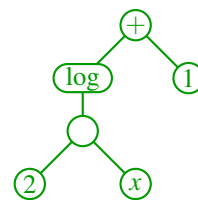
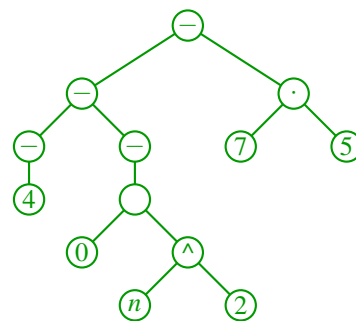


Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Kukin tehtävä on 1 tai 2 pisteen arvoinen. Suurin osa mallivastauksista on korkeintaan 2 riviä pitkiä.

1. Piirrä lausekkeen $\log 2x + 1$ lausekepuu.



- 2&3. Piirrä lausekkeen $-4 - -0n^2 - 7 \cdot 5$ lausekepuu.



Tarkoitakoot K ”kävelen yliopistolle”, S ”sataa” ja P ”minulla on sateenvarjo”. Ilmaise seuraavat väittämät kaavoina.

4. Kävelen yliopistolle tai sataa. $K \vee S$
5. Sataa, eikä minulla ole sateenvarjoa. $S \wedge \neg P$
6. En kävele yliopistolle, jos sataa. $S \rightarrow \neg K$
7. Jos minulla on sateenvarjo tai ei sada, kävelen yliopistolle. $P \vee \neg S \rightarrow K$

Tehtävissä 8, ..., 10 näytä kaava sekä heti sijoittamisen jälkeen että sieventämisen jälkeen. Saat näyttää myös välivaiheita.

8. Sijoita **F** eli ”epätosi” P :n paikalle kaavaan $\neg(Q \wedge \neg P)$ ja sievennä.

$$\neg(Q \wedge \neg \mathbf{F}) \Leftrightarrow \neg(Q \wedge \mathbf{T}) \Leftrightarrow \neg Q$$

9. Sijoita **T** eli ”tosi” P :n paikalle kaavaan $\neg(Q \wedge \neg P)$ ja sievennä.

$$\neg(Q \wedge \neg \mathbf{T}) \Leftrightarrow \neg(Q \wedge \mathbf{F}) \Leftrightarrow \neg \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{T}$$

10. Tee samat kaavalle $P \vee \neg Q$.

$$\mathbf{F} \vee \neg Q \Leftrightarrow \neg Q \text{ ja } \mathbf{T} \vee \neg Q \Leftrightarrow \mathbf{T}$$

11. Päättele edellisten vastausten avulla, pätee $\neg(Q \wedge \neg P) \Leftrightarrow P \vee \neg Q$.

Kun P oli **F**, tuotti $\neg(Q \wedge \neg P)$ saman kuin $P \vee \neg Q$ (nimittäin $\neg Q$). Kun P oli **T**, tuotti $\neg(Q \wedge \neg P)$ saman kuin $P \vee \neg Q$ (nimittäin **T**). Niinpä $\neg(Q \wedge \neg P)$ tuottaa aina saman kuin $P \vee \neg Q$, joten $\neg(Q \wedge \neg P) \Leftrightarrow P \vee \neg Q$ pätee.

Sekalaisia tehtäviä

12. Mille luvulle x pätee $\log_2 x = 5$?

32

13. Paljonko on $\log_5(25^{17})$? Näytä ainakin yksi välivaihe.

$$\log_5(25^{17}) = 17 \log_5(5^2) = 17 \cdot 2 = 34$$

14. Olkoon q osamäärä ja r jakojäännös, kun luonnollinen luku n jaetaan positiivisella kokonaisluvulla m . Kirjoita jakoyhtälö ja siihen liittyvä jakojäännöstä koskeva kaava.

$$n = qm + r \wedge 0 \leq r < m.$$

15. Ilmoita osamäärä ja jakojäännös, kun kaikki on muuten kuten edellisessä tehtävässä, mutta jaettavana on $qrm + n$. Osamäärä on $q + qr$ ja jakojäännös on r .

- 16&17. Olkoot ϕ , ψ ja χ kaavoja. Valitse seuraavista kaksi epäpätevää ja anna niille vastaesimerkit:

(a) $\phi \wedge \psi \Rightarrow \phi \vee \psi$

(c) $\phi \vee \psi \Rightarrow \phi$

(e) Jos $\phi \Rightarrow \neg\phi$, niin $\neg\phi$.

(b) $\neg\neg\phi \Rightarrow \phi$

(d) $\phi \wedge \neg\phi \Rightarrow \psi$

(f) Jos $\chi \wedge \phi \Rightarrow \chi \wedge \psi$, niin $\phi \Rightarrow \psi$.

(c): ϕ on **F** ja ψ on **T**. (f): ϕ on **T**, ψ on **F** ja χ on **F**.

Tehtävissä 18, ..., 22 kaikki muuttujat saavat arvonsa kokonaislukuista. Kokonaisluku n on *jaollinen* kokonaisluvulla m , missä $m \neq 0$, jos ja vain jos on olemassa sellainen kokonaisluku k , että $n = km$. *Alkuluku* tarkoittaa ykköstä suurempaa kokonaislukua, joka ei ole jaollinen muilla positiivisilla kokonaisluvuilla kuin ykkösellä ja itsellään.

18. Millä kokonaisluvuilla 20 on jaollinen? $-20, -10, -5, -4, -, 2, -1, 1, 2, 4, 5, 10$ ja 20

19. Millä kokonaisluvuilla 0 on jaollinen? Jokaisella muulla kuin 0, koska $0 = 0m$

20. Kirjoita kaava, joka sanoo, että p on alkuluku.

$$p > 1 \wedge \neg\exists k; \exists m : k > 1 \wedge m > 1 \wedge p = km$$

- 21&22. Kirjoita yksinkertainen ohjelmanpätkä, joka palauttaa `true` jos ja vain jos kokonaisluku p on alkuluku. Muutoin se palauttaa `false`. Ohjelman ei tarvitse olla tehokas.

if $p < 2$ **then return** `false`

for $i := 2$ **to** $p - 1$ **do**

if $p \bmod i = 0$ **then return** `false`

return `true`

Kun yhtälöstä $3|x - 4| + 2 = x + 10$ poistetaan itseisarvomerkit kuten kurssilla opetettiin, saadaan *kaava1* ja *kaava2*, joille pätee $3|x - 4| + 2 = x + 10 \Leftrightarrow \text{kaava1} \vee \text{kaava2}$.

23. Kirjoita *kaava1* ja ratkaise siitä x . $x - 4 < 0 \wedge -3(x - 4) + 2 = x + 10$
 $-3(x - 4) + 2 = x + 10 \Leftrightarrow -3x + 12 + 2 = x + 10 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$

24. Kirjoita *kaava2* ja ratkaise siitä x . $x - 4 \geq 0 \wedge 3(x - 4) + 2 = x + 10$
 $3x - 12 + 2 = x + 10 \Leftrightarrow 2x = 20 \Leftrightarrow x = 10$

25. Ratkaise $3|x - 4| + 2 = x + 10$. $x = 1 \vee x = 10$

Ilmaise kaavoina seuraavat taulukosta $A[0 \dots n - 1]$ puhuvat väitteet.

26. Sen mikään alkio ei ole nelonen. $\forall i; 0 \leq i < n : A[i] \neq 4$

27. Kohdassa i on nelonen. $0 \leq i < n \wedge A[i] = 4$

28. Kohdassa i , ja vain siinä, on nelonen. $0 \leq i < n \wedge A[i] = 4 \wedge \forall j; 0 \leq j < n : i = j \vee A[j] \neq 4$

29. Jossain muualla kuin ensimmäisessä kohdassa on nelonen. Tämä ei ota kantaa siihen, onko ensimmäisessä kohdassa nelonen. $\exists i : 1 \leq i < n : A[i] = 4$

30. Alkioita on neljä kappaletta. $n = 4$

Loppu