0$.

- $p + q = \frac{n}{m} + \frac{k}{h} = \frac{nh}{mh} + \frac{km}{hm} = \frac{nh+km}{mh}$
- $p - q = \frac{n}{m} - \frac{k}{h} = \frac{nh}{mh} - \frac{km}{hm} = \frac{nh-km}{mh}$
- $pq = \frac{n}{m} \frac{k}{h} = \frac{nk}{mh}$
- $|p| = \frac{n}{m} \vee |p| = \frac{-n}{m}$

(d) Jos lisäksi $q \neq 0$, niin $k \neq 0$. Siksi $mk > 0 \vee -mk > 0$ ja $\frac{p}{q} = \frac{\frac{n}{m}}{\frac{k}{h}} = \frac{nh}{mk} = \frac{-nh}{-mk}$.

(e) Jos lisäksi i on luonnollinen luku, niin $n^i \in \mathbb{Z}$, $m^i \in \mathbb{Z}^+$ ja $p^i = (\frac{n}{m})^i = \frac{n^i}{m^i}$.

(f) Jos i ei ole negatiivinen, niin väite seuraa suoraan kohdasta (e). Muussa tapauksessa väite seuraa kohdasta (e) siksi, että $n \neq 0$ koska $p \neq 0$, joten $(\frac{n}{m})^i = \frac{1}{(\frac{n}{m})^{-i}} = \frac{1}{(\frac{n^{-i}}{m^{-i}})} = \frac{m^{-i}}{n^{-i}}$. $\square$

Murtoluku ja rationaaliluku eroavat toisistaan siis siten, että rationaaliluku on luku mutta murtoluku on luvun esitystapa. Murtolukuina voidaan esittää täsmälleen ne luvut, jotka saadaan kahden luonnollisen luvun jakolaskuina joissa jakaja ei ole nolla, sekä niiden vastaluvut. Rationaalilukuja ovat täsmälleen ne luvut, jotka saadaan kahden kokonaisluvun jakolaskuina, joissa jakaja on positiivinen. Nämä luonnehdinnat eivät ole täysin samat. Siksi tarvitaan vielä pikkuisen työtä sen osoittamiseksi, että murtoluvut ja rationaaliluvut vastaavat yksi-yhteen toisiaan.

87. Osoita, että jokainen murtoluku esittää rationaalilukua.

88. Osoita, että jokainen rationaaliluku voidaan esittää murtolukuna.

5.2 Desimaaliluvut

Kuten hyvin tiedetään, kymmenjärjestelmän *numerot* (*digit*) ovat ”0”, ”1”, ”2”, ..., ”9”. Tässä kirjassa *desimaaliluku* (*decimal numeral*) tarkoittaa reaaliluvun esitystä muodossa *kokonaisosa* tai *kokonaisosa, desimaaliosa* tai *−kokonaisosa* tai *−kokonaisosa, desimaaliosa*, missä *kokonaisosa* on epätyhjä äärellinen jono numeroita, *desimaaliosa* on epätyhjä äärellinen tai oikealle ääretön jono numeroita ja ”−” on miinusmerkki.

Kokonaisosan ja desimaaliosan välissä käytetään suomen kielessä pilkkua, mutta englannin kielessä pistettä. Myös monissa laskimissa ja tietokoneohjelmissa käytetään pistettä. Suomenkielisen opiskelijan on syytä tulla toimeen molempien käytäntöjen kanssa. Jotkut kirjoittajat tai ohjelmointikielet sallivat kokonaisosan tai desimaaliosan olla tyhjä, mutta tässä kirjassa ei sallita, koska se vaikeuttaa sen näkemistä, onko piste tai pilkku desimaaliluvun osa vai muu välimerkki.

Jos desimaaliosa on ääretön, sitä ei voi kirjoittaa kokonaan. Siitä kirjoitetaan vain alkuosa ja sen perään ”...”. Kirjoittamatta jätetyt numerot tiedetään asiayhteydestä tai jäävät tuntemattomiksi. Esimerkiksi $\frac{1}{6} = 0,1666\dots$, missä ”...”:n tilalla on loputtomasti kuutosia. Ympyrän kehän ja halkaisijan pituuksien suhdetta ilmaiseva luku π (luetaan ”pii”) ilmaistaan usein desimaalilukuna 3,14159...

Kokonaisosa esittää luonnollista lukua. Desimaaliosa esittää reaalilukua, joka on vähintään 0 ja enintään 1. Koko desimaaliluku esittää niiden summaa (jos edessä ei ole miinusmerkkiä) tai sen vastalukua (jos edessä on miinusmerkki). Desimaaliosan esittämä reaaliluku saadaan laskemalla yhteen luvut $d_i \cdot 10^{-i}$, missä desimaaliosan numerot desimaalipilkusta alkaen ovat $d_1, d_2, d_3, \dots$ niin pitkälle kuin niitä riittää. Esimerkiksi $3,14159 = 3 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-5}$.

Desimaaliluku on *päättävä* tai *päättymätön* sen mukaan, onko desimaaliosa äärellinen vai ääretön. Päättävä desimaaliluku voidaan muuttaa yhtäsuureksi päättymättömäksi desimaaliluvuksi lisäämällä sen perään loputtomasti nollia. Päättäviä desimaalilukuja käytetään usein esittämään likiarvoja. Tällöin desimaalipilkun perään kirjoitetaan tyypillisesti vain sen verran numeroita, että viimeistä vastaava 10^{-i} on samaa suuruusluokkaa tai hieman pienempi kuin likiarvon epätarkkuus.

Se, että päättymätön desimaaliluku esittää jotakin lukua, on syvällinen asia. Siihen paneudutaan alaluvussa 5.5. Perusidea on kuitenkin helppo ymmärtää. Tarkastelkaamme mitä tahansa päättymätöntä desimaalilukua, jossa ei ole miinusmerkkiä. Jos se katkaistaan mistä tahansa kohdasta desimaalipilkun oikealta puolelta, niin saadaan päättävä desimaaliluku. (Jos se katkaistaan heti desimaalipilkun jälkeen, pitää desimaalipilkku poistaa.) Jos katkaisukohtaa siirretään oikealle, niin katkaisun tuottama päättävä desimaaliluku säilyy ennallaan tai kasvaa. Esimerkiksi $3 \leq 3,1 \leq 3,14 \leq 3,141 \leq 3,1415 \leq 3,14159 \leq \dots$

Toisaalta jokainen näin saatavista päättävistä desimaaliluvuista on pienempi

kuin mikään desimaaliluku, joka saadaan ottamalla mikä tahansa niistä ja kasvatamalla sen viimeistä numeroa yhdellä. Jos kasvatettava numero on 9, niin sen tilalle laitetaan 0 ja kasvatetaan myös edellistä numeroa. Esimerkiksi seuraavassa jokainen ylärivin luku on kaikkia alarivin lukuja suurempi.

$$\begin{aligned} 4 &\geq 3,2 \geq 3,15 \geq 3,142 \geq 3,1416 \geq 3,14160 \geq \dots \\ 3 &\leq 3,1 \leq 3,14 \leq 3,141 \leq 3,1415 \leq 3,14159 \leq \dots \end{aligned}$$

Mitä enemmän desimaalipilkun jälkeisiä numeroita otetaan mukaan, sitä lähempänä ylärivin ja alarivin luku ovat toisiaan. Niiden erotusta ei saada tasan nollassa, mutta se saadaan muutoin niin lähelle nollaa kuin halutaan. Siksi on olemassa enintään yksi reaalityluku, joka jää alarivin ja ylärivin väliin eli on vähintään yhtäsuuri kuin jokainen alarivin luku ja enintään yhtäsuuri kuin mikään ylärivin luku. Joissakin tapauksissa voidaan todistaa, että jokin nimenomainen luku on sellainen. Esimerkiksi seuraavassa tapauksessa $\frac{1}{6}$ (ja vain se) jää alarivin ja ylärivin väliin:

$$\begin{aligned} 1 &\geq 0,2 \geq 0,17 \geq 0,167 \geq 0,1667 \geq 0,16667 \geq \dots \\ 0 &\leq 0,1 \leq 0,16 \leq 0,166 \leq 0,1666 \leq 0,16666 \leq \dots \end{aligned}$$

Jos alarivin luvuiksi valitaan mahdollisimman suuret sellaiset luvut, että kunkin niistä neliö on enintään 2, niin saadaan seuraavat luvut. Tässä tapauksessa alarivin ja ylärivin väliin jäävä luku on $\sqrt{2}$. Kuten sivulla ??? todettiin, sen olemassaolo ei seuraa kunta-aksioomista, vaan joudutaan oletamaan erikseen.

$$\begin{aligned} 1 &\geq 1,5 \geq 1,42 \geq 1,415 \geq 1,4143 \geq 1,41422 \geq \dots \\ 1 &\leq 1,4 \leq 1,41 \leq 1,414 \leq 1,4142 \leq 1,41421 \leq \dots \end{aligned}$$

Samaan tapaan kuin $\sqrt{2}$:n olemassaolo vaikuttaa järkevältä, vaikuttaa myös monen muun päättymättömän desimaaliluvun olemassaolo syystä tai toisesta järkevältä. On päädytty tekemään oletus, joka välillisesti aiheuttaa sen, että jokainen päättymätön desimaaliluku on olemassa. Se on käytännöllinen oletus, eikä sen ole havaittu aiheuttavan ristiriitoja.

Kaksi eri päättymätöntä desimaalilukua voi esittää samaa lukua. Se on mahdollista vain siten, että toisen lopussa on loputtomasti yhdeksikköjä, ja toinen päättyy tai sen lopussa on loputtamasti nollia. Yksinkertaisin esimerkki tästä on $0,999\dots = 1,000\dots$. Desimaaliluku $0,999\dots$ esittää reaalitylukuja $9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + \dots$

???

Tarkastellaan seuraavaksi desimaalilukua $k, d_1 d_2 \dots d_n \ell$, missä k on luonnollinen luku, $d_1 d_2 \dots d_n$ on n :stä numerosta muodostuva jono, ja ℓ on numeroista muodostuva mahdollisesti tyhjä tai ääretön jono. Sen lukuarvolle pätee $k, d_1 d_2 \dots d_n \leq$

$k, d_1 d_2 \cdots d_n \ell \leq k, d_1 d_2 \cdots d_n + 10^{-n}$. Nimittäin jos ℓ on tyhjä tai sisältää pelkästään nollia, on sen lukuarvo $k, d_1 d_2 \cdots d_n$. Jos ℓ on päättymätön jono yhdeksikköjä, on sen lukuarvo $k, d_1 d_2 \cdots d_n + 10^{-n}$. Muussa tapauksessa sen lukuarvo jää näiden kahden vaihtoehdon väliin.

Kullekin reaalityyliluvulle voidaan antaa miten tarkka likiarvo tahansa päättyvänä desimaalilukuna. ???

5.3 Potenssi

5.4 Logaritmi

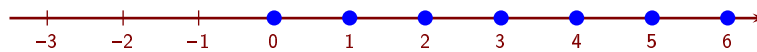
5.5 Sarjoja

5.6 Kunta-aksiomat

5.7 Täydellisyysaksioma

5.8 Numeroituvuus ja ylinumeroituvuus

Äkkipäätä voi näyttää siltä, että rationaalilukuja on valtavasti enemmän kuin luonnollisia lukuja. Jokainen kokonaisluku on rationaaliluku. Jos p ja q ovat rationaalilukuja ja $p < q$, niin $\frac{p+q}{2}, \frac{p+2q}{3}, \frac{p+3q}{4}, \dots$ ovat rationaalilukuja (pikkulause 5.3) ja $p < \frac{p+q}{2} < \frac{p+2q}{3} < \frac{p+3q}{4} < \dots < q$ (esimerkki 2.36). Siis minkä tahansa kahden eri rationaaliluvun välissä on äärettömästi rationaalilukuja. Niinpä rationaalilukuja on tiheässä joka puolella lukusuoraa. Mutta luonnollisia lukuja on lukusuoralla vain yksi kerrallaan ja vain nolasta alkaen.



Tästä huolimatta rationaaliluvut voidaan asettaa jonoon ensimmäinen, toinen, kolmas, ... siten, että kukin rationaaliluku on mukana ainakin kerran. Jono voidaan aloittaa luvulla 0. Seuraavaksi voidaan laittaa kaikki rationaaliluvut muotoa $\frac{n}{m}$ ja $-\frac{n}{m}$, missä n ja m ovat positiivisia kokonaislukuja ja $n+m=2$. Sitten voidaan laittaa ne, joilla $n+m=3$, ja niin edelleen.

0	$\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$-\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{2}$	$-\frac{2}{2}$	$\frac{3}{1}$	$-\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}$	...
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	...
	$n+m=2$		$n+m=3$			$n+m=4$								...

Jokainen rationaaliluku paitsi 0 on tässä jonossa äärettömän monta kertaa. Esimerkiksi $\frac{1}{3}$ toistuu muodoissa $\frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}$ ja niin edelleen.

Joukon *numerointi* (*enumeration*) tarkoittaa joukon alkioden laittamista äärelliseen tai oikealle äärettömään jonoon, eli sellaiseen jonoon, että positiiviset kokonaisluvut riittävät jonon alkioden indeksoimiseen. Minkä tahansa äärellisen joukon numerointi on helppoa. Riittää, että sen alkiot laitetaan peräkkäin missä tahansa järjestyksessä. Alla on numeroitu viikonpäivät.

ma	ti	ke	to	pe	la	su
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.

Äärettömän joukon numerointi saattaa vaatia sopivan järjestyksen keksimistä. Esimerkiksi merkeistä a, b ja c muodostettavien äärellisten merkkijonojen laittaminen jonoon aakkosjärjestyksen mukaisesti ei tuota numerointia, koska kaikki luonnolliset luvut tulee käytettyä jo äärettömän kauan ennen merkkijonoa b . Kuten tavallista matematiikassa, ϵ tarkoittaa tyhjää merkkijonoa eli sitä merkkijonoa, jossa on nolla merkkiä.

ϵ	a	aa	aaa	...	ab	aba	$abaa$	...	ac	aca	...	b	...
1.	2.	3.	4.	...									

Mutta niiden numerointi onnistuu järjestämällä ne ensisijaisesti pituuden mukaan ja toissijaisesti aakkosjärjestykseen:

ε	a	b	c	aa	ab	ac	ba	bb	bc	ca	cb	cc	aaa	aab	...
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	...

Edellä numeroitiin merkkijonot joiden muodostamisessa saa käyttää kolmea eri merkkiä, mutta sama onnistuu mille tahansa äärelliselle merkkien määrälle. Olkoon eri merkkejä k kappaletta. Jonon alussa on tyhjä merkkijono. Sitten on k kappaletta yhdestä merkistä muodostuvia merkkijonoja. Seuraavaksi on k^2 kappaletta merkkijonoja, joiden pituus on 2. Niiden jälkeen on k^3 kolmen pituista merkkijonoa, k^4 neljän pituista ja niin edelleen.

Joukko on *numeroituva* (*countable*) jos ja vain jos se voidaan numeroida. Jos joukko on numeroituva, niin myös kukin sen osajoukko voidaan numeroida jättämällä joukon numeroinnista pois ne alkiot, jotka eivät kuulu osajoukkoon. Olemme osoittaneet seuraavan lauseen.

Lause 5.4 Olkoon Σ mikä tahansa äärellinen joukko merkkejä. Siitä muodostettavien äärellisten merkkijonojen joukko Σ^* on numeroituva. Myös kukin Σ^* :n osajoukko on numeroituva.

Edellä löysimme rationaaliluvuille järjestyksen, jossa ne voitiin numeroida. Niinpä rationaalilukujen joukko on numeroituva. Rationaalilukujen joukon numeroituvuus voidaan johtaa myös lauseesta 5.4. Siihen riittää toteutus, että kukin rationaaliluku voidaan esittää merkeistä "0", "1", "2", ..., "9", "/" ja "- " muodostuvana äärellisenä jonona. Esimerkiksi $-\frac{3}{10}$ voidaan esittää jonona $-3/10$.

Tietotekniikassa laajalti käytetty merkkien ja merkkijonojen esitystapa nimeltä UTF-8 pystyy esittämään käytännöllisesti katsoen mitä tahansa tekstiä 8-bittisistä tavuista muodostettuina äärellisinä jonoina. Muun muassa lausekkeet ja kaavat voidaan esittää sillä. Erilaisia 8-bittisiä tavuja on 256 kappaletta. Siksi lausetta 5.4 voidaan soveltaa myös lausekkeisiin ja kaavoihin. Niinpä sekä lausekkeiden joukko että kaavojen joukko on numeroituva.

Tässä vaiheessa saattaa näyttää siltä, että jokainen joukko on numeroituva. Näin ei kuitenkaan ole, sillä reaalilukujen joukko ei ole numeroituva. Joukko on *ylinumeroituva* (*uncountable*) jos ja vain jos se ei ole numeroituva. Osoitamme seuraavaksi, että reaalilukujen joukko on ylinumeroituva.

Lause 5.5 Reaalilukujen joukko on ylinumeroituva.

Todistus. Väite voidaan todistaa menetelmällä nimeltä *Cantorin diagonaalargumentti* (*Cantor's diagonal argument*), jonka Georg Cantor julkaisi vuonna 1891.

3,141592...
 0,333333...
 2,718281...
 1,414213...
 0,000000...
 0,142857...

 0,300030...

Kuva 13: Cantorin diagonaaliargumentti

Siinä osoitetaan, että mikään positiivisilla kokonaisluvuilla indeksoitu reaalilukujono ei sisällä kaikkia reaalilukuja. Todistuksessa käytetään reaalilukujen desimaaliesityksiä. Päätyvät desimaaliesitykset jatketaan päättymättömiksi lisäämällä perään loputtomasti nollia.

Eräs jonosta puuttuva reaaliluku voidaan muodostaa seuraavasti. Kirjoitetaan aluksi "0,". Otetaan jonon ensimmäisen luvun ensimmäinen desimaalipilkun jälkeinen numero. Jos se on 0 tai 1, niin kirjoitetaan muodostettavan luvun desimaaliesityksen jatkeeksi 3. Muussa tapauksessa kirjoitetaan muodostettavan luvun desimaaliesityksen jatkeeksi 0. Sen jälkeen tehdään sama jonon toisen luvun toiselle desimaalipilkun jälkeiselle numerolle, kolmannen luvun kolmannelle desimaalipilkun jälkeiselle numerolle ja niin edelleen. Tätä on havainnollistettu kuvassa 13.

Näin muodostettu luku poikkeaa jonon ensimmäisestä luvusta ainakin 10^{-1} verran, jonon toisesta luvusta ainakin 10^{-2} verran ja niin edelleen (sivu 106). Siksi se ei ole mukana jonossa. $\square$

89. Miten saadaan muodostettu luku poikkeamaan jonon ensimmäisestä luvusta täsmälleen 10^{-1} verran?

Mitä tapahtuisi, jos lauseen 5.5 todistuksessa muodostettu luku lisättäisiin jonoon? Jos se lisättäisiin jonon jatkeeksi, sen edessä olisi äärettömästi lukuja, joten jono ei enää olisi positiivisilla kokonaisluvuilla indeksoitava. Siksi se täytyy lisätä alkuun tai johonkin väliin.

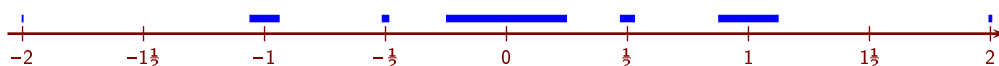
Lisäyskohtaa vastaava numero otettaisiin lisäystä luvusta eikä siinä kohdassa aikaisemmin olleesta luvusta. Siksi lisäyksen jälkeen jonosta muodostettava luku olisi erisuuri kuin lisätty luku. Itse asiassa se olisi erisuuri kuin jokainen täydennetyt jonon luku, koska alkuperäinen päättely pätesi myös täydennetylle jonolle.

Toistamalla lisäys uudelleen ja uudelleen muodostettaisiin loputtomasti lukuja, jotka puuttuivat alkuperäisestä jonosta.

Cantorin aikana osa matemaatikoista asettui vastustamaan ylinumeroituvuutta jyrkästi. Nykyisin matemaatikot ovat jokseenkin yksimielisiä siitä, että Cantor oli oikeassa ja ylinumeroituvuus on tärkeä havainto. Silti nykyisinkin joidenkin ihmis-

ten on vaikea hyväksyä lauseen 5.5 todistusta. Siksi voi olla hyvä tuoda esiin, että on muitakin keinoja huomata, että reaalilukuja on paljon enemmän kuin rationaalilukuja.

Ehkä helpoimmin ymmärrettävä on ajatuskulku, jossa aloitetaan tikulla, jonka pituus on 1. Se katkaistaan täsmälleen keskeltä. Toinen puolikas asetetaan lukusuoralle siten, että sen keskikohta on nollan kohdalla. Toinen puolikas katkaistaan uudelleen niin että saadaan kaksi neljäsosan pituista tikkua. Toinen niistä asetetaan ykkösen kohdalle ja toinen katkaistaan jälleen kerran. Näin saadaan kahdeksasosan pituinen tikku joka asetetaan $-1:n$ kohdalle, kuudestoistaosan pituinen tikku joka asetetaan $\frac{1}{2}:n$ kohdalle ja niin edelleen. Alla on näytetty tulos, kun viimeisimmän paikalleen laitetun tikunpätjän pituus on $\frac{1}{128}$.



Jatkamalla tätä loputtomiin saadaan peitettyä jonon $0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \dots$ jokainen luku eli jokainen rationaaliluku. Tikunpätkien yhteispituus on 1. Niiden yhteensä peittämä pituus on vähemmän kuin 1, koska tikunpätkät menevät osittain toistensa päälle. Silti niillä saadaan peitettyä jokainen rationaaliluku, vaikka rationaalilukuja on joka puolella äärettömän pitkää lukusuoraa!

Vielä hurjempaa on luvassa! Nimittäin sama päättely toimii, vaikka aloitettaisiin lyhyemmällä tikulla. Riittää, että tikun pituus on positiivinen luku. Se saa olla miten pieni positiivinen luku tahansa. Siis kaikki rationaaliluvut voidaan peittää tikulla, jonka pituus on vaikkapa 0,001 tai 0,000001! Tämä voidaan ilmaista sanomalla, että rationaalilukujen joukko on *nollamittainen* (*null set*). Rationaalilukujen joukon nollamittaisuus osoittaa, että rationaaliluvut muodostavat mitättömän pienen vähemmistön lukusuoran luvuista.

Seuraava lause antaa kaksi muuta hyödyllistä ylinumeroituvaa joukkoa.

Lause 5.6 Seuraavat joukot ovat ylinumeroituvia:

- (a) luonnollisten lukujen osajoukkojen joukko, ja
- (b) positiivisilla kokonaisluvuilla indeksoitujen äärettömien bittijonojen joukko.

Todistus. (a) Todistuksessa tarkastellaan mielivaltaista positiivisilla kokonaisluvuilla indeksoitua jonoa $N_1, N_2, N_3, \dots$ luonnollisten lukujen osajoukkoja, ja osoitetaan, että siitä puuttuu ainakin yksi osajoukko.

Luonnolliset luvut voidaan tämän jonon perusteella jakaa ”omakohtaisiin” ja ”ei-omakohtaisiin” siten, että i on omakohtainen, jos ja vain jos $i > 0$ ja $i \in N_i$. Esimerkiksi jos $N_1 = \{0, 1, 2\}$, $N_2 = \{0, 1\}$, N_3 on parilliset luonnolliset luvut ja

N_4 on kaikki luonnolliset luvut, niin 1 ja 4 ovat omakohtaisia (koska 1 kuuluu joukkoon $\{0, 1, 2\}$ ja 4 kuuluu kaikkien luonnollisten lukujen joukkoon), mutta 2 ja 3 eivät ole (koska 2 ei kuulu joukkoon $\{0, 1\}$ ja 3 ei ole parillinen).

Seuraavaksi osoitetaan, että ei-omakohtaisten luonnollisten lukujen joukko ei ole mukana jonossa. Jos se olisi mukana, niin se olisi jossakin kohdassa k eli olisi N_k . Ei voi olla $k \in N_k$, koska muutoin omakohtaisuuden määritelmän mukaan k olisi omakohtainen, joten N_k :n määritelmän mukaan pitäisi olla $k \notin N_k$. Mutta ei voi olla myöskään $k \notin N_k$, koska muutoin omakohtaisuuden määritelmän mukaan k ei olisi omakohtainen, joten N_k :n määritelmän mukaan pitäisi olla $k \in N_k$.

(b) Tämä väite seuraa edellisestä sitä kautta, että luonnollisten lukujen joukon osajoukot ja positiivisilla kokonaisluvuilla indeksoidut äärettömät bittijonot vastaavat yksi-yhteen toisiaan siten, että luku i kuuluu osajoukkoon jos ja vain jos jonon $(i+1)$:s bitti on 1. Esimerkiksi joukkoa $\{1, 3, 4\}$ vastaa bittijono 01011000... (loppuosa sisältää vain nollia) ja parillisten luonnollisten lukujen joukkoa vastaa bittijono 101010... (10 toistuu loputtomasti). $\square$

Nyt on aika täyttää sivulla 21 annettu lupaus osoittaa, että aina kun lähtöjoukko on ääretön, on olemassa funktio, joka saa korkeintaan kahta eri arvoa ja jota ei esitä mikään lauseke. Lauseen 5.4 jälkeen totesimme, että lausekkeita on vain numeroituvasti ääretön määrä. Osoitamme, että mainitunlaisia funktioita on enemmän. Olkoot $\bar{1}$ ja $\bar{2}$ kaksi eri alkioita. Ne saa valita lähtöjoukosta tai muualta.

Jos lähtöjoukko on numeroituvasti ääretön, niin sen alkioille voidaan antaa nimet $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \dots$. Funktiot tältä joukolta joukolle $\{\bar{1}, \bar{2}\}$ ovat olennaisesti sama asia kuin positiivisilla kokonaisluvuilla indeksoidut äärettömät bittijonot. Lauseen 5.6 (b) mukaan niitä on ylinumeroituva määrä.

Jos lähtöjoukko on ylinumeroituva, niin jo pelkästään funktioita, jotka tuottavat $\bar{1}$ yhdellä lähtöjoukon alkioilla ja $\bar{2}$ muilla lähtöjoukon alkioilla on ylinumeroituva määrä.

Vaikka luonnollisten lukujen joukolla on ylinumeroituva määrä osajoukkoja, sillä on vain numeroituva määrä äärellisiä osajoukkoja.

90. Todista, että luonnollisten lukujen joukolla on vain numeroituva määrä äärellisiä osajoukkoja.

Kysymysten vastauksia

1. Juoksija saapuu maaliin silloin kun $160 + 3t = 1\,000$. Vähentämällä molemmilta puolilta 160 saadaan $3t = 1\,000 - 160 = 840$. Jakamalla molemmat puolet 3:lla saadaan $t = \frac{840}{3} = 280$.
Lopputuloksen testaaminen. $160 + 3 \cdot 280 = 160 + 840 = 1\,000$. Täsmää!
2. Juoksija lähti liikkeelle silloin kun $160 + 3t = 0$. Vähentämällä molemmilta puolilta 160 saadaan $3t = -160$. Jakamalla molemmat puolet 3:lla saadaan $t = -\frac{160}{3} = -53\frac{1}{3}$.
Lopputuloksen testaaminen. $-53\frac{1}{3} = -(53 + \frac{1}{3})$, joten $3 \cdot (-53\frac{1}{3}) = -3 \cdot 53\frac{1}{3} = -3 \cdot (53 + \frac{1}{3}) = -159 - 1 = -160$, joten $160 + 3 \cdot (-53\frac{1}{3}) = 160 - 160 = 0$. Täsmää!
3. Esimerkin 2.1 mukaan pyöräilijä saa juoksijan kiinni kun $t = 80$ ja tehtävän 1 vastauksen mukaan juoksija saapuu maaliin kun $t = 280$. Koska $280 > 80$, ohittaa pyöräilijä juoksijan matkalla. Siis pyöräilijä ehtii ensin maalin.
4. Kysymys tarkoittaa, että pitää löytää se t :n arvo ja se m :n arvo, joille pätee sekä $160 + 3t + m = 1\,000$ että $5t = 1\,000$. Jakamalla jälkimmäisen yhtälön molemmat puolet 5:llä saadaan $t = 200$. Sijoittamalla se ensimmäiseen yhtälöön saadaan $160 + 3 \cdot 200 + m = 1\,000$. Koska $160 + 3 \cdot 200 = 160 + 600 = 760$, saadaan $760 + m = 1\,000$. Vähentämällä molemmilta puolilta 760 saadaan $m = 240$. Vastaus on siis $t = 200 \wedge m = 240$.
Lopputuloksen testaaminen. $160 + 3 \cdot 200 + 240 = 1\,000$ ja $5 \cdot 200 = 1\,000$. Täsmää!
5. 0 metriä. Edeltä käy ilmi, että pyöräilijä ehtii maaliin ensin ja tehtävässä sanottiin, että ensin maaliin ehtinyt jää sinne odottamaan jälkimmäistä.
6. Jos $t < 0$, niin pitää olla $0 = 160 + 3t + 100$. Vähentämällä molemmilta puolilta 100 ja vaihtamalla puolet keskenään saadaan $160 + 3t = -100$. Se rikkoo koko mallin pätevyysehto $0 \leq 160 + 3t \leq 1\,000$ vastaan, joten tämä tapaus ei voi tuottaa juurta.
Jos $0 \leq 5t \leq 1\,000$, niin pitää olla $5t = 160 + 3t + 100$. Siitä saadaan $2t = 260$ ja edelleen $t = 130$. Koska $160 + 3 \cdot 130 = 550$, se toteuttaa $0 \leq 160 + 3t \leq 1\,000$. Koska $5 \cdot 130 = 650$, se toteuttaa myös $0 \leq 5t \leq 1\,000$. Niinpä se hyväksytään. Äsken saamamme 550 on juoksijan ja 650 pyöräilijän sijainti juuren ilmaisemalla hetkellä, joten pyöräilijä todella on 100 metriä juoksijan edellä.

Jos $5t > 1000$, niin pitää olla $1000 = 160 + 3t + 100$. Siitä saadaan $3t = 740$ ja edelleen $t = 246\frac{2}{3}$. Koska $160 + 3 \cdot 246\frac{2}{3} = 900$, se toteuttaa $0 \leq 160 + 3t \leq 1000$. Koska $5 \cdot 246\frac{2}{3} = 1233\frac{1}{3}$, se toteuttaa myös $5t > 1000$. Niinpä se hyväksytään. Äsken saamamme 900 on juoksijan sijainti juuren ilmaisemalla hetkellä ja pyöräilijän sijainti on 1000, joten pyöräilijä todella on 100 metriä juoksijan edellä.

Vastaus: ajanhetkillä $t = 130$ ja $t = 246\frac{2}{3}$.

7. Ovat. Esimerkiksi $2\frac{1}{3}$ on sekaluku ja sille pätee $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$. Mutta $2\frac{x}{3}$ on kertolasku. Kun $x = 1$, sille pätee $2\frac{x}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \neq \frac{7}{3}$.
8. Jos -3 olisi vakiosymboli, niin -3^2 voitaisiin laskea $(-3) \cdot (-3) = 9$. Mutta se ei ole oikein, koska $-3^2 = -9$. Niinpä -3 on laskutoimitus.
9. Potenssilasku lasketaan ennen vastaluvun ottamista. Nimittäin toisin päin tehtäessä saataisiin $-3^2 = (-3)^2 = 9$.
10. $\text{nurin}(\varepsilon) = \varepsilon$
 $\text{nurin}(a\sigma) = \text{nurin}(\sigma)a$
11. Joko $\sigma = a$ ja $\rho = \varepsilon$ tai $\sigma = \varepsilon$ ja $\rho = a$.
12. $\sigma \not\leq \varepsilon$
 $\varepsilon < b\rho$
 $a\sigma < b\rho$, jos ja vain jos $\sigma < \rho$
13. On. Jos *vasen* $\neq$ *oikea*, niin lähtökohdan 2.9 (b) mukaan sekä *vasen* että *oikea* tuottaa arvon, ja niiden tuottamat arvot ovat erit. Tällöin sekä *oikea* että *vasen* tuottaa arvon, ja niiden tuottamat arvot ovat erit. Siksi lähtökohdan 2.9 (b) mukaan *oikea* $\neq$ *vasen*.
14. Ei ole. Esimerkiksi $1 \leq 2$ mutta $2 \not\leq 1$.
15. Ei päde. Esimerkiksi $2 \neq 1 \neq 1 + 1$, mutta silti ei $2 \neq 1 + 1$.
16. Ei päde. Esimerkiksi kun *lauseke* on $\frac{1}{0}$, niin se ei ole tosi. Jos *lauseke* on määriteltä, niin se pätee, ja muulloin ei.
17. Pätee. Jos $n = 2$, niin väite on muotoa ”jos $\text{lauseke}_1 \leq \text{lauseke}_2$ niin $\text{lauseke}_1 \leq \text{lauseke}_2$ ”. Se on ilmiselvästi tosi. Jos $n \geq 3$, niin jos-osan mukaan $\text{lauseke}_1 \leq \text{lauseke}_2$ ja $\text{lauseke}_2 \leq \text{lauseke}_3$. Niistä seuraa $\text{lauseke}_1 \leq \text{lauseke}_3$. Jos $n \geq 4$, niin edellisen mukaan $\text{lauseke}_1 \leq \text{lauseke}_3$ ja jos-osan mukaan $\text{lauseke}_3 \leq \text{lauseke}_4$. Niistä seuraa $\text{lauseke}_1 \leq \text{lauseke}_4$. Näin voidaan jatkaa mihin tahansa $n \geq 3$ saakka.

18. $\text{vasen} \Leftarrow \text{lauseke}_1$ ja $\text{keski} \Leftarrow \text{lauseke}_3$ ja $\text{oikea} \Leftarrow \text{lauseke}_4$.
19. $\text{vasen}(a) \Leftarrow (a+1)(a-1)$ ja $\text{oikea}(a) \Leftarrow a^2 - 1$ ja $\text{lauseke} \Leftarrow 1 + \sqrt{x}$ tuottaa $(1 + \sqrt{x} + 1)(1 + \sqrt{x} - 1) = (1 + \sqrt{x})^2 - 1$.
20. Tarkastellaan mitä tahansa tilannetta. Jos $\text{vasen} = \text{oikea}$, ja jos lauseke on määritelty, niin $\text{vasen} = \text{oikea}$.
21. Lähtökohdan 2.9 (e) ja (f) vuoksi ” $\text{lauseke} \geq 0$ ” sisältää sen, että lauseke on määritelty.
22. $x = \frac{1}{2}$, koska $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ja $\frac{1}{4} < \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
Tähän kelpaa mikä tahansa luku väliltä $0 < x < 1$. Yhtä hyvin olisi voinut vastata vaikkapa ” $x = \frac{9}{10}$, koska $\frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{81}{100} < \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$ ”.
23. $-1 \neq 1$ mutta silti $(-1)^2 \neq 1^2$ ei ole tosi, koska $(-1)^2 = 1^2 = 1$.
24. Tarvitsee löytää sellainen x , että $x \neq 2$ mutta $x^2 + 3x - 4 = 2^2 + 3 \cdot 2 - 4$. Edellä laskettiin, että $2^2 + 3 \cdot 2 - 4 = 6$. Vähentämällä molemmilta puolilta 6 saadaan $x^2 + 3x - 10 = 0$. Tästä x voidaan ratkaista toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla: $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2}$, josta juuriksi tulee -5 ja 2 . Helpommalla pääsee, jos toisen asteen yhtälön juurten summan sääntö on hallussa, koska sillä saadaan $x + 2 = -3$, joten $x = -5$. Testataan $x = -5$: $(-5)^2 + 3 \cdot (-5) - 4 = 25 - 15 - 4 = 6$.
Vastaus: $-5 \neq 2$ mutta $(-5)^2 + 3 \cdot (-5) - 4 = 2^2 + 3 \cdot 2 - 4$.
25. Sijoitukset ovat $\text{lauseke}(a) \Leftarrow \frac{1}{a-1}$ ja $\text{vasen} \Leftarrow (\sqrt{x})^2$ ja $\text{oikea} \Leftarrow x$, ja loppu-tulos on $\frac{1}{(\sqrt{x})^2-1} = \frac{1}{x-1}$. Se on sallittua kun $\text{vasen} = \text{oikea}$ ja $\text{lauseke}(\text{oikea})$ on määritelty. Ehto $\text{vasen} = \text{oikea}$ sievenee muotoon $(\sqrt{x})^2 = x$, joka kysymyksen mukaan pätee täsmälleen silloin kun $x \geq 0$. Jälkimmäisen vaatimuksen mukaan $\frac{1}{x-1}$ pitää olla määritelty, ja se pätee täsmälleen silloin kun $x \neq 1$. Niinpä jokaisessa tilanteessa, jossa $0 \leq x \neq 1$, pätee $\frac{1}{(\sqrt{x})^2-1} = \frac{1}{x-1}$.
Ehdon ” $0 \leq x \neq 1$ ” saa esittää myös muodossa ” $0 \leq x < 1$ tai $x > 1$ ”.
26. Pikkulause 2.11.
27. $0a = 0 \Leftrightarrow 1 + 1 = 2$
Jokainen sellainen yhtäpitävyys on pätevä, joten (a) kyllä ja (b) ei.
28. $x = 7$

29. Vastaesimerkissä pitää jommankumman puolen olla tosi. Tehtävän yhtäpitävyyden vasen puoli on tosi vain kun $x = 1$. Oikea puoli on tosi vain kun $x = 7$. Siksi muita mahdollisuuksia ei ole kuin nämä kaksi.
30. $x = 3 \vee x = 9$
31. $x \leq 0$
32. $x = 0 \vee x = 2$
33. $x \neq 0$
34. $x < -2 \vee 0 < x \leq 2$
35. Ensimmäinen ”vasen” edustaa kaavaa. Toinen ”vasen” ja ”oikea” edustavat lausekkeita.
36. Tämä ei ole jyrkästi kyllä/ei -asia, vaan kyse on siitä, mikä olisi todistusta lukevalle ihmiselle ymmärrettävintä. Pikkulause 2.10 on käytettävissä kaikissa tilanteissa, joten todistuksen alku säilyisi pätevänä, vaikka ensimmäinen tai molemmat ”mahdollisissa” poistettaisiin. Toisaalta ”mahdollisissa” on välttämätön määritelmää 2.16 käytettäessä. Selkeintä lienee lisätä se heti alussa.
37. Valitsemalla $\text{vasen} \Leftarrow \frac{160}{2} = \frac{2t}{2}$ ja $\text{keski} \Leftarrow 80 = \frac{160}{2} = \frac{2t}{2} = t$ ja $\text{oikea} \Leftarrow 80 = t$. Lisätyt yhtäsuuruudet ovat $80 = \frac{160}{2}$ ja $\frac{2t}{2} = t$.
38. Se saadaan pikkulauseesta 2.26 valitsemalla $\text{lauseke}(a) \Leftarrow a - 3t$ ja $\text{vasen} \Leftarrow 160 + 3t$ ja $\text{oikea} \Leftarrow 5t$. Tällöin $\text{lauseke}(\text{vasen})$ on $160 + 3t - 3t$ ja $\text{lauseke}(\text{oikea})$ on $5t - 3t$. Jos-osa toteutuu, koska $5t - 3t$ on määritelty jokaisella t :n arvolla. Siksi niin-osa tuottaa $160 + 3t = 5t \Rightarrow 160 + 3t - 3t = 5t - 3t$.
- 39.
- | | |
|---|-----------------------------------|
| $160 + 3t - 3t = 5t - 3t$ | |
| $\Rightarrow 160 + 3t - 3t + 3t = 5t - 3t + 3t$ | pikkulause 2.26, |
| | $5t - 3t + 3t$ on aina määritelty |
| $\Leftrightarrow 160 + 3t$ | pikkulause 2.21 |
| $= 160 + 3t - 3t + 3t$ | reaalilukujen laskusäännöt |
| $= 5t - 3t + 3t$ | |
| $= 5t$ | reaalilukujen laskusäännöt |
| $\Leftrightarrow 160 + 3t = 5t$ | pikkulause 2.21 |
40. Implikaation $160 = 2t \Rightarrow \frac{160}{0} = \frac{2t}{0}$ perusteleminen pikkulauseella 2.26 vaatisi, että aina kun $160 = 2t$, on $\frac{160}{0}$ tai $\frac{2t}{0}$ tai molemmat määritelty. Se ei toteudu, kun $t = 80$.

41. $(a+b)^2$

42. $\frac{ab}{2}$

43. $(a+b)^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2$

44. Tehtävänä oli ratkaista $\frac{x^2+x-2}{x-1} = -3$. Päättely jakautuu kahteen tapaukseen seuraavasti.

Jos $x = 1$, niin yhtälön vasemmalla puolella jaetaan nollalla. Nollalla jakaminen on kiellettyä, joten $x = 1$ ei ole juuri.

Jos $x \neq 1$, niin $x - 1 \neq 0$. Siksi yhtälön molemmat puolet saa kertoa $(x-1)$:llä. Siten saadaan $x^2 + x - 2 = -3(x-1)$. Kertomalla sulkeet auki saadaan $x^2 + x - 2 = -3x + 3$, josta lisäämällä molemmille puolille $3x - 3$ saadaan $x^2 + 4x - 5 = 0$. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$, joten $x = -5$ tai $x = 1$. Tilanne $x = 1$ on mahdoton oletuksen $x \neq 1$ vuoksi, joten se hylätään. Tilanne $x = -5$ on mahdollinen, koska se ei riko oletusta $x \neq 1$ eikä muita oletuksia ole tehty.

Vastaus on siis $x = -5$.

Lopputuloksen testaaminen. $\frac{(-5)^2 + (-5) - 2}{-5 - 1} = \frac{18}{-6} = -3$, joten -5 on alkuperäisen yhtälön juuri. Muita juuria ei voi olla seuraavasta syystä. Koska välivaiheena saatu $x^2 + x - 2 = -3(x-1)$ on toista astetta, on sillä enintään kaksi juurta. Sijoittamalla nähdään, että $x = 1$ on niistä toinen. Se ei kuitenkaan ole alkuperäisen yhtälön juuri, koska se aiheuttaa nollalla jakamisen.

45. Jos $n < 2$, niin osuus *lauseke*₁ *vo*₁ ... *vo*_{*n*-1} *lauseke*_{*n*} ei muodosta vertailua. Tällöin alimman rivin "∧" jää ilman vasemmanpuoleista argumenttia.

Vastaukseksi kelpaa myös, että tapaus $n = 1$ on jo määritelty lähtökohdassa 2.9, ja tapaukset $n \leq 0$ eivät muodosta yhtään vertailua.

46. Ehdosta $1 < i < n$ seuraa $n \geq 3$. Nimittäin $1 < i$ takaa $i \geq 2$, joten $n > i$ takaa $n \geq 3$.

47. $17 \leq x < 18$

48.

$$\begin{aligned} & 12 \leq y < 13 \\ \Leftrightarrow & 12 - y \leq 0 < 13 - y \\ \Leftrightarrow & 12 - y \leq 0 \quad \wedge \quad 0 < 13 - y \\ \Leftrightarrow & -y \leq -12 \quad \wedge \quad -13 < -y \\ \Leftrightarrow & -13 < -y \leq -12 \end{aligned}$$

49. $-13 < -y \leq -12$
 $\Leftrightarrow 17 - 13 \leq x - 13 < x - y \leq x - 12 < 18 - 12$
 $\Rightarrow 4 < x - y < 6$
 Logiikkalahden ja Matikkamäen väliselle etäisyydelle pätee $4 < x - y < 6$.
50. $x - d$ ja $y - d$
51. Logiikkalahden etäisyys tästä kyltistä: $9 \leq x - d < 10$
 Matikkamäen etäisyys tästä kyltistä: $3 \leq y - d < 4 \Leftrightarrow -4 < d - y \leq -3$
 $9 \leq x - d < 10 \wedge -4 < d - y \leq -3$
 $\Rightarrow 9 - 4 < 9 + (d - y) \leq (x - d) + (d - y) = x - y < 10 + (d - y) \leq 10 - 3$
 $\Rightarrow 5 < x - y < 7$
52. $5 < x - y < 6$
53. $8 < d < 9$
54. Jos olisi $1 < 0$, niin äsken todistetun mukaan olisi $1 \cdot 1 > 0$. Mutta koska $1 \cdot 1 = 1$, olisi sekä $1 < 0$ että $1 > 0$. Sitä ei lähtökohta 2.29 (a) salli.
55. $a < 0 \wedge b > 0 \Rightarrow ab = ba < 0$
56. Oltiin oletuksen $x < 2$ alaisuudessa. Siksi yhtäpitävyyden kannalta vain sillä oli väliä, mitä totuusarvoja $x \leq 3 \vee x \geq 5$ ja $x < 2$ tuottavat silloin, kun $x < 2$. Silloin ne molemmat tuottavat vain totuusarvoa **T**.
57. $a \leq x < b, a \leq x \leq b, a \leq x, x < b, x \leq b$ ja **T**.
58. $r \leq x \leq r$
59. Jos $x < 4$, niin $\frac{x-1}{x-4} \geq x-5 \Leftrightarrow x-1 \leq (x-4)(x-5) \Leftrightarrow x^2 - 9x + 20 \geq x-1 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 21 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-7) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3 \vee x \geq 7 \Leftrightarrow x \leq 3$.
 Jos $x > 4$, niin $\frac{x-1}{x-4} \geq x-5 \Leftrightarrow x-1 \geq (x-4)(x-5) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x-3)(x-7) \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow 4 < x \leq 7$.
 Jos $x = 4$, niin $\frac{x-1}{x-4} \geq x-5$ on määrittelemätön.
 Vastaus: $\frac{x-1}{x-4} \geq x-5 \Leftrightarrow x \leq 3 \vee 4 < x \leq 7$
- Lopputuloksen testaaminen. Yhtälöllä $\frac{x-1}{x-4} = x-5$ ei voi olla enempää kuin kaksi juurta, koska kertomalla nimittäjä pois siitä tulee toisen asteen yhtälö. Ainoa kohta, jossa siinä esiintyy määrittelemätön lauseke, on $x = 4$.

testiarvo x	0	3	$3\frac{1}{2}$	4	5	7	10
<i>vasen</i>	$\frac{1}{4}$	-2	-5	ei määr.	4	2	$1\frac{1}{2}$
<i>oikea</i>	-5	-2	$-1\frac{1}{2}$		0	2	5
$vasen \geq oikea$	tosi	tosi	epätosi	ei kump.	tosi	tosi	epätosi

60. Kun $x < -7$, on epäyhtälön $\sqrt{x+7} > x-5$ vasen puoli määrittelemätön.

Kun $-7 \leq x < 5$, on $\sqrt{x+7}$ ei-negatiivinen mutta $x-5$ on negatiivinen, joten kaikki luvut sillä välillä ovat juuria.

Kun $x \geq 5$, saadaan $\sqrt{x+7} > x-5 \Leftrightarrow x+7 > (x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$
 $\Leftrightarrow x^2 - 11x + 18 < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-9) < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 9 \Leftrightarrow 5 \leq x < 9$.

Vastaus: $-7 \leq x < 9$

Lopputuloksen testaaminen. Yhtälöllä $\sqrt{x+7} > x-5$ ei voi olla enempää kuin kaksi juurta, koska neliöimällä molemmat puolet siitä tulee toisen asteen yhtälö. Siinä esiintyy määrittelemätön lauseke jos ja vain jos $x < -7$.

x	-8	-7	-3	2	3	5	6	9	18
vas.	ei määr.	0	2	3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{13}$	4	5
oik.		-12	-8	-3	-2	0	1	4	13
$>$	ei kump.	tosi	tosi	tosi	tosi	tosi	tosi	epät.	epät.

61. $x \geq 100 \Leftrightarrow 101x \geq 100x + 100 \Rightarrow 1,01x \geq x + 1 \Rightarrow 1,01 \cdot \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq 1,01 \cdot \frac{1}{x+1}$

62. Esimerkin päättelyt menevät läpi, vaikka oletus $i > 1$ korvattaisiin oletuksella $i > 0$. Sen jälkeen $p < \frac{p+q}{2}$ saadaan keskimmäisen vaiheen tuloksesta $\frac{p+(i-1)q}{i} < \frac{p+iq}{i+1}$ sijoittamalla i :ksi 1.

63. T

64. $x = x$

65. $|160 + 3t - 5t| = 100$

66. Kun $x \geq 0$, on $x < 0$ epätosi, joten kuvan 10 perusteella $x < 0 \wedge y = -x$ on epätosi. Saman kuvan perusteella $(x \geq 0 \wedge y = x) \vee (x < 0 \wedge y = -x)$ tuottaa saman totuusarvon kuin $x \geq 0 \wedge y = x$. Se puolestaan tuottaa saman totuusarvon kuin $y = x$, koska $x \geq 0$ on tosi. Niinpä kun $x \geq 0$, on kaavamme tosi jos ja vain jos $y = x$.

67. $(x \geq y \wedge z = y) \vee (x < y \wedge z = x)$

68. Kun $x > 44$, tuottaa kumpikin puoli **U**. Kun $x \leq 44$, ei kumpikaan puoli tuota **U**. Koska puolet ovat yhtäpitävät, kullakin $x \leq 44$ joko molemmat puolet tuottavat **T** tai molemmat puolet tuottavat muun totuusarvon kuin **T**. Koska jälkimmäinen ei ole myöskään **U**, on se **F**.

69. Jokaisella x :n arvolla kumpikin puoli on epätosi.

70. (a) $x - 2 \geq 0$ eli $x \geq 2$
 (b) $44 - x \geq 0$ eli $x \leq 44$
 (c) **T**
 yhteensä $2 \leq x \leq 44$

71. Valitsemalla $\text{vasen} \Leftarrow \frac{1}{2}$ ja $\text{keski} \Leftarrow \frac{1}{1}$ ja $\text{oikea} \Leftarrow \frac{1}{0}$ saadaan $\frac{1}{2} = \frac{1}{1} = \frac{1}{0} \equiv \frac{1}{2} = \frac{1}{0} = \frac{1}{1}$. Se tarkoittaa samaa kuin $\frac{1}{2} = \frac{1}{1} \wedge \frac{1}{1} = \frac{1}{0} \equiv \frac{1}{2} = \frac{1}{0} \wedge \frac{1}{0} = \frac{1}{1}$. Mutta $\frac{1}{2} = \frac{1}{1} \wedge \frac{1}{1} = \frac{1}{0} \equiv \mathbf{F} \wedge \mathbf{U} \equiv \mathbf{F}$, ja toisaalta $\frac{1}{2} = \frac{1}{0} \wedge \frac{1}{0} = \frac{1}{1} \equiv \mathbf{U} \wedge \mathbf{U} \equiv \mathbf{U}$.

72. Pätee. Jos jokainen lausekkeista *vasen*, *keski* ja *oikea* on määritelty, ja jos ne kaikki tuottavat saman arvon, niin jokainen yhtäsuuruuksista $\text{vasen} = \text{keski}$, $\text{keski} = \text{oikea}$, $\text{vasen} = \text{oikea}$ ja $\text{oikea} = \text{keski}$ on tosi. Silloin " $\Leftrightarrow$ ":n molemmat puolet ovat tosia. Muussa tapauksessa ainakin toinen yhtäsuuruuksista $\text{vasen} = \text{keski}$ ja $\text{keski} = \text{oikea}$ on epätosi tai määrittelemätön, ja samoin yhtäsuuruuksille $\text{vasen} = \text{oikea}$ ja $\text{oikea} = \text{keski}$. Silloin " $\Leftrightarrow$ ":n kumpikaan puoli ei ole tosi.

73. Valitsemalla

	n	kaava_1	kaava_2	i	j
$\Leftarrow$	2	<i>vasen</i>	<i>oikea</i>	2	1

saadaan pikkulauseen 3.6 lisäksi-osuudesta

Jos $2 \geq 2$ ja $\text{vasen} \equiv \text{oikea}$ ja $1 \leq 2 \leq 2$ ja $1 \leq 1 \leq 2$, niin *oikea* $\equiv$ *vasen*.

Ei tarvitse olettaa $2 \geq 2$, $1 \leq 2 \leq 2$ ja $1 \leq 1 \leq 2$, koska ne ovat tosia vaikkei niitä oletettaisikaan. Jättämällä ne pois saadaan

Jos $\text{vasen} \equiv \text{oikea}$, niin *oikea* $\equiv$ *vasen*.

74. Koska $5x + 2(1 - 3x) = 4 \Leftrightarrow x = -2$, yhtäpitävyys

$$y = 1 - 3x \wedge 5x + 2(1 - 3x) = 4 \Leftrightarrow y = 1 - 3x \wedge x = -2$$

saadaan pikkulauseesta 3.10 valinnoilla $\text{vasen} \Leftarrow 5x + 2(1 - 3x) = 4$ ja $\text{oikea} \Leftarrow x = -2$ ja $\text{kaava}(X) \Leftarrow y = 1 - 3x \wedge X$.

75. $\text{vasen} \Leftarrow x \geq 100$ ja $\text{oikea} \Leftarrow 0 < \frac{1}{x} \leq 0,01$ ja $\text{kaava}(X) \Leftarrow X \rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} \leq 1,01x$. Tässä X on symbolin ” $\rightarrow$ ” alaisuudessa, mutta se ei kelpaa pikkulauseelle 3.10.

76. $\text{kaava} \Leftarrow y = a \wedge x = -2$ ja $\text{vasen} \Leftarrow 1 - 3 \cdot (-2)$ ja $\text{oikea} \Leftarrow 7$. Kaavassa ei esiinny ” $\forall$ ” eikä ” $\exists$ ” lainkaan. Vaatimus $\text{vasen} = \text{oikea}$ on nyt $1 - 3 \cdot (-2) = 7$, ja se on aina tosi reaalilukujen sääntöjen perusteella.

77. Oletuksen $x = -2$ alaisuudessa saadaan $y = 1 - 3x \Leftrightarrow y = 1 - 3 \cdot (-2)$ pikkulauseella 3.11 valitsemalla $\text{kaava}(a) \Leftarrow y = 1 - 3a$ ja $\text{vasen} \Leftarrow x$ ja $\text{oikea} \Leftarrow -2$. Siirtämällä oletus kaavoihin pikkulauseella 3.12 (b) saadaan $y = 1 - 3x \wedge x = -2 \Leftrightarrow y = 1 - 3 \cdot (-2) \wedge x = -2$.

$$\begin{aligned} 78. \quad & 8a - 15b = 12 \wedge 6b + 5a = 28 \\ \Leftrightarrow & 16a - 30b = 16a - 5 \cdot 6b = 24 \wedge 6b = 28 - 5a \\ \Leftrightarrow & 16a - 5(28 - 5a) = 24 \wedge 6b = 28 - 5a \\ \Leftrightarrow & 41a - 140 = 24 \wedge 6b = 28 - 5a \\ \Leftrightarrow & a = 4 \wedge 6b = 28 - 20 = 8 \\ \Leftrightarrow & a = 4 \wedge b = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 79. \quad & 10x - 6y = 14 \wedge 15x = 21 + 9y \\ \Leftrightarrow & 6y = 10x - 14 \wedge 15x = 21 + 9y \\ \Leftrightarrow & 3y = 5x - 7 \wedge 15x = 21 + 3(5x - 7) \\ \Leftrightarrow & 3y = 5x - 7 \wedge 15x = 15x \\ \Leftrightarrow & y = \frac{5x-7}{3} \wedge \mathbf{T} \\ \Leftrightarrow & y = \frac{5}{3}x - \frac{7}{3} \end{aligned}$$

80. $x > 0$

81. $\mathbf{T}$

82. Pikkulauseen 4.4 (a) mukaan $1 \in \mathbb{Z}$, joten (b) mukaan $1 - 1 \in \mathbb{Z}$ eli $0 \in \mathbb{Z}$.

83. Se lopettaa siten, että $q = 0 \wedge r = \text{jaettava}$. Jakoyhtälön 4.8 (a) pätee mutta (b) ei.

84. Lisätään jakajaa jaettavan kopioon r kunnes tulos on nolla tai positiivinen. Jokaisella lisäyksellä vähennetään vähennyskertojen määrää q yhdellä. Tämä vaihe voidaan sijoittaa sellaisenaan VÄHENNYSJAKO:n alkuun tai perään. Ei tarvita testiä, onko jaettava negatiivinen.

```

1   $q := 0; r := \text{jaettava}$ 
2   $\text{kun } r \geq \text{jakaja}$  toista seuraavaa:
3       $r := r - \text{jakaja}; q := q + 1$ 
4   $\text{kun } r < 0$  toista seuraavaa:
5       $r := r + \text{jakaja}; q := q - 1$ 

```

85. Ensiksi testataan, onko jakaja negatiivinen. Jos se on, niin vaihdetaan se vastaluvukseen. Sen jälkeen suoritetaan edellisen tehtävän jakolasku. Lopuksi, jos jakaja oli negatiivinen, niin vaihdetaan osamäärä vastaluvukseen.
86. Tehtävän 84 vastauksen ohjelma suoritetaan siten, että m :n paikalla on $-m$ ja tuotetun q :n paikalla on $-q$. Koska $-m$ on positiivinen, ollaan sen ohjelman pätevyysalueella. Siksi niin saadut $-q$ ja r toteuttavat jakoyhtälön, eli $n = (-m)(-q) + r \wedge 0 \leq r < |-m|$. Koska $(-m)(-q) = mq$ ja $|-m| = |m|$, seuraa siitä, että lopullisille q ja r pätee $n = mq + r \wedge 0 \leq r < |m|$, eli niille pätee jakoyhtälö.
87. Murtoluku $\frac{n}{m}$ on sellaisenaan rationaaliluvulta vaadittua muotoa, kun numerojonot n ja m tulkitaan niiden esittämistä luonnollisina lukuina. Murtoluku $-\frac{n}{m}$ esittää samalla tulkinnalla rationaalilukua $\frac{-n}{m}$.
88. Jos $n \geq 0$, niin rationaaliluku $\frac{n}{m}$ voidaan esittää murtolukuna $\frac{n}{m}$, missä n ja m esitetään numerojonoina. Muussa tapauksessa $n < 0$. Silloin $\frac{n}{m}$ voidaan esittää murtolukuna $-\frac{k}{m}$, missä k on luvun $-n$ esitys numerojonona.
89. Valitaan jonon ensimmäiseksi luvuksi $0,1999\dots$ ja muiksi luvuiksi $0,04000\dots$, $0,004000\dots$, $0,0004000\dots$ ja niin edelleen. Muodostettavasta luvusta tulee $0,3000\dots$. Sen ja jonon ensimmäisen luvun erotus on $0,3000\dots - 0,1999\dots = 0,1000\dots$
90. Luonnollisten lukujen äärelliset osajoukot voidaan laittaa jonoon siten, että ensin on tyhjä joukko, sitten ne joiden suurin alkio on 0 (niitä on yksi, nimittäin $\{0\}$), sitten ne joiden suurin alkio on 1 (niitä on kaksi, $\{1\}$ ja $\{0, 1\}$), sitten ne joiden suurin alkio on 2 ja niin edelleen. Osajoukkoja, joiden suurin alkio on i , on 2^i kappaletta (kukin luvuista $0, \dots, i-1$ on tai ei ole mukana).

Hakemisto

- $||$ 75
- $\sqrt{}$ 54
- $=$ 29
- $\neq$ 29
- $<$ 29
- $>$ 29
- $\leq$ 29
- $\geq$ 29
- $\neg$ 72
- $\wedge$ 72
- $\vee$ 73
- $\rightarrow$ 73
- $\leftrightarrow$ 73
- $\forall$ 95
- $\exists$ 95
- $\Rightarrow$ 47
- $\Leftrightarrow$ 39
- $\Leftarrow$ 48
- $\equiv$ 76
- $\Leftarrow$ 32
- $\in$ 96
- $\notin$ 96
- $[f]$ 89
- $[kaava]$ 90
- $[lauseke]$ 89
- $[]$ 98
- $[\]$ 98
- Σ 25
- Σ^* 25
- ε 26
- aakkosto 25
- absolute value 75
- alphabet 25
- atomic formula 69
- atomikaava 69
- base case 57
- Cantor's diagonal argument 109
- Cantorin diagonaaliargumentti 109
- ceiling 98
- compound formula 72
- constant 13
- constant function 18
- countable 109
- counter-example 35, 35, 40, 48, 77
- crash (of a program) 21
- decimal numeral 105
- definition 19
- denominator 102
- desimaaliluku 105
- digit 105
- domain 17
- domain of discourse 13
- enumeration 108
- epäluku 69
- epätosi 67
- equality 28
- expression 13
- expression tree 16
- F** 67
- false 67
- floor 98
- formula 69
- fractional number 102
- function 17
- function symbol 14
- funktio 17
- funktiolauseke 14
- funktiosymboli 14
- ikuinen silmukka 21
- implikaatio 47
- infinite loop 21
- integer 96
- interval 63
- itseisarvo 75
- juuri 8
- kaatuminen (ohjelman) 21
- kaava 69
- kaksiarvoinen logiikka 67

katto 98	principle of explosion 52
kokonaisluku 96	proof by contradiction 53
kolmiarvoinen logiikka 67	propositiologiikka 91
laskujärjestys propositiologiikassa 78	propositiomuuttuja 71
laskujärjestys reaalityluilla 15	propositional logic 91
lattia 98	propositional variable 71
lause 19	puheenaihe 13
lauseke 13	päätelyaskel 38
lausekepuu 16	päätelyimplikaatio 47
luonnollinen luku 96	päätelyoperaattori 83
lähtöjoukko 17	$\mathbb{Q}$ 103
mahdollinen tilanne 11	$\mathbb{R}$ 97
mahdottomasta seuraa mitä tahansa 52	rationaaliluku 103
materiaalinen ekvivalenssi 82	rational number 103
materiaalinen implikaatio 81	reaaliluku 97
material equivalence 82	real number 97
material implication 81	recursion 57
mixed number 102	rekursio 57
murtoluku 102	ristiriitatodistus 53
muuttuja 14	root 8
määritelmä 19	sekaluku 102
määrittelemätön (lauseke) 14	square root 54
määrittelemätön (totuusarvo) 67	state 8
$\mathbb{N}$ 96	symmetric 30
natural number 96	symmetrinen 30
neliöjuuri 54	T 67
nimittäjä 102	theorem 19
nollamittainen joukko 111	three-valued logic 67
not-a-number 69	tilalle-merkintä 33
null set 111	tilanne 8
numerator 102	tosi 67
numero 105	totuusarvo 67
numerointi 108	transitiivinen 56
numeroituva 109	transitive 56
osittainen järjestys 55	true 67
osittaisfunktio 18	truth value 67
osoittaja 102	two-valued logic 67
partial function 18	type 24
partial order 55	tyyppi 24
perustapaus 57	U 67
possible state 11	uncountable 109

undefined (expression) 14
undefined (truth value) 67
vakio 13
vakiofunktio 18
variable 14
vastaesimerkki 35, 35, 40, 48, 77
väli 63
yhdistetty kaava 72
yhtäpitävyys 39
yhtäsuuruus 28
yhtätotuus 76
ylinumeroituva 109
 $\mathbb{Z}$ 96
 $\mathbb{Z}^+$ 96