Kohti matemaattisen päättelyn opettamista

Antti Valmari

Jyväskylän yliopisto
Informaatioteknologian tiedekunta

1 Taustaa
2 Matematiikan opiskelusta näissä tutkinnoissa
3 Automaattinen palaute maailmalla
4 MathCheck
5 Päättelemisen perinteisen opetuksen ongelmia
6 Tähän käyttöön muokattu logiikka
Julkaisuja

1 Taustaa

Kurssit nykyisin

- TIEP1020 Diskreetit rakenteet:
  - tietojenkäsittelytietede ⇜⇝ lyhyt matematiikka (+ propedeuttinen)
- TIEA3810 Sovellettu predikaattilogiikka:
  - tekniikka ⇜⇝ pitkä matematiikka + 19 op JYU:ssä
- TIES4211 Algoritmit 2:
  - syventävä ⇜⇝ paljon ohjelmointia, TIEP1020

Vuosien saatossa

- JYU
  - Automaatit ja kieliopit
  - Joukko-oppi ja logiikka ohjelmoinnissa
- TTKK / TTY
  - tietorakenteita ja algoritmeja
  - olio-ohjelmointia / C++
  - ohjelmien todistamista
  - teoreettista tietojenkäsittelytiedettä
  - rinnakkaisuuden matemaattista teoriaa ja verifiointialgoritmeja
  - ...

2 Matematiikan opiskelusta näissä tutkinnoissa

Näissä tutkinnoissa matematiikan on oltava työkalu ongelmien ratkomiseen

- mieluummin peruskoulumatematiikkaa jota osataan käyttää,
  kuin hienoa matematiikkaa jota ei osata käyttää

Tekoälyn aikakaudella

- ymmärtäminen korostuu
  - oltava itse ohjaksissa $\rightsquigarrow$ osattava käskyttää tekoälyä ja arvioida sen vastaukset
- laskurutiinien merkitys
  - vähenee: koneet hoitavat rutiinit
  - ei katoa: matematiikkaa ei voi ymmärtää ellei ole yhtään laskurutiinia

Koulussa rennosti ottamisen aiheuttama jälkeenjääneisyys voi vastata satoja tunteja

$\Rightarrow$ tarvitaan paljon harjoittelua

$\Rightarrow$ täytyy tehdä tehtäviä kotonakin

Kotona tekemistä edesauttavat

- vastauksista palautetta antavat ohjelmat
- tekoälyn käyttäminen neuvojana (ei valmiiden vastausten antajana)
- ymmärrys siitä, että tehtäviä tehdään omaa tulevaisuutta varten

3 Automaattinen palaute maailmalla

STACK

- vertaa Maximalla mallivastauksiin, vastaa oikein / väärin
- opettaja voi syöttää ennakoituja vääriä vastauksia ja niille palautteen
- ei tuota vastaesimerkkejä, ellei opettaja ole niitä syöttänyt

$\Rightarrow$ palautteen tuottaminen opettajalle työlästä, toimii vain osalle vääriä vastauksia

Tekoäly

- osaa tulkita käsin kirjoitettuja vastauksia
- itsessään kehno matemaatikko $\rightsquigarrow$ tarvitsee matematiikkaohjelman taustakseen
- tulkitsee sanallisia vastauksia hyvin mutta ei moitteettomasti

$\Rightarrow$ voi antaa väärää palautetta

A collaboratively-derived research agenda for e-assessment in undergraduate mathematics

- 19 kirjoittajaa, julkaistu 2022 (verkko) ja 2024 (lehti)
- vapaatekstimuotoisten vastausten käsittely säilynee suurena ongelmana
- päättelemisen automaattista tarkastamista on tutkittu,
  mutta vielä ei olla kovin pitkällä

4 MathCheck

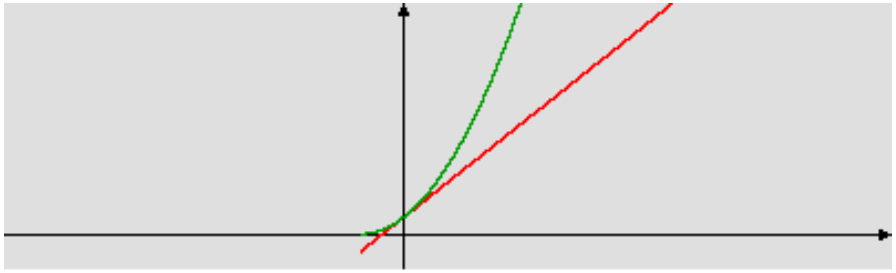
Alkoi vuonna 2015 aritmeettisten sievennysketjujen epätäydellisenä tarkastajana

Assume $n \geq 0 \wedge x \geq -1$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+nx+x$$

Relation does not hold when $n = 1$ and $x = 1$

left $= 4$
right $= 3$



$-9 \leq x \leq 11$ and $-2. \leq \uparrow \leq 13.$

`https://users.jyu.fi/~ava/MathCheck_yleinen.html#aritm`

- testaa suurella joukolla testiarvoja
- käytännössä ainakin yhtä luotettava kuin ihminen, paitsi yksittäisissä asioissa
  - kuten että ei määritelty nimittäjän nollakohdissa

Opettaja voi muun muassa

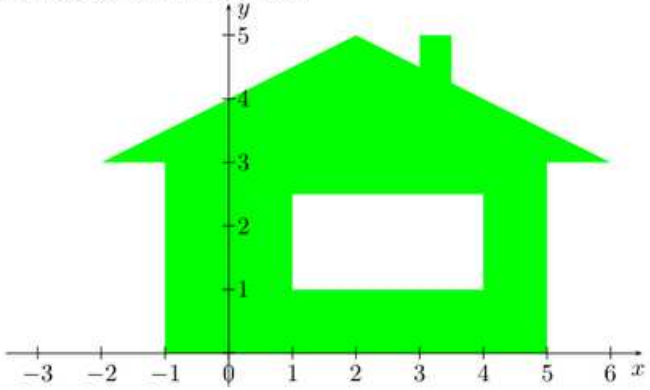
- kytkeä pois osia palautteesta (kuten käyrien piirron)
- vaatia, että vastaus ei ole liian pitkä
  - estää hyväksymästä liian monimutkaista vastausta, vaikka se olisi muuten oikein
  - toimii toisinaan keinona ohjata löytämään muu kuin ilmeisin vastaus
- vaatia tiettyä muotoa, esim. polynomi $2x^2-3x-5$ eikä $(x+1)(2x-5)$

Reaalilukujen ”melkein” lineaaristen lausekkeiden logiikka 2020

`https://users.jyu.fi/~ava/number_logic.html`

- mökkitehtävä

Write a formula that represents the green area. All points on the borderlines between white and green are green. You may first design and check each part of the cottage in the answer boxes that are further below.




```
   -1 <= x <= 5 /\ 0 <= y <= 3 /\ !(1 < x <= 4 /\ 1 < y < 2 1/2)
\/ y >= 3 /\ y <= 4 + x/2 /\ y <= 6 - x/2
\/ 3 <= x <= 7/2 /\ 5 >= y > 3
```

new tab or to the right 5

Typing instructions: arithmetic comparisons basic logic reasoning quantifiers

model-answer

$\Leftrightarrow$

$-1 \leq x \leq 5 \wedge 0 \leq y \leq 3 \wedge \neg\left(1 < x \leq 4 \wedge 1 < y < 2\frac{1}{2}\right) \vee y \geq 3 \wedge y \leq$

Relation does not hold when $y = 2$ and $x = 4$

left $\equiv$ T

right $\equiv$ F

- Pólyan yhtälöryhmä

$x + 7y + 3v + 5u = 16 \wedge 8x + 4y + 6v + 2u = -16 \wedge 2x + 6y + 4v + 8u = 16 \wedge 5x + 3y + 7v + u = -16$

$\Rightarrow 8x + 4y + 6v + 2u = -16 \wedge 2x + 6y + 4v + 8u = 16$ Just copied the 2nd and 3rd equation.

$\Rightarrow 10x + 10y + 10v + 10u = 0$ Added the previous two equations.

Original $\Rightarrow 6x + 10y + 10v + 6u = 0$ Added 1st and 4th original equations.

Original $\Rightarrow 4x + 4u = 0 \Leftrightarrow u = -x$ Subtracted the previous from its previous and solved u.

Subproof Solve v from the above results.

$10x + 10y + 10v + 10u = 0 \wedge u = -x \Rightarrow 10y + 10v = 0 \Leftrightarrow v = -y$

Subend

Subproof Eliminate u and v from the 1st and 2nd original. Solve y then x.

Assume $u = -x \wedge v = -y$

$x + 7y + 3v + 5u = 16 \wedge 8x + 4y + 6v + 2u = -16$

$\Leftrightarrow -4x + 4y = 16 \wedge 6x - 2y = -16 \Rightarrow 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -x$

Original $\Rightarrow 6x - 2(-x) = -16 \Leftrightarrow x = -2$

Subend

Original $\Leftrightarrow x = -2 \wedge y = 2 \wedge v = -2 \wedge u = 2$ Final answer picked from the intermediate results.

The reasoning is correct and solved the system of equations!

Kokonaislukujen logiikka ilman muuttujien kertolaskuja 2024

A volleyball set ends when a team has at least 25 points and at least 2 points more than the opposite team has. For instance, the points cannot be 35–28 but can be 15–8. Points are earned one at a time. Assume that the variables p and q hold the numbers of points of the two teams.

Write a formula that says that the points can be p and q. You may choose yourself the kind of numbers that your formula talks about, and how short you try to make your answer. "Difficult maximum length" probably requires an inelegant formula.

maximum length	natural numbers	integers	real numbers
no limit	○	○	○
middle difficulty	○	○	○
difficult	○	◉	○

```
p >= 0 <= q /\ (p <= 25 >= q \/ q <= p+2 <= q+4)
```

new tab or to the right 15

Typing instructions: arithmetic comparisons basic logic reasoning quantifiers

model-answer $\Leftrightarrow$ $p \geq 0 \leq q \wedge (p \leq 25 \geq q \vee q \leq p+2 \leq q+4)$

The complexity of the final expression is 21, while it must be at most 18.

Muitakin toimintamoodeja on, niistä tärkeimmät:

- log-, $\sqrt{}$ - jne. yhtälöiden ratkaiseminen (vaatii opettajaa syöttämään juuret)
- yhteysriippumaton kielioppi

Kokemuksia

- varhainen versio tuotti tilastollisesti merkitsevää parannusta oppimistuloksiin
- sittemmin ei ole ollut mahdollisuutta tehdä pedagogisia kokeita
- ennen koronaa opiskelijoilta tuli palautetta, ja se oli myönteistä
- koronan jälkeen ei ole onnistuttu hankkimaan mitään palautetta

5 Päättelemisen perinteisen opetuksen ongelmia

Määrittelyjoukot eivät hoida tehtäväänsä kunnolla

- määritelmistä seuraa, että $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \frac{x}{x} = 1$ tarkoittaa $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x} = 1 \vee x = 0$
- $$3\sqrt{|x|-1} \geq x+1$$
  $$\Leftrightarrow \quad (x < 0 \wedge 3\sqrt{-x-1} \geq x+1) \vee (x \geq 0 \wedge 3\sqrt{x-1} \geq x+1)$$
  $$\Leftrightarrow \quad \ldots$$
  $$\Leftrightarrow \quad x \leq -1 \vee 2 \leq x \leq 5$$

Looginen seuraus on väärin ymmärretty käsite

- $x > 8 \Rightarrow x > 3$ ei ole looginen seuraus, vaan vain matemaattinen tosiasia
  - riippuu symbolien ">", "8" ja "3" tulkinnoista
- näkyy oppikirjoissa sekaannuksina

Kaavan ja päättelysäännön ero on olennainen

- jos mummo on Pihtiputaalla, niin hän on Rovaniemellä
  tai jos hän on Rovaniemellä, niin hän on Pihtiputaalla
- logic of conditionals, paradoxes of material implication

Osa opiskelijoiden vaikeiksi kokemista asioista itse asiassa opetetaan ristiriitaisesti!

6 Tähän käyttöön muokattu logiikka

Ei yhtä epätarkka kuin luonnollinen kieli eikä yhtä kömpelö kuin formaalit päättelyjärjest.

Symboleille "$\Leftrightarrow$" ja "$\Rightarrow$" piti löytää todellista käyttöä vastaava matemaatt. määritelmä

> *vasen* $\Rightarrow$ *oikea* jos ja vain jos jokaisessa mahdollisessa tilanteessa, jossa *vasen* on tosi, myös *oikea* on tosi

- tilanne: vapaiden muuttujien arvojen yhdistelmä
- mahdollinen tilanne: tilanne, joka toteuttaa ko. kohdassa voimassa olevat oletukset

Määrittelyjoukkojen ongelma ratkeaa kolmiarvoisella logiikalla

- tosi, epätosi, määrittelemätön: Stephen Cole Kleenen K_3^S
- myös SQL käyttää sitä
- Chalin 2005: ohjelmoijille luontevin
  - väitän, että matemaatikotkin todellisuudessa käyttävät sitä, vaikka eivät myönnä

"$\Leftrightarrow$" ei säily "$\neg$":n alaisuudessa, joten tarvitaan myös "$\equiv$"

- muuten kuten "$\Leftrightarrow$", mutta ei samaista epätotta ja määrittelemätöntä
- silti tarvitaan myös "$\Leftrightarrow$" mm. yhtälöiden ratkaisuja varten

Erot kaksiarvoiseen logiikkaan ovat vähäisiä mutta tärkeitä

- mm. oikosulku-ja "`&&`" ja oikosulku-tai "`||`" siirtyvät logiikan piiriin

Julkaisuja

Antti Valmari and Lauri Hella: The logics taught and used at high schools are not the same. Fourth Russian Finnish Symposium on Discrete Mathematics 2017

Terhi Kaarakka, Kirsi Helkala, Antti Valmari, and Marjukka Joutsenlahti: Pedagogical experiments with MathCheck in university teaching. LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education 2019

Antti Valmari and Johanna Rantala: Arithmetic, logic, syntax and MathCheck. CSEDU 2019

Antti Valmari: Automated checking of flexible mathematical reasoning in the case of systems of (in)equations and the absolute value operator. CSEDU 2021

Antti Valmari: Adapting formal logic for everyday mathematics. CSEDU 2022

Antti Valmari and Lauri Hella: A completeness proof for a regular predicate logic with undefined truth value. Notre Dame Journal of Formal Logic 2023

Antti Valmari: Automatic feedback on logic problems about real numbers and integers. Third Workshop on Co-Creating New Ways of Information Systems Education 2025

Antti Valmari and Mika Hirvensalo: An Implementation of Integer Presburger Arithmetic in a Math Education Tool. 16th International Workshop on the Implementation of Logics 2026

Antti Valmari and Mika Hirvensalo: Towards Practice-Oriented Formal Reasoning Using Three-Valued Logic. Journal of Applied Logics 2026