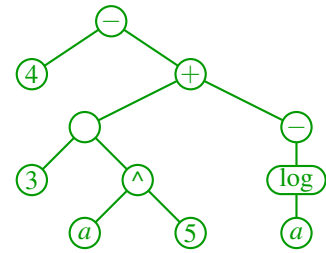


Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Kukin tehtävä on 1 tai 2 pisteen arvoinen. Suurin osa mallivastauksista on korkeintaan 2 riviä pitkiä.



1&2. Piirrä lausekkeen $4 - (3a^5 + - \log a)$ lausekepuu.

Tarkoittakoon S että syön sämpylöitä, P että syön puuroa ja M että puuro on maidotonta. Esitä seuraavat väittämät kaavoina.

- 3. Syön sämpylöitä tai puuroa. $S \vee P$
- 4. Syön sämpylöitä, jos puurossa on maitoa. $\neg M \rightarrow S$
- 5. En syö molempia. (Tämä ei lupaa, että syön mitään.) $\neg(S \wedge P)$

Seuraavissa tehtävissä muista käyttää merkkejä \Leftrightarrow , \Rightarrow , \Leftarrow ja \equiv oikein.

6. Paina negaatiot alas ja sievennä $\neg(P \wedge \neg Q \vee \neg R)$. $\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg \neg R \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge R$

7&8. Perustele $P \wedge (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$ sijoittamalla johonkin proposition **F** ja **T**. Näytä jokaisesta sijoituksesta tulos heti sijoituksen jälkeen, hyödylliseksi katsomasi määrä välivaiheita ja lopputulos.

Kun $P \equiv \mathbf{F}$: $P \wedge (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow \mathbf{F} \wedge (\neg \mathbf{F} \vee Q) \Leftrightarrow \mathbf{F}$ ja $P \wedge Q \Leftrightarrow \mathbf{F} \wedge Q \Leftrightarrow \mathbf{F}$. Tuli sama (eli **F**).
 Kun $P \equiv \mathbf{T}$: $P \wedge (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow \mathbf{T} \wedge (\neg \mathbf{T} \vee Q) \Leftrightarrow \mathbf{F} \vee Q \Leftrightarrow Q$ ja $P \wedge Q \Leftrightarrow \mathbf{T} \wedge Q \Leftrightarrow Q$. Tuli sama (eli **Q**).

Tulokset heti sijoituksen jälkeen max 1 p, sievennysten lopputulokset max 1 p. ” \Rightarrow ” tms. käyttövirhe $-1/2$ p. Johtopäätös puuttuu $-1/4$ p. Sijoitettu vain **F** tai vain **T** -1 p. Jos on ylimääräisiä sijoituksia niin $-1/2$ p., koska ne vihjaavat, että ei ole ymmärretty mikä tekee tällaisesta päättelystä pätevän.

Kun yhtälöstä $2|x - 5| + 3 = x + 4$ poistetaan itseisarvomerkki kuten kurssilla opetettiin, saadaan *kaava1* ja *kaava2*, joille pätee $2|x - 5| + 3 = x + 4 \Leftrightarrow \text{kaava1} \vee \text{kaava2}$.

- 9. Kirjoita *kaava1* ja ratkaise siitä x .
 $x - 5 < 0 \wedge -2(x - 5) + 3 = x + 4 \Leftrightarrow x < 5 \wedge -2x + 10 = x + 1 \Leftrightarrow x < 5 \wedge 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$
- 10. Kirjoita *kaava2* ja ratkaise siitä x .
 $x - 5 \geq 0 \wedge 2(x - 5) + 3 = x + 4 \Leftrightarrow x \geq 5 \wedge 2x - 10 = x + 1 \Leftrightarrow x = 11$
- 11. Ratkaise $2|x - 5| + 3 = x + 4$. $x = 3 \vee x = 11$

Merkitään Suomen joukkueen pisteiden määrää s :llä ja Ruotsin joukkueen pisteiden määrää r :llä. Pisteet kertyvät yksi kerrallaan. Voittoon vaaditaan vähintään 25 pistettä ja vähintään 2 pistettä enemmän kuin vastapuolella. Esimerkiksi tilanne Suomi 26 – Ruotsi 8 on mahdoton, koska peli olisi päätynyt kun Suomella oli 25 pistettä. Saat luottaa siihen, että s ja r ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja, eli ei tarvitse sanoa $s \geq 0$ ja $r \geq 0$. Tehtävissä 12 ja 13 saat luottaa siihen, että tilanne on mahdollinen. Kirjoita kaavat, jotka sanovat seuraavat asiat.

12. Toisella joukkueella on kaksi pistettä enemmän kuin vastapuolella.

$$|s - r| = 2$$

13. Suomi voitti.

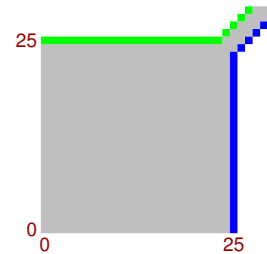
$$s \geq 25 \wedge s \geq r + 2$$

14. Ottelu on kesken.

$$(s < 25 \vee s < r + 2) \wedge (r < 25 \vee r < s + 2)$$

15. Tilanne on mahdoton.

$$s > 25 \wedge s > r + 2 \vee r > 25 \wedge r > s + 2$$



Muumihahmoja on 12 erilaista. Jokaisen suklaamunan sisällä on yksi muumihahmo. Henkilö haluaa kutakin muumihahmoa ainakin yhden kappaleen. Hänellä on jo k erilaista muumihahmoa, missä $0 \leq k \leq 11$. Todennäköisyys sille, että seuraavassa munassa on jokin niistä, on $\frac{k}{12}$.

16. Mikä on todennäköisyys sille, että seuraavassa munassa on muumihahmo, jota hänellä ei vielä ole?

$$\frac{12-k}{12}$$

17. Merkitään x :llä kuinka monta suklaamunaa hänen pitää keskimäärin ostaa, jotta hän saisi muumihahmon, jota hänellä ei vielä ole. Hänen täytyy ostaa ainakin yksi. Jollakin todennäköisyydellä p siinä ei ole uutta muumihahmoa, jolloin hänen pitää ostaa vielä keskimäärin x suklaamunaa. Hänen pitää siis ostaa kaikkiaan keskimäärin $1 + px$ suklaamunaa. Ilmaise p k :n avulla, muodosta yhtälö ja ratkaise siitä x .

$$p = \frac{k}{12}, \text{ joten } x = 1 + \left(\frac{k}{12}\right)x \Leftrightarrow 12x = 12 + kx \Leftrightarrow (12 - k)x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{12-k}$$

18. Kuinka monta suklaamunaa hänen pitää keskimäärin vielä ostaa, jos hänellä on jo kahdeksan eri muumihahmoa, ja hän haluaa ainakin yhden jokaista puuttuvaa?

$$\frac{12}{1} + \frac{12}{2} + \frac{12}{3} + \frac{12}{4} = 12 + 6 + 4 + 3 = 25$$

19. Kuinka monta suklaamunaa hänen pitää keskimäärin ostaa, jos hänellä ei ole aluksi yhtään muumihahmoa ja hän haluaa ainakin yhden jokaista? Riittää, että annat vastauksen lausekkeena, jossa saat käyttää "...".

$$\frac{12}{12} + \frac{12}{11} + \dots + \frac{12}{1}$$

Sekalaisia kysymyksiä

20. Mikä on lausekkeen ja kaavan tärkein ero?

Lauseke tuottaa luvun ja kaava tuottaa totuusarvon.

21. Sievennä kaava $\neg(2 < x \leq 6)$ muotoon, jossa \neg ei esiinny.

$$x \leq 2 \vee x > 6$$

22. Käytettävissä on satunnaislukugeneraattori $\text{RANDOM}()$, joka tuottaa satunnaisen liukuluvun väliltä $0 \leq x < 1$. Olkoon $a < y$. Kirjoita lauseke, joka tuottaa satunnaisen liukuluvun väliltä $a \leq x < y$.

$$a + (y - a) \cdot \text{RANDOM}()$$

- 23&24. Jos talletus tuottaa korkoa $p\%$ ja korko lisätään pääomaan, niin pääoma kasvaa vuosittain kertoimella $1 + \frac{p}{100}$. Mikä pitää p :n olla, jotta pääoma kaksinkertaistuisi kymmenessä vuodessa? Muodosta yhtälö ja ratkaise siitä p . Vastaa antamalla lauseke, siis ei likiarvoa.

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{10} = 2 \Leftrightarrow 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[10]{2} \Leftrightarrow p = 100 \cdot (\sqrt[10]{2} - 1)$$

25&26. Kirjoita ohjelmanpätkä, joka palauttaa true jos ja vain jos taulukon $A[0 \dots n-1]$ kohdassa i on nelonen ja muualla ei ole. Muussa tapauksessa sen pitää palauttaa false. Muuttuja i on tyyppiä int, joten sen arvo on kokonaisluku ja voi olla negatiivinen.

```
if( i < 0 || i >= n ){ return false; }
if( A[i] != 4 ){ return false; }
for( int j = 0; j < n; ++j ){
    if( i != j && A[j] == 4 ){ return false; }
}
return true;
```

Kirjoita seuraavat taulukosta $A[0 \dots n-1]$ puhuvat väitteet kaavoina.

27. Taulukon kaikki alkiot ovat nelosia. $\forall i; 0 \leq i < n : A[i] = 4$

28. Taulukossa on ainakin kaksi nelosta. $\exists i : \exists j; 0 \leq i < j < n : A[i] = A[j] = 4$

29. Taulukon kohdassa i on nelonen ja muualla ei ole.
 $0 \leq i < n \wedge A[i] = 4 \wedge \forall j; 0 \leq j < n \wedge i \neq j : A[j] \neq 4$

30. Taulukossa on neljä alkioita. $n = 4$

Loppu