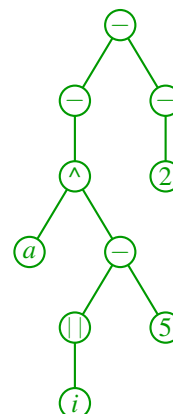


Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Kukaan tehtävä on 1 tai 2 pisteen arvoinen. Suurin osa mallivastauksista on korkeintaan 2 riviä pitkiä.

Monissa mallivastauksissa on enemmän informaatiota kuin täysiin pisteisiin vaadittin.



1&2. Piirrä lausekkeen $-a^{|i|-5} - 2$ lausekepuu.

Tarkoitakoon P että on pakkasta, L että on lunta ja H että voi hiihtää. Esitä seuraavat väittämät propositiologiikan kaavoina.

3. On lunta ja pakkasta.

$L \wedge P$

4. On pakkasta tai lumi puuttuu.

$P \vee \neg L$

5. Jos ei ole lunta niin ei voi hiihtää.

$\neg L \rightarrow \neg H$

” $\Rightarrow$ ” eikä ” $\rightarrow$ ” -1/2 p.

Seuraavissa tehtävissä muista käyttää merkkejä $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ja $\equiv$ oikein.

6&7. Perustele $P \wedge (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$ sijoittamalla johonkin propositiioon **F** ja **T**. Näytä jokaisesta sijoituksesta tulos heti sijoituksen jälkeen, hyödylliseksi katsomasi määrä välivaiheita ja lopputulos.

Kun $P \equiv \mathbf{F}$: $P \wedge (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow \mathbf{F} \wedge (\neg \mathbf{F} \vee Q) \Leftrightarrow \mathbf{F}$ ja $P \wedge Q \Leftrightarrow \mathbf{F} \wedge Q \Leftrightarrow \mathbf{F}$. Tuli sama (eli **F**).

Kun $P \equiv \mathbf{T}$: $P \wedge (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow \mathbf{T} \wedge (\neg \mathbf{T} \vee Q) \Leftrightarrow \mathbf{F} \vee Q \Leftrightarrow Q$ ja $P \wedge Q \Leftrightarrow \mathbf{T} \wedge Q \Leftrightarrow Q$. Tuli sama (eli Q).

Tulokset heti sijoituksen jälkeen max 1 p, sievennysten lopputulokset max 1 p. ” $\Rightarrow$ ” tms. käyttövirhe -1/2 p. Sijoitettu vain **F** tai vain **T** -1 p. Jos on ylimääräisiä sijoituksia niin -1/2 p., koska ne vihjaavat, että ei ole ymmärretty mikä tekee tällaisesta päättelystä pätevän.

8&9. Sievennä $\frac{1}{2}(|a-b|+a+b)$. Lopputuloksen näppärään esittämiseen käytettävä symboli on matematiikassa kenties harvinainen, mutta saattaa olla ohjelmoinnista tuttu. Ainakin on helppo ymmärtää mistä on kyse ja keksiä sille itse vaikka suomenkielinen symboli.

Jos $a < b$, niin $\frac{1}{2}(|a-b|+a+b) = \frac{1}{2}(-(a-b)+a+b) = \frac{1}{2}(-a+b+a+b) = \frac{1}{2}(2b) = b$.

Jos $a \geq b$, niin $\frac{1}{2}(|a-b|+a+b) = \frac{1}{2}((a-b)+a+b) = \frac{1}{2}(2a) = a$.

Niinpä $\frac{1}{2}(|a-b|+a+b) = \max(a,b)$.

Laskelmasta puuttuu ”jos $a < b$ ” tms. ja ”jos $a \geq b$ ” tms. -1/2 p. Lopputulos ” a tai b ” tms. -1/2 p.

Tentin arvosanojen 1, 2, 3, 4 ja 5 pisterajat on annettu taulukossa rajat. Sen lailliset indeksit alkavat nolasta. Opiskelijan saama pistemäärä on muuttujassa pist.

10. Kirjoita kaava, joka on tosi täsmälleen silloin, kun arvosanan kuuluu olla 3. Siinä ei saa olla muita muuttujia kuin pist ja rajat.

$\text{rajat}[2] \leq \text{pist} < \text{rajat}[3]$

11. Kirjoita ohjelmanpätäkä, joka laskee arvosanan. Käytä silmukkaa.

```
int arvosana = 0;
while( arvosana < 5 && pist >= rajat[ arvosana ] ){ ++arvosana; }
```

Indeksointivirhe $-1/2$ p. Väärä vertailuoperaattori $-1/2$ p. Tuloksena pisteraja tms. eikä arvosanaa $-1/2$ p. "return" silmukassa mutta ei silmukan perässä $-1/4$ p. Käytetään alustamattoman muuttujan arvoa $-1/4$ p. Kovin monimutkainen $-1/4$ p.

Kaksi metriä leveä ja 20 metriä pitkä linja-auto ajaa lännestä itään nopeudella 72 km/h. Tun- nissa on 60 minuuttia ja minuutissa on 60 sekuntia. Kymmenen metriä tien eteläpuolella on värikuulapysäy- s. Värikuula lentää 100 m/s suoraan pohjoiseen tehtävän kannalta sopivalla kor- keudella. Muuttuja t ilmaisee ajan sekunteina. Linja-auton keula on värikuulan lentoradan koh- dalla hetkellä $t = 0$. Linja-auton etunurkat katsotaan osaksi sivuseinää mutta ei osaksi tuulilasia. Ilmaise vastaukset muuttujan t ja symbolien $=$, $<$ jne. avulla.

12. Millä hetkellä värikuula pitää ampua, jotta se osuisi keskelle linja-auton sivuseinää?

Muutetaan 72 km/h metreiksi sekunnissa: $72 \cdot 1000 \text{ m} / 3600 \text{ s} = 20 \text{ m/s}$. Linja-auton sivuseinän keskikohta on lentoradan kohdalla hetkellä $10 \text{ m} / (20 \text{ m/s}) = 0,5 \text{ s}$. Värikuula pitää ampua $10 \text{ m} / (100 \text{ m/s}) = 0,1 \text{ s}$ sitä ennen. Vastaus: $t = 0,4 \text{ s}$

Laskuvirheet tyypillisesti kukin $-1/4$ p. Lisäksi $-1/4$ p, jos tuloksissa on epärealistisia, esim. satoja sekunteja.

13. Millä hetkellä värikuula pitää ampua, jotta se osuisi linja-auton sivuseinään?

Tuulilasi on lentoradan kohdalla hetkellä 0 ja takaikkuna hetkellä 1. Värikuula pitää am- pua $0,1 \text{ s}$ sitä ennen. Vastaus: $-0,1 \text{ s} \leq t \leq 0,9 \text{ s}$

" $-0,1 < \dots$ " $-1/4$ p., koska etunurkka piti ottaa mukaan. Takanurkalle myös " $<$ " kel- pasi.

14. Millä hetkellä värikuula pitää ampua, jotta se osuisi tuulilasiin?

Värikuulan pitää ehtiä 10:stä 12 metriin ennen hetkeä 0. Vastaus: $-0,12 < t < -0,1$

Kukin " $\leq$ " $-1/4$ p., koska etunurkat piti jättää pois.

Kummallekin seuraavista anna vastaesimerkki tai lyhyt perustelu.

15. $a^{(n^m)} = a^{(m^n)}$ Vastaesimerkki $2^{(2^1)} = 2^2 = 4$ mutta $2^{(1^2)} = 2^1 = 2$.
Vastauksista $a^{1^2} = a \neq a^{2^1} = a^2$ $-1/2$ p., koska ilman arvoa a :lle ne eivät ole päteviä, koska $0^{2^1} = 0^{1^2}$ ja $1^{2^1} = 1^{1^2}$.

16. $(a^n)^m = (a^m)^n$

$$(a^n)^m = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kertaa}} \cdot \dots \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kertaa}} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{nm \text{ kertaa}} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ kertaa}} \cdot \dots \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ kertaa}} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kertaa}} = (a^m)^n$$

Tarkastellaan kellonaikoja.

17. Kuinka monta sekuntia on kulunut keskiyöstä, kun kello on 10:15:03?

$10 \cdot 3600 + 15 \cdot 60 + 3 = 36903$

Yksi pieni laskuvirhe $-1/2$ p.

18. On kulunut n sekuntia keskiyöstä, mutta vähemmän kuin yksi vuorokausi. Kirjoita lause- ke, jonka tulos on kellonajan tunnit. $n \text{ div } 3600$

Reaalilukujen jakolasku eikä " div " $-1/2$ p.

19. Kirjoita lauseke, jonka tulos on kellonajan minuutit. $(n \bmod 60) \bmod 60$
tai $(n \bmod 3600) \bmod 60$

20. Kirjoita lauseke, jonka tulos on kellonajan sekunnit. $n \bmod 60$

Eräässä pianossa yksiviivaisen A-nuotin taajuus on 440 Hz eli 440 värähdystä sekunnissa. Kun mistä tahansa koskettimesta alkaen siirrytään yhden koskettimen verran oikealle, taajuus kasvaa vakiokertoimella. (Mustat ja valkoiset koskettimet ovat tältä kannalta samanveroiset.) Kun siirrytään 12 kosketinta oikealle, taajuus kaksinkertaistuu. Anna vastaukset mahdollisimman yksinkertaisina tarkkoina lausekkeina (siis ei esim. desimaalilukuina).

21. Mikä on taajuus 24 kosketinta yksiviivaisesta A:sta vasemmalle?
12 kosketinta vasemmalle puolittaa taajuuden, joten 24 kosketinta vasemmalle jakaa sen neljällä. Vastaus: 110 Hz

22. Mikä on taajuus kuusi kosketinta yksiviivaisesta A:sta oikealle?
Kuusi kosketinta oikealle kertoo taajuuden x :llä ja toiset kuusi uudelleen x :llä, joten 12 kosketinta kertoo $(x \cdot x)$:llä. Siksi $x \cdot x = 2$. Vastaus: $440\sqrt{2}$ Hz

23. Mikä on taajuus yksi kosketin yksiviivaisesta A:sta oikealle?
Kertoimelle pätee $x^{12} = 2$, joten $x = \sqrt[12]{2}$. Vastaus: $440 \sqrt[12]{2}$ Hz

24. Kun siirrytään 5 kosketinta oikealle, taajuus kasvaa suunnilleen kertoimella $\frac{4}{3}$. Suunnilleen millä kertoimella taajuus kasvaa, kun siirrytään 7 kosketinta oikealle?
Yhteensä niistä tulee 12 kosketinta oikealle, joten $\frac{4}{3} \cdot x = 2$. Vastaus: $\frac{3}{2}$

Esitä seuraavat taulukosta $A[0 \dots n-1]$ puhuvat väitteet kaavoina.

25. A on vähenevässä suuruusjärjestyksessä. $\forall i; 0 \leq i < n-1 : A[i] \geq A[i+1]$
Indeksointivirhe $-1/4$ p. Vaadittu aito vähenevyys $-1/4$ p. ”AA” eikä $\forall$ tms. $-1/4$ p.

26. Kohdassa i oleva alkio on erisuuri kuin ensimmäinen alkio. Jos kohtaa i ei ole, täytyy kaavasi tuottaa epätosi. $0 \leq i < n \wedge A[i] \neq A[0]$
Jos tässä oli ” $\exists$ ” tai ” $\forall$ ”, niin 0 p. On tärkeää oppia erottamaan sidotut eli ilmauksen sisäiset muuttujat vapaista eli sellaisista muuttujista, jotka välittävät tietoa ilmauksen ja ulkomaailman välillä. Siksi tätä asiaa korostettiin kurssilla.

27&28. Kolmonen esiintyy taulukossa täsmälleen yhden kerran. (Sen lisäksi taulukossa saa mutta ei ole pakko olla mitä tahansa muuta.)

$\exists i; 0 \leq i < n : A[i] = 3 \wedge \forall j; 0 \leq j < n \wedge j \neq i : A[j] \neq 3$

Oletetaan, että taulukko $T[1 \dots n]$ on kasvavassa suuruusjärjestyksessä ja x on siinä jossain kohdassa. Oheisen algoritmin pitäisi löytää x :n paikka T :ssä, mutta siinä on virhe. Virheen saa ilmenemään kahden alkion taulukolla. Merkintä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa x pyöristettynä alas lähimpään kokonaislukuun.

```
a := 1; y := n + 1
while a < y do
  v := ⌊ (a + y) / 2 ⌋
  if T[v] < x then a := v
  else y := v
```

29. Anna sellaiset x ja T , että algoritmi jää ikuisen silmukkaan. 1 ja $[0, 1]$

30. Ehdota virheelle korjaus. Kun $T[v] < x$, niin pitäisi sijoittaa $a := v + 1$.

Loppu